コンパクトリー群の実射影空向の直積への自由作用につりて.

岩乡大 人文社会科学部 石川洋一郎

§ 1. 亭.

Gをコンパクトリー群とするとき、Robert. Oliver [1] は、次の結果を示した。即ち、 Gか同次之のSpheneの直積に自由に作用するための条件は、Gか So(3)を含まないことである。これに対して、 $X=RP^{n_1}\times\cdots\times RP^{n_R}$ を実射影空向の直積とするとき、X上の Gの自由作用について、次の称な結果が得られました。

定理A 単純リー群のがX上に自由に作用する条件は、

- (1) G = SO(3)
- (2) ヨni= 4m+3, (mは非負整数である) が成立することである。

<u>定理B</u> コンパクト連結り一群GがX上に自由に作用する 条件は、

(1) $G = T \times SO(3) \times \cdots \times SO(3)$,

(2) kG ≤ k

(Tはトーラス群)が成立することである。

定理C コンパクトリー群GがX上に自由に作用する条件は

- (1) $G_0 = T \times SO(3) \times \cdots \times SO(3)$
 - (2) #G ≤ K

(Go は Gの単位成分)が成立することである。

§ 2. 準備.

定理を証明するために、次の=>の補題を必要とする。 XをG-空间とするとき、 ev^x ; $G \longrightarrow X$ を $ev^x(g)=gx$ で 定義される写像とする。

補題1 コンパクト連結リー辞令が X上に自由に作用するとき $(ev^x)_*$; $H_1(G: Z_2) \longrightarrow H_1(X: Z_2)$ は 早射である。

(証明) TをGの極大トーラスとするとき、包含写像(:TCGから誘導された写像 (*; H(T; ZL)→) H(G: ZL) は全射なので、Gかトーラス下のとき証明すればよい。

 $T = S' \times \cdots \times S' \left(1 - \text{times} \right) \times (7, (a_1 \cdots a_k) \in \text{ker}(\mathcal{O}^x)_* ?''$ $(a_1 \cdots a_k) \neq 0 \times \frac{1}{3}$

$$f(t) = \begin{cases} t, & (ai \neq 0) \\ e, & (ai = 0) \end{cases}$$

$$f(t) = (f(t), \dots, f(t))$$

<u>補題</u>2. 日を単純リー群で、比G ≥ 2 とする。このとき、 包含写像 (: T C G (但してはGの極大トーラス) から誘導された写像

心*: H(T; ≥2)→ H2(G; ≥2)は筆射でない。

∮3. 定理の証明.

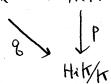
補題 $1 + 5 (ev^{x})^{*}$; $H'(X Z_{1}) \rightarrow H'(SO(3), Z_{2})$ は全射なって、 $H^{*}(X; Z_{2}) \rightarrow H^{*}(SO(3); Z_{1})$ も全射となる。 故に、fiber空間 $SO(3) \longrightarrow X \longrightarrow \frac{\times}{30(3)}$

に対して、 Zz-保数の spectral 311は自明となり poincane 多項式 について、

(1+x+t²+t³)gt) = (1+x+···+tʰ)×···×(1+x+···tʰ)
が成立する。故にこの式の右辺は 1+犬で割り切れる。このことから ni = 4m+3となる。

<u> 全理Bの証明</u> Gをコンパクト連結り-群とするとき G ≈ T×H,×…×Ht/K

但し、Hiは単連結単純リー群で、Tはトーラス群、そして Hiは
T×Hi×…×Htの有限位数の中心である。このとき次の図式は可換となる。
Hi →> HiK



このとき、 $kerg = HinKなので、<math>Hi/HinK \approx Hik/K となる$ 従って、Hi/HinK は 単純リー群なので、補題1、スから、 $<math>Hi/HinK \approx SO(3) となる。 故に<math>Hi \approx SU(2)$ で、 $HinK \approx Z_1 となる$ るので $G = T \times SO(3) \times \cdots \times SO(3) \times Ta 3$ 。 又補題1から はら ミャか成立する。

定理Cの証明 十分条件を証明すればよい。 GoをGの単位 成分として、 l= Gao とかく。 Go は X = RPnx x x x RPnx に自 由に作用するとする。このとき前に注意したことにより、日 は、XIに自由に作用することかわかる。 1+ge Grac対して gにより生成士中に cyclic group は SO(3)~RP3に自由に作用 するので GGoに誘導される空向をMgとあくとき、 Gは

(TMg) X(TX) 1+ge960 に自由に作用することがわかる。これで証明が終る。

文献

- (1) Robert Oliver. Firee compact group actions on products of spheres. Lecture Notes in Math. No. 763. Springer 1978.
- G. E. Bredon. Introduction to compact transformation groups. Academic Press. 1972.