

岩沢加群の類数公式

東工大・理 中里 肇

福田 隆

§0. Introduction

p を奇素数とする. k を \mathbb{Q} の有限次拡大とし, k_{∞} を k の cyclotomic \mathbb{Z}_p 拡大 k_{∞} とする. ここに k_{∞} は \mathbb{Q} 上の唯一の \mathbb{Z}_p 拡大である. $n \geq 0$ に対し, k_n を k_{∞}/k の中間体で k 上の次数が p^n であるものとし, $\Gamma_n = \text{Gal}(k_{\infty}/k_n)$ とおく. A_n を k_n の ideal 類群の p -Sylow 部分群とし, D_n を A_n の部分群で p 上の primes の積を含む類から成るものとする. $A'_n = A_n/D_n$ とおく (c.f. [6]).

k を CM 体とする. k_{∞} も CM 体である. j を k_{∞} の複素共役を表す. 任意の $\mathbb{Z}[\{i, j\}]$ -加群 M に対し,

$$M^- = \{a \in M \mid (1+j)a = 0\}$$

とおく.

(0.1) 定義. $A_{\infty}^- = \varinjlim A_n^-$, $A'_{\infty}^- = \varinjlim A'_n^-$ とおく.

Greenberg [3] 及び Ferrero-Greenberg [2] は k が絶対abel

体の時, $(A/\infty)^{\sqrt{h}}$ の位数は有限であることを証明した。我々は $[\mathbb{R}:\mathbb{Q}]$ が p と素である時, その位数を p 進 L 関数を用いて計算する。

以後 \mathbb{R}/\mathbb{Q} は有限次虚 abel 拡大で $[\mathbb{R}:\mathbb{Q}]$ は p と素であるとする。 $G = \text{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$, \hat{G} を指標群 $\text{Hom}(G, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ とする。ここで $\overline{\mathbb{Q}}_p$ は \mathbb{Q}_p の代数閉包である。類体論により, \hat{G} の元を \mathbb{R}/\mathbb{Q} の原始 Dirichlet 指標と見なす。 ω を $\text{mod } p$ の Teichmüller 指標とする。 $\phi \neq \omega$, $\phi(j) = -1$ である $\phi \in \hat{G}$ をとり, $L_p(s; \omega\phi^{-1})$ を $\omega\phi^{-1}$ に付随する p 進 L 関数とする。 p 進 L 関数の岩沢の構成法により, $k \in 1+p\mathbb{Z}_p$, $k \notin 1+p^2\mathbb{Z}_p$ に対し,

$$f(k^{s-1}; \omega\phi^{-1}) = L_p(s; \omega\phi^{-1})$$

となる巾級数 $f(T; \omega\phi^{-1}) \in \Lambda_\phi$ が存在する。ここで, $\mathbb{Z}_p[\phi] = \mathbb{Z}_p[\{\text{all values of } \phi\}]$, $\Lambda_\phi = \mathbb{Z}_p[\phi][[T]]$ である。

$$f(0; \omega\phi^{-1}) = L_p(0; \omega\phi^{-1}) = (1 - \phi^{-1}(p)) L(0; \phi^{-1})$$

であることに注意する。

(0.2) 定義. $\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}) \in \Lambda_\phi$ を

$$\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}) = \begin{cases} f(T; \omega\phi^{-1})/T & \text{if } \phi(p) = 1, \\ f(T; \omega\phi^{-1}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。

Ferrero - Greenberg [2] は $\hat{f}(0; \omega\phi^{-1}) \neq 0$ であることを証

明した。従って, $\hat{f}(s-1; \omega\phi^{-1}) \neq 0$ for all s with $s^{p^n} = 1$, $n \geq 0$ であり, $\Lambda_\phi / (\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}), \omega_n)$ の位数は有限である。ここで $\omega_n = (1+T)^{p^n} - 1$ である。

有限集合 A に対し, $\#A$ が A の濃度を表す。群 G の表現が \mathbb{Q}_p -既約であるとは, それが \mathbb{Q}_p 上定義され, \mathbb{Q}_p 上既約であることとする。 G の指標が \mathbb{Q}_p -既約とは, それが G の或る \mathbb{Q}_p -既約表現の指標であることとする。

(0.3) 定理. (1) \mathbb{R}/\mathbb{Q} は有限次 abel 拡大であり,

(2) \mathbb{R} は虚であり,

(3) $[\mathbb{R}:\mathbb{Q}]$ は p と素であると仮定する。

この時,

$$\#(A_\infty^-)^{\Gamma_n} = \# \bigoplus_{\mathfrak{P}} \Lambda_\phi / (\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}), \omega_n) \quad \text{for all } n \geq 0$$

が成立する。ここで, \mathfrak{P} は $G = \text{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ の \mathbb{Q}_p -既約指標で $\mathfrak{P} \neq \omega$, $\mathfrak{P}(j) \neq \mathfrak{P}(1)$ であるもの全体を動く, ϕ は \mathfrak{P} の $(-)$ の絶対既約成分である。

$a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$ に対し, $\text{ord}_p(a) = \text{ord}_p(b)$ の時 $a \sim_p b$ とかく。

$$\# \Lambda_\phi / (\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}), \omega_n) \sim \prod_P \prod_{\psi} \prod_{s^{p^n}=1} \hat{f}(s-1; \omega\phi^{-1})$$

であることを注意する。ここで, ψ は ϕ の \mathbb{Q}_p 上のすべての“共役”を動く。

(0.5) 注意. k の最大定部分体 k^+ と k の間で分解する P 上の primes が無い時は, 定理(0.3) の formula は k の解析的類数公式からの直接の結果である (c.f. [1]). しかし k/k^+ で分解する P 上の primes が存在する時は, $(A_{\mathfrak{p}}^-)^{\Gamma_n}$ は無限群となり, ある ϕ に対して $f(0; \omega\phi^i) = 0$ となる.

(0.6) 注意. 定理(0.3) を証明するには, Gauss 和と森田の P 進 Γ 関数の特殊値に関する Gross-Koblitz の formula 及び $L'_p(0; \chi)$ に関する Ferrero-Greenberg の formula を用いる.

(0.7) 注意. 仮定(3) は本質的ではない. 実際, 定理(2.1) を証明するためには, $[k: \mathbb{Q}]$ が P と素であると仮定する必要がある.

(0.8) 注意. Ferrero-Greenberg [2] は k が虚二次体で $n=0$ の時, 定理(0.3) を証明してゐる.

記号. 通常どおり $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ でそれぞれ, 有理整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体を表す. 素数 P に対し, $\mathbb{Z}_P, \mathbb{Q}_P$ でそれぞれ P 進整数環, P 進数体を表す. \mathbb{Q} 及び \mathbb{Q}_P の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_P$ を固定する. embeddings $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 及び $P: \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_P$ を固定する.

k/\mathbb{Q} を定理(0.3) のようにとる. $[k:\mathbb{Q}]$ は p と素だから, k の p 上の primes はすべて k_{∞} で完全分岐している. すべての $n \geq 0$ に対し $(A'_{\infty})^{\Gamma_n}$ は有限であり, $A'_n \rightarrow A'_m$ ($m \geq n \geq 0$) は injective であるから, 次の補題を得る.

(1.1) 補題. 任意の $n \geq 0$ に対し, $m_0 \geq 0$ が存在し

$$(A'_{\infty})^{\Gamma_n} = (A'_{m_0})^{\Gamma_n} \quad \text{for } m \geq m_0 \quad \text{となる.}$$

Z を k/\mathbb{Q} に關する p の分解群とする. $\phi \in \hat{G}$ に対し, $\text{Tr}\phi$ で ϕ を \rightarrow の絶対既約成分にも $\rightarrow G$ の \mathbb{Q}_p -既約指標を表し, $e(\text{Tr}\phi)$ で $\text{Tr}\phi$ に対する $\mathbb{Z}_p[G]$ の直交巾筈元を表す. A_n, D_n, A'_n は自然に $\mathbb{Z}_p[G]$ -加群と見なせる. k の p 上の primes はすべて k_n で完全分岐しているから, 次の補題を得る.

(1.2) 補題. もし制限 $\phi|Z$ が trivial でなければ, すべての $n \geq 0$ に対して $e(\text{Tr}\phi)D_n = 0$ となる.

(1.3) 補題(c.f.[3]). $m \geq n \geq 0$ に対して,

$$D_m^- / D_n^- \cong ((\mathbb{Z}_p / p^{m-n} \mathbb{Z}_p)[G/Z])^- \quad (\mathbb{Z}_p[G]\text{-加群として}).$$

(1.4) 補題. $m \geq n \geq 0$ に対して,

$$0 \rightarrow D_n^- \rightarrow A_n^- \xrightarrow{\alpha} (A_m^-)^{\Gamma_n} / D_m^- \rightarrow 0$$

は $\mathbb{Z}_p[G]$ -加群の完全系列である. ここで α は $A_n^- \rightarrow A_m^-$ から誘導される.

$m \geq n \geq 0$ に対し

$$M_n^{(m)} = \{ \alpha \in A_m^- \mid (s-1)\alpha \in D_m^- \}$$

とかく、 s は $\text{Gal}(k_m/k_n)$ の生成元である (c.f. [3]). 準同型 $\beta: M_n^{(m)} \rightarrow D_m^-$ を $\beta(a) = (s-1)a$ で定義すると、 $D_m^- \subset \text{Ker } \beta = (A_m^-)^{\Gamma_n}$ であり、 $\mathbb{Z}_p[G]$ -加群の完全系列

$$0 \rightarrow (A_m^-)^{\Gamma_n} / D_m^- \rightarrow M_n^{(m)} / D_m^- \rightarrow D_m^- \quad (1.5)$$

を得る。 $M_n^{(m)} / D_m^- = (A_m^-)^{\Gamma_n}$ だから、補題(1.4)より、 $\mathbb{Z}_p[G]$ -加群の完全系列

$$0 \rightarrow A_n^- \rightarrow (A_m^-)^{\Gamma_n} \rightarrow D_m^- \quad (1.6)$$

を得る。

§2. Reduction

定理(0.3) は次の定理(2.1) に帰着される (証明略)。

- (2.1) 定理. (1) k/\mathbb{Q} は有限次 abel 拡大であり、
 (2) k は虚であり、
 (3) P は k/\mathbb{Q} で完全分解して \parallel すると仮定すると、

$$\# (A_\infty^-)^{\Gamma_n} = \# \bigoplus_{\mathbb{Z}} \wedge_{\phi} / ((\hat{f}(T; \omega \phi^{-1}), \omega_n)) \quad \text{for } n \geq 0$$

が成立する。ここで \mathbb{Z} と ϕ は定理(0.3) と同様に動く。

定理(2.1) では $[k:\mathbb{Q}]$ が P と素であるという仮定は必要なく、 P が k/\mathbb{Q} で完全分解して \parallel することが本質的である。

§3. 虚 P -単数群

以後は定理(2.1)の仮定(1)~(3)をみたしてゐるとする。 $n \geq 0$ に対し H_n を k_n の P -単数群とする。すなわち

$$H_n = \{ \alpha \in k_n^\times \mid (\alpha) = k_n \text{ の } P \text{ 上の primes の積} \}$$

$N_{m,n}: k_m \rightarrow k_n$ ($m \geq n \geq 0$) を norm 写像とする。

(3.1) 定義. 準同型 $\varphi_n^{(m)}: M_n^{(m)} \rightarrow H_n^{1-j} / N_{m,n}(H_m^{1-j})$ を次の様に定義する (c.f. [3]). s を $\text{Gal}(k_m/k_n)$ の生成元とする。

$c \in M_n^{(m)}$, $\sigma \in C$ とすると, 或る $\alpha \in k_m^\times$ 及 u P 上の primes の積である k_m の ideal \mathfrak{a} が存在して, $\sigma^{1-s} = (\alpha)\mathfrak{a}$ となる。

この時, $\varphi_n^{(m)}(c) = N_{m,n}(\alpha^{1-j}) \bmod N_{m,n}(H_m^{1-j})$ と定義する。

これは well-defined である (c.f. [3]), 次の補題を得る。

(3.2) 補題 ([3]). (1) $\text{Ker } \varphi_n^{(m)} = (A_m^-)^{\Gamma_n}$

(2) $\text{Im } \varphi_n^{(m)} = (H_n^{1-j} \cap N_{m,n}(k_m^\times)^{1-j}) / N_{m,n}(H_m^{1-j})$

(3.3) 系. $0 \rightarrow A_n^- \rightarrow (A_m^-)^{\Gamma_n} \rightarrow \text{Im } \varphi_n^{(m)} \rightarrow 0$

は $\mathbb{Z}_p[G]$ -加群の完全系列である。

§4. P 進 regulators

この節では H_0^{1-j} の或る部分群に対して P 進 regulator を定義する。右は定理(2.1)の仮定(1)~(3)をみたしてゐるとする。 E_n を k_n の単数群, $P_n = \{(\alpha) \mid \alpha \in H_n\}$ とする。完全系列 $0 \rightarrow E_n \rightarrow H_n \rightarrow P_n \rightarrow 0$ から完全系列 $0 \rightarrow$

$E_n \cap H_n^{-j} \rightarrow H_n^{-j} \rightarrow P_n^{-j} \rightarrow 0$ を得る. $\mu(\mathbb{R}_n)$ で \mathbb{R}_n に含まれる 1 の中根全体を表す. $E_n \cap H_n^{-j} = \mu(\mathbb{R}_n) \cap H_n^{-j}$ である ($n=0$ として)

$$\mu(\mathbb{R})H_0^{-j}/\mu(\mathbb{R}) \simeq P_0^{-j} \quad (4.1)$$

を得る. P_0^{-j} は $\text{rank } \mathfrak{g} = [\mathbb{R}:\mathbb{Q}]/2$ の自由 \mathbb{Z} -加群であることに注意する. M を $\mu(\mathbb{R})H_0^{-j}$ の部分加群で $\mu(\mathbb{R})M/\mu(\mathbb{R})$ の rank が g であるとして仮定する. m_1, \dots, m_g を $\mu(\mathbb{R})M$ の元で $m_1 \bmod \mu(\mathbb{R}), \dots, m_g \bmod \mu(\mathbb{R})$ が $\mu(\mathbb{R})M/\mu(\mathbb{R})$ の \mathbb{Z} -基底であるものとする. s_1, \dots, s_g を $G/\{1, j\}$ の代表系とする. $\log_p: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{Q}_p$ を $\log_p p = 0, \log_p j = 0$ ($j^{p-1} = 1$) で正規化された p 進 logarithm とする (c.f. [5]). 定理 (2.1) の仮定 (3) より $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}_p$ である. ただし $P: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ は前に固定した embedding である.

(4.2) 定義. M の p 進 regulator $R_p(M)$ を

$$R_p(M) = \det \begin{pmatrix} \log_p P(s_1 m_1), \dots, \log_p P(s_1 m_g) \\ \vdots \\ \log_p P(s_g m_1), \dots, \log_p P(s_g m_g) \end{pmatrix}_{\text{up to } \pm 1}$$

で定義する. これは (s_1, \dots, s_g) 及び (m_1, \dots, m_g) の選り方はよらない.

(4.3) 補題. $M_1 \subset M_2$ を $\mu(\mathbb{R})H_0^{-j}$ の部分加群で $R_p(M_1) \neq 0$ とする. この時, $R_p(M_2) \neq 0$ である

$$R_p(M_1)/R_p(M_2) = (M_1 \mathfrak{r}) M_2 : M_1 \mathfrak{r} \text{ up to } \pm 1.$$

§5. Gauss 和

この節では [4] で定義された Gauss 和を扱う。長は定理 (2.1) の仮定 (1)~(3) を満たしているとする。\$N\$ は \$\mathfrak{r}/\mathbb{Q}\$ の conductor とする。\$\mathfrak{r}\$ は \$\mathfrak{r}/\mathbb{Q}\$ で完全分解しているので、\$N\$ は \$\mathfrak{r}\$ と素である。\$K = \mathbb{Q}(\mu_N)\$, \$G_N = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})\$, \$H = \text{Gal}(K/\mathfrak{r})\$, \$D = K/\mathbb{Q}\$ に属する \$\mathfrak{r}\$ の分解群とする。\$\mu_N\$ は \$\mathbb{Q}\$ に含まれる 1 の \$N\$ 乗根全体である。\$(t, N) = 1\$ である \$t \in \mathbb{Z}\$ に対して \$s_t \in G_N\$ を \$s_t(\zeta) = \zeta^t\$ (\$\forall \zeta \in \mu_N\$) で定義する。すると \$D = \langle s_{\mathfrak{r}} \rangle\$ である。\$v\$ を \$\mathfrak{r}: \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_{\mathfrak{r}}\$ に対応する \$\mathbb{Q}\$ の place とする。\$\mathfrak{r}_N\$ (resp. \$\mathfrak{r}_N\$) は \$v\$ を \$\mathfrak{r}\$ (resp. \$K\$) に制限して得られる \$\mathfrak{r}\$ (resp. \$K\$) の prime とする。

(5.1) 定義.
$$\mathcal{A}_N = \frac{1}{N} \mathbb{Z} / \mathbb{Z} - \{0 \bmod \mathbb{Z}\},$$

$$\mathcal{A}_N = \text{Map}(\mathcal{A}_N, \mathbb{Z}) \text{ とおく.}$$

\$a = (t/N \bmod \mathbb{Z}) \in \mathcal{A}_N\$ に対して, \$\delta_{t/N} = \delta_a \in \mathcal{A}_N\$ を \$\delta_a(a) = 1\$, \$\delta_a(b) = 0\$ (\$\forall b \in \mathcal{A}_N, b \neq a\$) で定義する。\$G_N\$ の \$\mathcal{A}_N\$ 及び \$\mathcal{A}_N\$ の作用は次で与えられる。

$$s_t(t'/N \bmod \mathbb{Z}) = tt'/N \bmod \mathbb{Z} \text{ for } s_t \in G_N, t'/N \bmod \mathbb{Z} \in \mathcal{A}_N,$$

$$(s_t \alpha)(a) = \alpha(s_t^{-1} a) \text{ for } s_t \in G_N, \alpha \in \mathcal{A}_N, a \in \mathcal{A}_N.$$

Gauss 和 \$g(\alpha, \mathfrak{r}_N, \mathbb{F} \circ \text{Tr}) = g(\alpha, \mathfrak{r}_N)\$ を [4] の (1.3) 及び (1.4)

の様に定義する.

(5.2) Note. $\alpha \in N\mathcal{A}_N$ の時 $g(\alpha, \mathfrak{f}_N)$ は K^D に含まれ, G_N の作用は次のようになる.

$$g(\alpha, \mathfrak{f}_N)^s = g(s\alpha, \mathfrak{f}_N) \quad \text{for } s \in G_N.$$

$x \in \mathbb{R}$ に対し, $\langle x \rangle$ を $0 \leq \langle x \rangle < 1$, $x - \langle x \rangle \in \mathbb{Z}$ なる実数を表す. $a = (t/N \bmod \mathbb{Z}) \in \mathcal{A}_N$ に対し, $\langle a \rangle = \langle t/N \rangle$ とおき, $\alpha \in \mathcal{A}_N$ に対し, $n(\alpha) = \sum_{a \in \mathcal{A}_N} \alpha(a) \langle a \rangle$ とおく.

Γ_p を森田の p 進 Γ 関数とする. [4] と同様に $\Gamma_p: \mathcal{A}_N \rightarrow \mathbb{Z}_p$ を次のように定義する.

$$\Gamma_p(\alpha) = \prod_{a \in \mathcal{A}_N} \Gamma_p(\langle a \rangle)^{\alpha(a)} \quad \text{for } \alpha \in \mathcal{A}_N.$$

次の定理は Gross と Koblitz [4] によ, て証明された.

(5.3) 定理. $n(\alpha) \in \mathbb{Z}$ ならば

$$P(g(\alpha, \mathfrak{f}_N)) = (-p)^{n\left(\sum_{s \in D} s\alpha\right)} \Gamma_p\left(\sum_{s \in D} s\alpha\right) \quad \text{in } \mathbb{Q}_p.$$

(5.4) 系. $\alpha \in N\mathcal{A}_N$ ならば

$$\log_p P(g(\alpha, \mathfrak{f}_N)) = \sum_{s \in D} \log_p \Gamma_p(s\alpha).$$

$X^- = \{\phi \in \widehat{G} \mid \phi(j) = -1\}$ とする. $M \in \mathbb{N}$ の約数とする. $X_M^- = \{\phi \in X^- \mid \text{conductor of } \phi = M\}$, $H_M = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_N)/\mathbb{Q}(\mu_M)) \subset G_N$ とおく. $2g = [k:\mathbb{Q}] = \#G = \#(G_N/H)$ とあることを思い出す.

G_N/H の代表系 $\{s_1, \dots, s_{2g}\}$ ($s_i \in G_N, 1 \leq i \leq 2g$) を \rightarrow 固定する。

$\phi \in X^-$ に対し

$$e(\phi) = \frac{1}{\#G} \sum_{s \in G} \phi(s^{-1})s \in \overline{\mathbb{Q}_p}[G],$$

$$\tilde{e}(\phi) = \frac{1}{\#G} \sum_{\lambda=1}^{2g} \phi((s_\lambda H)^{-1})s_\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_p}[G_N]$$

よおく. $\#G \sum_{\phi \in X_M^-} e(\phi) \in \mathbb{Z}[G], \#G \sum_{\phi \in X_M^-} \tilde{e}(\phi) \in \mathbb{Z}[G_N]$ である。

(5.5) 定義. \mathcal{A}_R を $\left\{ \#G \sum_{\phi \in X_M^-} e(\phi)N \delta_{1/M} \mid M|N \right\}$ で生成される $N\mathcal{A}_N$ の部分加群とする。

(5.6) 定義. $\alpha \in N\mathcal{A}_N$ に対応する \mathbb{R} の Gauss 和 $g_R(\alpha)$, 及び \mathbb{R} の Gauss 和の群 \mathcal{G}_R を

$$g_R(\alpha) = N_{K^D/\mathbb{R}}(g(\alpha, \mathcal{I}_N)),$$

$$\mathcal{G}_R = \{ g_R(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}_R \}$$

で定義する。

$\mathbb{Z}_p[G_N]$ 準同型 $S_R: N\mathcal{A}_N \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ を

$$S_R(\alpha) = \sum_{s \in G_N} n(s\alpha)(sH)^{-1} \text{ for } \alpha \in N\mathcal{A}_N$$

で定義すると, \mathbb{R} における Stickelberger relation が得られる。

(5.7) $\alpha \in N\mathcal{A}_N$ ならば $(g_R(\alpha)) = \mathfrak{p}^{S_R(\alpha)}$ in \mathbb{R} .

\mathbb{D}_n ($n \geq 0$) を \mathbb{P} 上の primes で生成される \mathbb{R}_n の ideal 群の部分群

とし, $\mathcal{G}_R = \{ (g_R(\alpha)) \mid \alpha \in \mathcal{A}_R \}$ とおく. (5.7) より \mathcal{G}_R は

\mathbb{D}_0 の $\mathbb{Z}[G]$ -部分加群である。

(5.8) 命題. $(D_0^{-1-j} : G_R^{-1-j}) = (2gN)^g \prod_{M|N} (\#H_M)^{\#X_M^-} \prod_{\phi \in X^-} L(0; \phi^{-1})$.

g_R の p 進 regulator は p 進 L 関数を用いて計算される.

(5.9) 定理. $R_p(g_R) = (4gN)^g \prod_{M|N} (\#H_M)^{\#X_M^-} \prod_{\phi \in X^-} L'_p(0; \omega \phi^{-1})$ up to ± 1 .

Ferrero & Greenberg [2] は次の定理を証明した.

(5.10) 定理. $M|N$, $\phi \in X_M^-$ とする. この時,

$$L'_p(0; \omega \phi^{-1}) = \sum_{s_t \in G_M} \phi^{-1}(s_t) \log_p \Gamma_p(s_t \delta_{1/M}).$$

(5.10) と (5.4) より

$$L'_p(0; \omega \phi^{-1}) = \frac{1}{N \#H_M} \sum_{s \in G} \phi^{-1}(s) \log_p \mathcal{P}(g_R(N \delta_{1/M})^s). \quad (5.11)$$

$g_{R,M} = g_R(N \delta_{1/M})$ とおく. $s_t \in G_N$ に対し, $s_t H = s$ とする

$$\log_p \mathcal{P}(g_R(N \#G \sum_{\psi \in X_M^-} \tilde{e}(\psi) s_t \delta_{1/M}))$$

$$= \log_p \mathcal{P}\left((g_{R,M}) \begin{pmatrix} \#G \sum_{\psi \in X_M^-} e(\psi) s \end{pmatrix} \right).$$

(5.12) Claim. $L|N$, $\phi \in X_L^-$ とする

$$\sum_{s \in G} \phi^{-1}(s) \log_p \mathcal{P}\left((g_{R,M}) \begin{pmatrix} \#G \sum_{\psi \in X_M^-} e(\psi) s \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{cases} \#G \sum_{s \in G} \phi^{-1}(s) \log_p P((g_{R,M})^s) & \psi L=M, \\ 0 & \psi L \neq M. \end{cases}$$

実際, $\log_p P(g_{R,M}^{-j}) \subset \mathbb{Q}_p$ であるから, $\overline{\mathbb{Q}_p}[G] \otimes \log_p P(g_{R,M}^{-j}) = \overline{\mathbb{Q}_p}[G] = \sum_{\phi} e(\phi) \overline{\mathbb{Q}_p}$ の中で計算する (よりによ),

$$\begin{aligned} & e(\phi) \sum_{s \in G} s^{-1} \log_p P \left((g_{R,M})^s \right)^{\#G \sum_{\psi \in X_M^-} e(\psi) s} \\ &= e(\phi) \#G \sum_{\psi \in X_M^-} e(\psi) \sum_{s \in G} s^{-1} \log_p P((g_{R,M})^s) \\ &= \begin{cases} e(\phi) \#G \sum_{s \in G} \phi^{-1}(s) \log_p P((g_{R,M})^s) & \psi L=M, \\ 0 & \psi L \neq M. \end{cases} \end{aligned}$$

定理(5.9)の証明

写像 $\text{Log}_p: H_0^{1-j} \rightarrow (1-j)\mathbb{Q}_p[G]$ を

$$\text{Log}_p(x) = (1-j) \sum_{s \in G/\{1,j\}} \log_p P(x^s) s^{-1} \quad \text{for } x \in H_0^{1-j}$$

で定義する. $\text{Log}_p(g_{R,M}^{-j}) \subset (1-j)\mathbb{Q}_p[G]$ であるから, $R_p(g_{R,M}^{-j})$ を

$$(1-j)\mathbb{Q}_p[G] \otimes \overline{\mathbb{Q}_p} = (1-j)\overline{\mathbb{Q}_p}[G] = \bigoplus_{\phi \in X^-} e(\phi) \overline{\mathbb{Q}_p} \quad \text{の中で計算する.}$$

$g_{R,M}^{-j}$ は

$$(g_{R,M}^{-j})^{\#G \sum_{\psi \in X_L^-} e(\psi)} \quad \text{for all } M|N, L|N$$

で生成されるので (5.12) より

$$\begin{aligned} \pm R_p(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{-j}) &= \prod_{\text{MIN}} \prod_{\phi \in X_M^-} 2^{\#G} \sum_{s \in G} \phi^{-1}(s) \log_p P((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, M})^s) \\ &= (2^{\#G})^{\#X^-} \prod_{\text{MIN}} \prod_{\phi \in X_M^-} N^{\#H_M} L'_p(0; \omega \phi^{-1}). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Ferrero と Greenberg [2] は $L'_p(0; \omega \phi^{-1}) \neq 0$ であることを証明した。これより $R_p(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{-j}) \neq 0$ であり, 従って補題(4.3)より

$$R_p(H_0^{-j}) \neq 0 \quad (\text{c.f. [3]}) \quad (5.13)$$

§6. 定理(2.1) の証明

この節では定理(2.1)を証明する。 $n \geq 0$ とする。 \mathfrak{P}_n を \mathbb{R}_n の単項 ideal 群とし, $P_n = \mathfrak{P}_n \cap \mathbb{D}_n$, $\mathcal{D}_n = \mathbb{D}_n / P_n$ とおく。すると

$$(\mathbb{D}_0^{-j} : P_0^{-j}) = \# \mathcal{D}_0^{-j} \quad (2\text{-factor を除いて}) \sim_p \# \mathbb{D}_0^{-j}$$

を得る。従って命題(5.8)と定理(5.9)より次を得る。

$$\pm \frac{R_p(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{-j})}{R_p(H_0^{-j})} = (P_0^{-j} : \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}^{-j}) = \frac{(\mathbb{D}_0^{-j} : \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}^{-j})}{(\mathbb{D}_0^{-j} : P_0^{-j})} \quad (2\text{-factor を除いて}) \quad (6.1)$$

(6.2) 補題。 $m \geq 0$ の時,

$$\#(H_0^{-j} / (H_0^{-j} \cap N_{m,0}(\mathbb{R}_m^{\times})^{-j})) \sim_p P^{(m+1)g} / R_p(H_0^{-j}).$$

(6.3) $n \geq 0$ 及 n 十分大きな $m \geq n$ に対して,

$$\mathbb{Z}_p \otimes (H_0^{-j} \cap N_{m,0}(\mathbb{R}_m^{\times})^{-j}) = \mathbb{Z}_p \otimes (N_{n,0}(H_n^{-j} \cap N_{m,n}(\mathbb{R}_m^{\times})^{-j})).$$

(6.4) $m \geq n \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{Z}_p \otimes H_0^{-d} : \mathbb{Z}_p \otimes (H_0^{-d} \cap N_{m,0}(\mathbb{Z}_m^{\times})^{-d})) \\
& \quad = (\mathbb{Z}_p \otimes P_0^{-d} : \mathbb{Z}_p \otimes (P_0^{-d} \cap N_{m,0}(\mathcal{F}_m^{-d}))), \\
& (\mathbb{Z}_p \otimes (H_n^{-d} \cap N_{m,n}(\mathbb{Z}_m^{\times})^{-d}) : \mathbb{Z}_p \otimes N_{m,n}(H_m^{-d})) \\
& \quad = (\mathbb{Z}_p \otimes (P_n^{-d} \cap N_{m,n}(\mathcal{F}_m^{-d})) : \mathbb{Z}_p \otimes N_{m,n}(P_m^{-d})).
\end{aligned}$$

$n \geq 0$ に対し, (6.3) を $m \geq n$ をとる. norm 写像

$N_{m,n} : D_m^{-d} \rightarrow D_n^{-d}$, $N_{n,0} : D_n^{-d} \rightarrow D_0^{-d}$ は bijective であるから, 次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
D_m^{-d} & \supset & P_m^{-d} \\
\downarrow N_{m,n} & & \downarrow \\
D_n^{-d} & \supset & P_n^{-d} \cap N_{m,n}(\mathcal{F}_m^{-d}) \supset N_{m,n}(P_m^{-d}) \\
\downarrow N_{n,0} & & \downarrow \\
D_0^{-d} & \supset & P_0^{-d} \supset P_0^{-d} \cap N_{m,0}(\mathcal{F}_m^{-d}) \supset N_{m,0}(P_m^{-d})
\end{array} \quad (6.5)$$

(6.5) より

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{Z}_p \otimes (P_n^{-d} \cap N_{m,n}(\mathcal{F}_m^{-d})) : \mathbb{Z}_p \otimes N_{m,n}(P_m^{-d})) \\
& \quad = \frac{(\mathbb{Z}_p \otimes D_m^{-d} : \mathbb{Z}_p \otimes P_m^{-d})}{(\mathbb{Z}_p \otimes D_0^{-d} : \mathbb{Z}_p \otimes P_0^{-d}) (\mathbb{Z}_p \otimes P_0^{-d} : \mathbb{Z}_p \otimes (P_0^{-d} \cap N_{m,0}(\mathcal{F}_m^{-d})))}.
\end{aligned}$$

従, 補題(3.2) と (6.4) より,

$$\# I_m \varphi_n^{(m)} = \frac{\#(D_m^-/D_0^-)}{(\mathbb{Z}_p \otimes H_0^{-d} : \mathbb{Z}_p \otimes (H_0^{-d} \cap N_{m,0}(\mathbb{Z}_m^{\times})^{-d}))}$$

となり, 更に補題(6.2) と補題(1.3) を用いると

$$\# I_m \varphi_n^{(m)} \sim_p P^{-g} R_P(H_0^{-d}) \quad (6.6)$$

が得られる。

$$L'_p(0; \omega\phi^{-1}) \sim_p P \hat{f}(0; \omega\phi^{-1}) \quad (6.7)$$

であることに注意する。

定理(2.1)の証明

与えられた n に対し, $(A_{\bar{0}}^-)^{\Gamma_n} = (A_m^-)^{\Gamma_n}$ となり, ϕ (6.3) が成立する $m \geq n$ をとる. (3.3), (6.1), (6.6), (6.7) 及 n

$$\#(A_n^- / A_0^-) \sim_p \prod_{\phi \in X^-} \prod_{\substack{\sum_{j \neq 1} p^j = 1}} \hat{f}(j-1; \omega\phi^{-1})$$

を用いて

$$\#(A_m^-)^{\Gamma_n} \sim_p \prod_{\phi \in X^-} \prod_{\sum p^j = 1} \hat{f}(j-1; \omega\phi^{-1})$$

を得る. Q.E.D.

§7. 例

1. $p=5$ とし, K を \mathbb{Q} 上の次数が 4 である $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/1949))$ の (唯一つの) 部分体とする. この時, 5 は K/\mathbb{Q} で完全分解し, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の虚 \mathbb{Q}_5 -既約指標は 2 つ存在する. $\#A_0^- = 5^3$, $D_0^- \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ であることは容易にわかり, 従って $\#A_0^- = 5$ である. $\hat{f}(T; \omega\phi^{-1})$ の係数を近似計算することにより,

$$\# \bigoplus_{\mathbb{F}} \Lambda_{\phi} / (\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}), \omega_0) = 5^3$$

が得られる。定理(0.3)を用いると $\#(A'_{\infty})^{\Gamma_0} = 5^3$ となる。
 従って $A'_0 \subseteq (A'_{\infty})^{\Gamma_0}$ である。更に $\#A'_1 = 5^9$, $\#D'_1 = 5^4$,
 $\#A'_1 = 5^5$ であることもわかる。 \mathbb{R} の λ_5 -invariant は 6 である。

2. $p=5$ とし, \mathbb{R} を \mathbb{Q} 上の次数が 4 である $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/2269))$
 の (唯一つの) 部分体とする。この場合は,

$$\bigoplus_{\mathbb{F}} \Lambda_{\phi} / (\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}), \omega_0) = \{0\}$$

であり, 定理(0.3)を用いると, $(A'_{\infty})^{\Gamma_0} = \{0\}$ となる。従って
 $A'_0 = (A'_{\infty})^{\Gamma_0} = \{0\}$ であり, $\#D'_0 = \#A'_0 = 5^3$ となる。 \mathbb{R} の
 λ_5 -invariant は 2 である。

文献

1. J. Coates, S. Lichtenbaum: On l -adic zeta functions. Ann. Math. 98, 498-550 (1973)
2. B. Ferrero, R. Greenberg: On the behavior of p -adic L -functions at $s=0$. Inv. Math. 50, 91-102 (1978)
3. R. Greenberg: On a certain l -adic representation. Inv. Math. 21, 117-124 (1973)

4. B. Gross, N. Koblitz : Gauss sums and the p -adic Γ -function.
Ann. Math. 109, 569-581 (1979)
5. K. Iwasawa : Lectures on p -adic L -functions . Ann. Math. Studies
74, Princeton University Press, 1972
6. K. Iwasawa : On \mathbb{Z}_p -extensions of algebraic number fields .
Ann. Math. 98, 246-326 (1973)