数理解析研究所講究録
440 巻 1981 年 119-125

$\mathbb{Q}_{ab}$の不分岐拡大について

東大 理　　朝田 衛

§.1 問題の背景

複素数体或いは有限体の代数閉包上の一変数代数函数体上の不分岐Galois拡大体、特にその最大不分岐Galois拡大体のGalois群については、幾何学的考察によってその様子をかなり記述することができることはよく知られている。しかしながら、同様のことを代数体について考えるとき類似の結果は今までのところ殆ど何も得られていないと言ってよいと思われる。ここで考察の対象を有限次代数体にすると、不分岐拡大をそれ自身以外には持たない体(有理数体やGaussの数体など)や、その最大不分岐Galois拡大体が無限次になる体(類体塔の例)などいろいろであって複雑である。函数体の場合には定数体が代数閉体であることにより簡明な結果が得られたこと、代数体(特に有理数体)において定数体の代数閉包の類似として有理数体に1のp巾乗根を添加した体をとる

ことによって$\mathbb{Z}_p$－拡大の理論が成功していること、などを考えればこの問題についても考察の対象を有限次代数体ではなく、有理数体に1のベキ根をすべて添加した全円分体にすれば、函数体と類似の結果が得られるのではないかと空想できる。実際のところはそのようなことは何もできていないのであるが、この小文ではこのような立場に立って有理数体に1のベキ根をすべて添加して得られる体$\mathbb{Q}_{ab}$の不分岐 Galois 拡大体について考察した結果を述べる。

§.2 予備的な結果

$\mathbb{Q}$：有理数体

$\mathbb{Q}_{ab}$：$\mathbb{Q}$の最大 Abel 拡大体、即ち$\mathbb{Q}$に1のベキ根をすべて添加して得られる代数体

$\mathbb{Q}_{ab}^{tam}$：$\mathbb{Q}$に1の素数乗根をすべて添加して得られる代数体

M：$\mathbb{Q}_{ab}$の最大不分岐 Galois 拡大体

M_1：$\mathbb{Q}_{ab}^{tam}$の最大不分岐 Galois 拡大体

L：$\mathbb{Q}_{ab}$とM_1との合成体

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & M \\
 & L \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
\mathbb{Q}_{ab} \arrow[ur] \arrow[dd] & & \\
 & M_1 & \\
\mathbb{Q}_{ab}^{tam} \arrow[ur] \arrow[d] & & \\
\mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

とする。LはMの部分体である。MもM_1も$\mathbb{Q}$上の Galois 拡大体であり、従ってLも$\mathbb{Q}$上の Galois 拡大体である。又、容易にわかるように$\mathbb{Q}_{ab} \cap M_1 = \mathbb{Q}_{ab}^{tam}$である。

MのQ_{ab}上のGalois群、或いはMのL上のGalois群等については今までのところ殆ど何もわかっていないと言ってよいと思われる。そこでここではM/Lの中間体の実例を構成することにより、少しでもMのL上のGalois群の性質を明らかにしようと試みる。M/Lの中間体、即ちLの不分岐拡大体を実際に構成するには、ここではまず、Q上の有限次Galois拡大体でQ_{ab}と合成したときにMに含まれるものを構成する。その際には次の命題が基本的である。

命題1

KをQ上の有限次Galois拡大体とする。このとき、KQ_{ab}がMに含まれる為の必要十分条件は、Kのすべての素因子について、その分解群がAbel群となることである。

（証略）

そこで、この命題の条件を満たすようなKを構成するのであるが、ここではそれをうまい形のQ上の方程式の最小分解体として構成する。ここで注意すべきことは、目標とするところがLの（自明でない）不分岐拡大体を構成することにあるのであるから、KQ_{ab}がMに含まれ、しかもLに含まれないようにKを構成しなければならない。このことを念頭におきつつ、ここでは$f(x)=x^{\ell}+ax^2+b$（ℓは5以上の素数、a, bは有理整数）という形の方程式を採用する。a, bにいくつ

かの条件を満足させることによって次の命題が証明される。

命題2

ℓを5以上の奇素数、pを奇素数で$p \nmid \ell(\ell-2)$なるものとする。このとき、次の条件を満たすKが存在する。

(i) Kは$\mathbb{Q}$上の有限次Galois拡大体でそのGalois群$G(K/\mathbb{Q})$は$\mathfrak{S}_\ell$（ℓ次対称群）に同型である。更にKのすべての素因子について、その分解群はAbel群となる。

(ii) Kに含まれる（唯一の）2次体kで2は分岐する。

(iii) pはkで分岐する。

（証略）

条件(iii)を利用することにより、これより直ちに次の定理を得る。

定理1

ℓを5以上の素数とする。このとき次の条件を満たす$\mathbb{Q}$上のGalois拡大体の列$\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$が存在する。

(i) $G(K_n/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_\ell$で$K_n$のすべての素因子についてその分解群はAbel群となる（$n \geq 1$）。

(ii) 2はK_nに含まれる唯一の2次体で分岐する。

(iii) $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$は$\mathbb{Q}$上"独立"である、即ち

$$[K_1 \cdots K_m : \mathbb{Q}] = [K_1 : \mathbb{Q}] \cdots [K_m : \mathbb{Q}] \quad \forall m \geq 1$$

が成り立つ。

（証略）

さて、このようにして得られたK_nたちが$\mathbb{Q}_{ab}$上の不分岐拡大体を生成することは命題1によりわかるが、次に問題となるのは、それらがLに含まれないか、即ちL上自明でない不分岐拡大体を生成するかということである。それは次に述べるように実際肯定的である。即ち、$E_n = K_n L$（$n \geq 1$）とおくと

定理2

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$はA_l（l次交代群）をL上のGalois群とするような互いに相異なる体の列である。

証明は省略するが次のことを注意しておく。それはE_nがLに含まれないのはK_nについての条件(ii)が本質的である、ということである。即ち、K_nは$\mathbb{Q}_{ab}$と合成すれば2次体が$\mathbb{Q}_{ab}$に吸収されて$\mathbb{Q}_{ab}$上のGalois群はA_lとなるが、$\mathbb{Q}_{ab}^{tam}$と合成しても2次体は吸収されず$\mathbb{Q}_{ab}^{tam}$上のGalois群は$\mathfrak{S}_l$のままである。このことに留意すれば定理2は純体論的に証明される。

定理2を言い換えれば、非可換単純群A_lが$G(M/L)$の商群として無限通りの現われかたをするということである。又、特に、$G(M/L)$は位相群として有限生成でないということもわかる。

以上で得られた結果の説明を終るが、最後に定理1,2は、同様の方法を用いることによって、$l = 3, 4$の場合にも全く

同じ結果が成り立つことが証明されることを一言付け加えておく。

§.3 今後の展望など

今後の展望といってもあまりはっきりしたものはない。函数体の類似を狙って問題を設定してはみたものの、果たして $G(M/L)$ 或いは $G(M/\mathbb{Q}_{ab})$ などの群が比較的わかりやすい構造を持っているのかどうか、定かではない。しかしながら思いつくままに問題をあげるならば

- M/L の中間体をもっといろいろと構成することができるか. 欲を言えば、その構成法として方程式の分解体といった代数的な方法ではなく、幾何学的或いは解析的なところから生じるような例を見つけられないか.
- $G(M/L)$ 或いは $G(M/\mathbb{Q}_{ab})$ が何か“自然な”表現を持たないか.

などが考えられると思われる。その他にもいろいろと考えられるであろうが、いずれにせよ問題が発展することを期待する。

参考文献

[1] 藤崎源二郎　不分岐な Galois 拡大の例について 数学 9 (1957) 97

[2] Y. Yamamoto　On unramified Galois extensions of quadratic number fields　Osaka J. Math. 7 (1970) 57-76

尚、本文の内容は筆者の修士論文による。