数理解析研究所講究録
441巻 1981年 122-128

Quantifier "aa" を持つ system ST の完全性定理

神大 教養部　角田 譲

Quantifier "aa" を持つ集合論 ZF^{aa} の基礎となる体系の自然な形の完全性定理が Keisler の $\mathcal{L}(Q)$ の体系の完全性定理の証明と同様な方法で得られることを示すのが本稿の目的である

$\mathcal{L}$ を equality を持つ first-order language とする. $\mathcal{L}^{aa}$ を $\mathcal{L}$ に新しい quantifier "aa" を付け加えて得られる language とする. $\mathcal{L}^{aa}$ の formulas は通常と同様にして定義されるが, 次の項が新しく付け加わる: φ を $\mathcal{L}^{aa}$ の formula とすると $(aax)\varphi$ もまた $\mathcal{L}^{aa}$ の formula である.

$\mathcal{L}^{aa}$ の structure とは, $\mathcal{L}$ の structure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ の universe A の部分集合よりなる集合 $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F}\subseteq P(A)$ の pair $(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ を意味するとする.

$(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ が $\mathcal{L}^{aa}$ の structure, $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ を $\mathcal{L}^{aa}$ の formula とするとき, $(\mathfrak{A}, \mathcal{F})\models\varphi[a_1,\dots,a_n]$ $(a_1,\dots,a_n\in A)$ を, 通

常の様に、φ の complexity に関する induction で定義するが、"aa" に関する new clause は次の通りである

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

$$\text{iff} \quad \{a \in A ;\ (\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \models \psi[a, a_1, \dots, a_n]\} \in \mathcal{F}$$

，但し $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ は、$(aax)\psi(x, x_1, \dots, x_n)$ なる formula とする。

$\mathcal{L}^{aa}$ の logical axioms を次に述べるが、これらは全て、$(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ で valid な formulas の schemes である。

A0. $\mathcal{L}^{aa}$ の formulas の schemes で、通常の first-order logic の axioms、但し、equality axioms を含む。

A1. $(aax)\varphi(x, \dots) \longleftrightarrow (aay)\varphi(y, \dots)$，但し、$y$ は、$\varphi(x, \dots)$ に現われなく、$\varphi(y, \dots)$ は、x の free occurrence を全て y で置換したもの。

A2. $(\forall x)(\varphi \longleftrightarrow \psi) \to ((aax)\varphi \leftrightarrow (aax)\psi)$.

$\mathcal{L}^{aa}$ の the rules of inference については、$\mathcal{L}$ と同様とする。すなわち modus ponens と $\forall$-generalization である。

通常の用法に従い、$\vdash \varphi$ は、φ が $\mathcal{L}^{aa}$ で provable である事を意味する。Σ を $\mathcal{L}^{aa}$ の sentences の集合であるとき、$\Sigma \vdash \varphi$ で、φ が Σ から deducible である事を意味するものとする。

次に述べる Lemmas は、通常の first-order model theory の直接的な一般化である。（証明については、Keisler [ ] を

参照されたし。）

Lemma 1. $(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ を $\mathcal{L}^{aa}$ の structure とする。$\vdash\varphi$ であれば、$(\mathfrak{A}, \mathcal{F})\models\varphi$ である。$\Sigma\vdash\varphi$ で、$(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ が Σ の model であれば、$(\mathfrak{A}, \mathcal{F})\models\varphi$ である。

Lemma 2. Σ を $\mathcal{L}^{aa}$ の sentences の集合とするとき、Σ が無矛盾であることと、Σ が model を持つこととは同値である。

Lemma 3. $\mathcal{L}^{aa}$ において、無矛盾な theory T は、高々濃度が $\|\mathcal{L}\|$ の model を持つ。

Lemma 4. $\mathcal{L}$ を可算 Language とする。T を $\mathcal{L}^{aa}$ の consistent theory、$\Sigma_n(x)$ $(n<\omega)$ を $\mathcal{L}^{aa}$ の x を唯一つの free variable として持つ formulas の集合とする。もし、T が、各 Σ_n を locally omit とするとき、T は、各 Σ_n を omit とする countable model を持つ。

これより、$\mathcal{L}$ には、binary predicate symbol $\in$ が含まれているものとする。

Definition 5. ST は、language $\mathcal{L}^{aa}$ の上で formulate されたもので、その non-logical axioms は次のものである。

FL 1. $(\forall x)(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow((aax)\varphi\rightarrow(aax)\psi)$

FL 2. $(aax)\varphi\wedge(aax)\psi\rightarrow(aax)(\varphi\wedge\psi)$

FL 3. $\neg(aax)(x\neq x)$

ST 1. $(\forall x)(aay)(x\in y)$, $(\forall x)(aay)(x\subseteq y)$

ST2 $\quad (\forall x)(aa\, y)\varphi \to (aa\, y)(\forall x \in y)\varphi$.

次に我々は、STの標準modelを定義することにしよう。
κを今 regular uncountable cardinal とする。Aを集合とする。$\{s : \bar{\bar{s}} < \kappa,\ s \subseteq A\}$ を $P_\kappa(A)$ で示すことにする。

$P_\kappa(A)$ の部分集合 K が closed unbounded であるとは、次の事が成立する事をいう

(i) $\forall s \in P_\kappa(A)\ \exists t \in K\ (s \subseteq t)$,

(ii) $\langle s_\xi : \xi < \zeta \rangle$ を $(\forall \xi < \zeta)(s_\xi \in K)$, $(\forall \eta, \xi)(\eta < \xi < \zeta \to s_\eta \subseteq s_\xi)$, $\zeta < \kappa$ なる sequence とするとき、$\bigcup_{\xi<\zeta} s_\xi \in K$ となる。

$\mathcal{F}_{\kappa,A} = \{X \subseteq P_\kappa(A) ;\ X$ は $P_\kappa(A)$ の cub set K を含む$\}$
とする。次の lemma は well-known である。

Lemma 5. (1) $\mathcal{F}_{\kappa,A}$ は κ-complete filter である。

(2) $\mathcal{F}_{\kappa,A}$ は normal である。即ち、$X_a \in \mathcal{F}_{\kappa,A}$ $(\forall a \in A)$ であるとき、the diagonal intersection $\{s \mid (\forall a \in s)(s \in X_a)\} \in \mathcal{F}_{\kappa,A}$ となる。

(3) $\bar{\bar{A}} < \kappa$ のとき、$\mathcal{F}_{\kappa,A}$ は $\{X \mid A \in X\}$ となる。

(4) $\bar{\bar{A}} \geq \kappa$ のとき、$\mathcal{F}_{\kappa,A}$ は non-principal で ~~no~~ ultrafilter でない。

Definition 6. A を non-empty set, E を A の上の binary relation とするとき, (A, E) が, κ-regular とは次の事を満足している事をいう.

(1) $(\forall \xi \in A)((a_E)^= < \kappa)$,

(2) $\{a_E : a \in D\}$ が, $P_\kappa(A)$ の closed unbounded subset となる A の subset D が存在する. 但し, $a_E = \{b \in A : bEa\}$.

以下, (A, E) を κ-regular, (A, E) を extensional とする. 即ち, $(A, E) \models$ "the axiom of extensionality".

Definition 7. $Cub_{E,\kappa}$ を次の様に定義する.

$Cub_{E,\kappa} = \{X \subseteq A ; \hat{K} \subseteq X, K は P_\kappa(A) の cub subset\}$.

但し, $\hat{K} = \{a \in A ; a_E \in K\}$.

Lemma 5 に依り次の Lemma 8 が得られる.

Lemma 8. (1) $Cub_{E,\kappa}$ は, κ-complete filter となる.

(2) $Cub_{E,\kappa}$ は E-normal となる. 即ち, $(\forall a \in A)(X_a \in Cub_{E,\kappa})$ となるとき, $\{b \in A \mid \forall a (aEb \to b \in X_a)\} \in Cub_{E,\kappa}$.

(3) $\bar{\bar{A}} < \kappa$ のとき, $Cub_{E,\kappa} = \{X \subseteq A \mid \{a \in A ; a_E = A\} \subseteq X\}$.

$\mathfrak{A} = \langle A; E, \dots \rangle$ を $\mathcal{L}$ の structure で、$\langle A; E \rangle$ を κ-regular extensional とする。$\langle \mathfrak{A}, \mathrm{Cub}_{E,\kappa} \rangle$ は明らかに、ST の model となる。$\mathfrak{A} \models_\kappa \varphi$ と書く時、それは $\langle \mathfrak{A}, \mathrm{Cub}_{E,\kappa} \rangle \models \varphi$ を意味するものと以下する。Σ を $\mathcal{L}^{aa}$ の sentences の集合とするとき、$\mathfrak{A}_\kappa \models \Sigma$ であれば、$\mathfrak{A}$ を Σ の κ-standard model ということにする。

THEOREM（ST の完全性定理）. $\mathcal{L}$ を countable language とする。Σ を $\mathcal{L}^{aa}$ の sentences の集合とする。Σ が ST と Axiom of extensionality に対して無矛盾であれば、Σ は ω_1-standard model を持つ。

上の Theorem を証明するに際して、指導的な役割を演ずるのは次の main lemma である。

Main Lemma. $\mathcal{L}$ を countable language とする。$(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ を ST の countable model, $\varphi(x)$ を $\mathcal{L}^{aa}(\mathfrak{A})$ の formula で $(\mathfrak{A}^*, \mathcal{F}) \models (\mathrm{stat}\, x)\varphi(x)$ なるものとする。そのとき、$\mathcal{L}^{aa}$ の countable model $(\mathfrak{B}, \mathcal{G})$ と $b \in B$ で次の事を満足するものが存在する。

i) $(\mathfrak{B}, \mathcal{G})$ は $(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ の end elementary extention,

ii) $(\mathfrak{B}^*, \mathcal{G}) \models \varphi[b]$.

iii) $(\mathfrak{A}^*, \mathcal{F}) \models (aay)\psi(y)$ を満足するいかなる formula $\psi(y)$ of $\mathcal{L}^{aa}(\mathfrak{A})$ に対しても, $(\mathfrak{A}^*, \mathcal{F}) \models \psi[b]$.

iv) $A = \{a \in B : a F b\}$

但し、ここで $(\mathrm{stat}\, x)\varphi$ とは $\neg(aax)\neg\varphi$ を意味する.