数理解析研究所講究録
441巻 1981年 116-121

Complete Heyting Algebra の Separation Axioms

筑波大 数学系　江田勝哉

Complete Heyting Algebra (cHa) H による universe V の拡張 $V^{(H)}$ の中の cHa についての研究は Fourman - Scott, Takeuti 等によってなされている。ここでは主に V から $V^{(H)}$ へのうめ込みに関連して作られる Ha の completion についての結果を述べ、その記述のために必要な基礎概念に関係した、Ha の Separation axioms (位相空間の性質から導入したもの) についても言及する。

定義1. L が bounded distributive lattice (BDL) とは、L が distributive lattice で最大元 $\mathbb{1}$ と最小元 $\mathbb{0}$ をもつこと。

A が Heyting algebra (Ha) とは A が BDL で $a \Rightarrow b$ がすべての a, b について存在すること。但し、$(a \Rightarrow b) \wedge a \leq b$ で $\forall x\,(a \wedge x \leq b \rightarrow x \leq a \Rightarrow b)$ が成立する。A が complete Heyting algebra (cHa) とは A が Ha で lattice として complete なこと。又 Boolean algebra を Ba, complete Boolean algebra を cBa と書く。 //

定義2. L, L'をBDLとするとき. $\varphi : L \longrightarrow L'$が $\mathbb{0},\mathbb{1}$-morphismであるとは. φが$\mathbb{0},\mathbb{1},\vee,\wedge$を保つ関数であること。//

<BDL's, $\mathbb{0}$-$\mathbb{1}$-morphisms> は equational category であるから co-product をもつ。 BDL's $L_\alpha\ (\alpha\in\Lambda)$ についてそれを $\bigotimes_{\alpha\in\Lambda} L_\alpha$ とする。

定理1. $L_\alpha\ (\alpha\in\Lambda)$ が Ha ならば $\bigotimes_{\alpha\in\Lambda} L_\alpha$ は Ha。
$L_\alpha\ (\alpha\in\Lambda)$ が Ba ならば $\bigotimes_{\alpha\in\Lambda} L_\alpha$ も Ba。//

$L_\alpha\ (\alpha\in\Lambda)$ が Ba の場合は、Boolean Algebra のカテゴリーでの co-product と一致している事は知られている。

定義3. A が Ha のとき $\overline{A}$ が A の canonical completion とはある injective な $\mathbb{0},\mathbb{1}$-morphism $i : A \to \overline{A}$ が存在して.

$\forall a \in \overline{A}\ (a = \bigvee\{i(x);\ i(x) \leq a\ \&\ x \in A\})$

$\forall X \subseteq A\ \forall a \in A\ (a = \bigvee X \longrightarrow i(a) = \bigvee i''X)$ であること。//

次の Funayama の定理は直観主義論理の中での証明ができる。直観主義論理の中で証明できるものは. $V^{(H)}$ の中で成立する。

定理2.(Funayama) A が Ha のとき canonical completion $\overline{A}$ は一意的に存在する。//

定理1によって、B, B' が Ba なら $\overline{B\otimes B'}$ は cBa であることはすぐわかる。 ところで. 位相空間 X の開集合全体のなす

cHaをopen algebraと呼び，$\mathcal{O}(X)$とかく。Open algebra についてはの次の事が成立する。

定理3．$\mathcal{O}(X\times Y)$ は $\overline{\mathcal{O}(X)\otimes\mathcal{O}(Y)}$ と同型。//

この事実に関連して，Ha の separation axiom を考察するわけであるが，それは Heyting extension に関連した事柄の後に述べる。

Heyting valued model $V^{(H)}$を Boolean extension と同様に定義し，$[\![\ =\ ]\!]^{(H)}=1\!\!1$ で割ったものとする。そして，Boolean extension と同じように，$\check{x}=\{\langle 1\!\!1\ \check{y}\rangle ; y\in x\}$，$\hat{x}=\{y ; [\![y\in x]\!]=1\!\!1\}$ とする。

定理4．HがcHa，ΩがHaとするとき$V^{(H)}$に関して，$\hat{\check{\Omega}}$は，$\overline{R(H)\otimes\Omega}$ と同型である。但し，$R(H)$はHの regular な元全体のなすcBa。//

系（Kunen−Scott）　B，CをcBaとするとき$V^{(B)}$に関して，$\hat{\check{C}}$ は $\overline{B\otimes C}$と同型である。//

BDL Lの ideal の全体$\mathcal{I}L$ はcHaとなるが，この idealの全体をとる操作は，canonical completion とは異なるが一つの completion である。これに関して次のことが成立する。

定理5．L，L′をBDLとし，$H=\mathcal{I}L$とする。$V^{(H)}$に関して，$\widehat{\mathcal{I}\check{L'}}$は，$\mathcal{I}(L\otimes L')$及び $\overline{H\otimes\mathcal{I}L'}$ と同型である。//

位相空間Xについて，$\check{X}$に$\mathcal{O}(\check{X})$によって位相を入れて考ん

その開集合の全体を$\mathcal{O}(\check{X})$で表わす。これは$V^{(H)}$の中での$\check{\mathcal{O}(X)}$の一つのcompletionと考えられるが、これについて次が成立する。

定理6. $\widehat{\mathcal{O}(\check{X})}$は$\overline{H \otimes \mathcal{O}(X)}$と同型である。//

系. $H=\mathcal{O}(T)$ならば、$\widehat{\mathcal{O}(\check{X})}$は$\mathcal{O}(T \times X)$と同型である。//

ところで、よく研究されている位相空間X, Tに対するX_Tについて$\widehat{\mathcal{O}(X_T)}$が$\mathcal{O}(T \times X)$に同型であることが知られている。Fourman-Scottの内化の定理によって次が成立する。

定理7. $H=\mathcal{O}(T)$のとき、$[\![\mathcal{O}(X_T)$と$\mathcal{O}(\check{X})$が同型$]\!] = \mathbb{1}$。//

実数全体をR、$V^{(H)}$での実数全体を$R^{(H)}$とすれば、$H=\mathcal{O}(T)$のとき、$[\![R^{(H)} = R_T]\!] = \mathbb{1}$であるから、定理7により、$[\![\mathcal{O}(R^{(H)})$と$\mathcal{O}(\check{R})$は同型$]\!] = \mathbb{1}$。しかし、cBa Bについて、$[\![R^{(B)} \neq \check{R}]\!] = \mathbb{1}$であれば$[\![\mathcal{O}(R^{(B)})$と$\mathcal{O}(\check{R})$は同型でない$]\!] = \mathbb{1}$である。定理7は、open algebraとcBaが$\mathcal{O}(\check{R})$について、対照的な性質をもっていることを示している。

又、定理5のHについての条件は少し強すぎるようにも思えるが、cBa Bに対しては、同様の議論により、成立しないことがわかる。

次にHa A, A'のco-productとcanonical completionについて、cHaの<cHa, cH-morph.>のcategoryでのco-product

との比較をしてみる。cHa A, A' について、この意味のco-productを $A \amalg A'$ で表わす。これについては、Dowker, Strauss, Isbell Simmons 等の研究がある。今、B を atomless な cBa とすると $B \amalg B$ は Ba でない。又、一般には、$\mathcal{O}(X) \amalg \mathcal{O}(Y)$ と $\mathcal{O}(X \times Y)$ は同型ではない。よって $A \amalg A'$ と $\overline{A \otimes A'}$ は一般に同型でない。

彼等は、位相空間の性質を cHa に導入し、種々の研究をしている。ここでは、それを $A \otimes A'$ 及び $\overline{A}$ に適用した結果を述べる。種々の性質を lattice の性質に書き換える必要があるが、それは参考文献 [1], [2], [6], [7] 参照の事。

	$\to -$	$- \to$	$\to \otimes$	$\otimes \to$
i) normal	×		○	○
ii) Boolean generated	○	×	○	○
iii) regular	○	○	○	○
iv) fit		○		○
v) fit*		○	○	○
vi) S_2'	○	○	○	×
vii) T (T_1', conjunctive)	○	○	○	○
viii) cover regular	○	○		○
ix) compact	○	○	○	○
x) paracompact	○		×	

前頁の表は、Aが性質Pを満たすとき、$\overline{A}$もPを満たせば、→ーのところに○がついており、反例があるときは×がついている。ー→，→⊗，⊗→も同様に解釈する。但し、A⊗A'はAが元を一つしかもたない場合、元が1つのcHaとなるため、A, A'が二つ以上の元をもつHaに限って考える。

表の中で○も×も書いていないところは、まだわかっていないところであるが、とくにpara-compactnessの部分は、興味深い問題である。

参考文献

[1] Dowker-Strauss : Separation axioms for frames
In Topics in Topology (Hungary) 1972

[2] Dowker-Strauss : Sums in the category of frames
Houston J. of M. Vol. 3 No. 1 1977

[3] Fourman-Scott : Sheaves and logic
In L. N. of M. Vol. 753 Springer 1979

[4] Grayson : Heyting-valued model for intuitionistic set theory. In L. N. of. M. Vol. 753 Springer

[5] Funayama : Imbedding p. o. sets into. i. d. c. lattice. 1956

[6] Isbell : Atomless parts of spaces. Math. Scad. 31 1972

[7] Simmons : A Frame work for Topology : In Logic Coll. '77
North-Holland P. c. 1978