数理解析研究所講究録
441巻 1981年 83-92

Feferman集合論の超準化とConservation Theorem

鹿児島大 理 河合 徹

箱根シンポジウム('80年3月)において, nonstandard analysisを展開することができ, その集合論的基礎付けとなっているnonstandard set theory NSTを提示した([1]).

一方category theoryではclassやclassの集まりを扱う必要があり, そのためのいろいろな方法が提起されている. ここではそれらの中からFefermanのsystem([2])をとり, これをNSTに基づいて超準化する. Nonstandard methodsはcategory theoryにも応用され始めたので, classやその集まりを含むnonstandard set theoryを与えることを試みるわけである.

なお数理研の研究集会で発表したものに置換公理と正則性公理の代り(下記の公理4)を付け加えて強化した形で公理系を述べる.

§1. Feferman の set theory ZFC/$\mathfrak{m}$ 注

ZFC に constant symbol $\mathfrak{m}$ を付け加える.

ZFC/$\mathfrak{m}$ の公理は次の (1)〜(5) である.

(1) ZFC の公理.

(2) $\exists x\,[x \in \mathfrak{m}]$.

(3) $\forall x\,\forall y\,[x \in y \wedge y \in \mathfrak{m}. \rightarrow x \in \mathfrak{m}]$.

(4) $\forall x\,\forall y\,[x \subset y \wedge y \in \mathfrak{m}. \rightarrow x \in \mathfrak{m}]$.

(5) Free variable $x_1, \cdots, x_n$ をもつ ZFC の formula Φ に対して

$\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{m}\,[\Phi^{\mathfrak{m}}(x_1, \cdots, x_n) \equiv \Phi(x_1, \cdots, x_n)]$.

ここで $\Phi^{\mathfrak{m}}$ は Φ の $\mathfrak{m}$ への relativization である.

$a \in \mathfrak{m}$ は a が small set であることを意味する.

ZFC/$\mathfrak{m}$ は ZFC の conservative extension である. ([2] p.212).

§2. Theory NST/M

NST/M の nonlogical symbol は, predicate $\in$ (membership relation) と constant S, I, M である. これらはそれぞれ次のことを意味する.

注. Feferman は[2] で ZFC/$\mathfrak{S}$ と書いているが, ここでは S を別の記号として使用するので, 混乱を避けるために ZFC/$\mathfrak{m}$ と書くことにする.

$A \in S$ …… A は standard.

$A \in I$ …… A は internal.

$A \in M$ …… A は small set.

この節では ZFC/m の variable は小文字, NST/M の variable は大文字で表わすことにする.

Φ は ZFC/m の formula とする. Φ の variable を NST の variable または S, I の元を動く variable に置き換え, m を M に置き換えてできる NST/M の formula をそれぞれ $^E\Phi$, $^S\Phi$, $^I\Phi$ で表わす.

NST/M の公理は次の公理1から公理9までである.

公理1. $M \in S$.

公理2. Φ が ZFC/m の公理ならば $^S\Phi$ は NST/M の公理である.

公理3. Φ が正則性公理以外の ZFC の公理ならば $^E\Phi$ は NST/M の公理である.

公理4. $\forall A\,[A \neq 0 \wedge A \cap I = 0. \rightarrow \exists X \in A\,[X \cap A = 0]]$.

公理5. $S \subset I$.

公理6. $\forall A\,\forall B\,[A \in B \wedge B \in I. \rightarrow A \in I]$.

公理7. Transfer principle.

Free variable $x_1, \cdots, x_n$ をもつ ZFC/m の formula $\Phi(x_1, \cdots x_n)$ に対して

$$\forall X_1, \cdots X_n \in S\,[\,^S\Phi(X_1, \cdots X_n) \equiv {}^I\Phi(X_1, \cdots, X_n)].$$

公理8. Axiom of standardization.

$$\forall A\,[\exists T \in S\,[A \cap S \subset T] \to \exists B \in S\ \forall x \in S\,[x \in A \equiv x \in B]].$$

定義 K is finite $\equiv \exists A$ (standard natural number) $\exists F\,[F: A \to K,\ 1{:}1,\ \text{onto}]$.

定義 D has S-size $\equiv \exists F\,[F: S \to D,\ \text{onto}]$.

公理9. Axiom schema of saturation.

Free variable $a, b, x_1, \cdots, x_n$ をもつ ZFC/m の formula $\Phi(a, b, x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$$\forall D\,(D \text{ has } S\text{-size})\ \forall x_1, \cdots, x_n \in I$$
$$\left[\begin{array}{l} \forall K \in I\,[K \text{ is finite} \wedge K \subset D. \to \exists B \in I\ \forall A \in K\ {}^{I}\Phi(A, B, x_1, \cdots, x_n)] \\ \to \exists B \in I\ \forall A \in D \cap I\ {}^{I}\Phi(A, B, x_1, \cdots, x_n) \end{array}\right].$$

§3. conservation theorem

${}^{S}\Phi$ が NST/M の定理ならば Φ は ZFC/m の定理である.

とくに ZFC が無矛盾ならば ZFC/m も, したがって NST/M も無矛盾である.

この conservation theorem は NST/M の応用の根拠となるものである.

以下に conservation theorem の証明を与える.

NST/M の中で公理2から5の ${}^{S}\Phi_1, \cdots, {}^{S}\Phi_l$ および公理1, 公理3〜9によって ${}^{S}\Phi$ が証明されたと仮定し, 以下 ZFC/m において Φ を証明する.

ZFC/$\mathfrak{m}$における reflection principle によって次のような集合Rが存在する．すなわち

$$\mathfrak{m} \in R,$$

$$\forall X\, \forall Y\, [X \in Y \wedge Y \in R. \rightarrow X \in R],$$

$$\forall X\, \forall Y\, [X \subset Y \wedge Y \in R. \rightarrow X \in R],$$

$$(\Phi \equiv \Phi^R) \wedge \Phi_1^R \wedge \cdots \wedge \Phi_l^R.$$

JはRのすべての有限部分集合の集合とし

$$t(j) = \{ i \in J \mid j \subset i \} \qquad (j \in J)$$

とおく．$\{t(j) \mid j \in J\}$ は finite intersection property をもつから $\{t(j) \mid j \in J\} \subset \mathfrak{F}$ となるJ上の ultrafilter $\mathfrak{F}$ が存在する．[注]

λ は $cf(\lambda) > |R|$ なる limit ordinal とする．例えば $\lambda = 2^{|R|}$ とすれば十分である．ここで $|R|$ はRの cardinal である．

$\overline{W}_0 = R$　$\varepsilon_0 = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in R \wedge a \in b\}$，$\mathfrak{m}^0 = \mathfrak{m}$ とおき structure $\mathfrak{W}_0 = [\overline{W}_0, \varepsilon_0, \mathfrak{m}^0]$ を定義する．次に $\mu \le \lambda$ なる μ に対して structure $\mathfrak{W}_\mu = [\overline{W}_\mu, \varepsilon_\mu, \mathfrak{m}^\mu]$ と $\nu \le \mu \le \lambda$ なる ν, μ に対して injection $k_\nu^\mu : \overline{W}_\nu \rightarrow \overline{W}_\mu$ を超限帰納法で定義する．$\nu < \mu$ なる ν に対して $\mathfrak{W}_\nu$ と $\{k_\rho^\nu\}_{\rho \le \nu}$ が定義されたとする．

注 この$\mathfrak{F}$はA. Robinsonに基づいて釜江哲朗氏が enlargement を構成するために考えたものである．ここではその上の ultralimit により saturated model を構成するが，この方法は adequate ultralimit によるよりも簡単である．

successor ordinal $\mu=\nu+1$ に対して

$\mathfrak{W}_{\nu+1}$ は $\mathfrak{W}_\nu$ の $\mathfrak{F}$ 上の ultrapower,

$k_\nu^{\nu+1}: \overline{W}_\nu \to \overline{W}_{\nu+1}$ は canonical embedding,

$\rho<\nu$ なる ρ に対して $k_\rho^{\nu+1} = k_\nu^{\nu+1}\circ k_\rho^\nu$,

$k_{\nu+1}^{\nu+1}: \overline{W}_{\nu+1}\to\overline{W}_{\nu+1}$ は恒等写像

と定義する.

μ が limit ordinal のとき $\langle\{\overline{W}_\nu\}_{\nu<\mu}, \{k_\rho^\nu\}_{\rho\le\nu<\mu}\rangle$ の direct limit を $\langle \overline{W}_\mu, \{k_\nu^\mu\}_{\nu<\mu}\rangle$ とする.

$$\begin{tikzcd} \overline{W}_\rho \arrow[r, "k_\rho^\nu"] \arrow[dr, "k_\rho^\mu"'] & \overline{W}_\nu \arrow[d, "k_\nu^\mu"] \\ & \overline{W}_\mu \end{tikzcd}$$

また k_μ^μ は $\overline{W}_\mu$ 上の恒等写像,

$m^\mu = k_\nu^\mu(m^\nu)$ $(\nu<\mu)$ とする. $\overline{W}_\mu$ 上の2項関係 E_μ は

$\langle x,y\rangle\in E_\mu$ iff $\exists\nu<\mu\ \exists a,b\in\overline{W}_\nu[x=k_\nu^\mu(a)\wedge y=k_\nu^\mu(b)\wedge\langle a,b\rangle\in E_\nu]$

によって定義する. 以上で $\{\mathfrak{W}_\mu\}_{\mu\le\lambda}$ と $\{k_\nu^\mu\}_{\nu\le\mu\le\lambda}$ が定義され, $\nu\le\mu\le\lambda$ ならば k_ν^μ は $\mathfrak{W}_\nu$ から $\mathfrak{W}_\mu$ への elementary embedding である.

$\overline{V}_0 = \overline{W}_\lambda$, $e_0=E_\lambda$, $m_0=m^\lambda$ とおき, $\mathfrak{V}_0$ は structure $[\overline{V}_0, e_0, m_0]$ すなわち $\mathfrak{W}_\lambda$ とする. R は transitive だから $\mathfrak{W}_0$ で extensionality が成り立ち, k_0^λ は $\mathfrak{W}_0$ から $\mathfrak{V}_0$ への elementary embedding だから $\mathfrak{V}_0$ において extensionality が成り立つ.

すべての ordinal α に対して structure $\mathfrak{V}_\alpha=[\overline{V}_\alpha, e_\alpha, m_\alpha]$ と $\beta\le\alpha$ なるすべての ordinal の組 α,β に対して injection $p_\beta^\alpha:\overline{V}_\beta\to\overline{V}_\alpha$ を次のように定義する. $\beta<\alpha$ なる β に対して $\mathfrak{V}_\beta$ と $\{p_\gamma^\beta\}_{\gamma\le\beta}$ が定義されたと仮定する.

α が successor ordinal, $\alpha = \beta+1$ のとき

$\bar{V}_{\beta+1} = P(\bar{V}_\beta)$ (power set),

$p^{\beta+1}_{\beta+1} : \bar{V}_{\beta+1} \to \bar{V}_{\beta+1}$ は恒等写像,

$p^{\beta+1}_{\beta}(a) = \{ b \in \bar{V}_\beta \mid \langle b, a \rangle \in e_\beta \}$ $(a \in \bar{V}_\beta)$,

$\gamma < \beta$ なる γ に対して $p^{\beta+1}_{\gamma} = p^{\beta+1}_{\beta} \circ p^{\beta}_{\gamma}$,

$e_{\beta+1} = \{ \langle a, b \rangle \in \bar{V}_{\beta+1} \times \bar{V}_{\beta+1} \mid \exists c \in \bar{V}_\beta\, [a = p^{\beta+1}_{\beta}(c) \wedge c \in b] \}$,

$m_{\beta+1} = p^{\beta+1}_{\beta}(m_\beta)$

と定義する.

α が limit のとき $\langle \{\bar{V}_\beta\}_{\beta<\alpha}, \{p^{\beta}_{\gamma}\}_{\gamma \le \beta < \alpha} \rangle$ の direct limit を $\langle \bar{V}_\alpha, \{p^{\alpha}_{\beta}\}_{\beta<\alpha} \rangle$ と定義する. また $p^{\alpha}_{\alpha} : \bar{V}_\alpha \to \bar{V}_\alpha$ は恒等写像, $m_\alpha = p^{\alpha}_{\beta}(m_\beta)$ $(\beta < \alpha)$ とする. $\bar{V}_\alpha$ 上の2項関係 e_α を

$\langle x, y \rangle \in e_\alpha$ iff $\exists \beta < \alpha\ \exists a, b \in \bar{V}_\beta\, [x = p^{\alpha}_{\beta}(a) \wedge y = p^{\alpha}_{\beta}(b) \wedge \langle a, b \rangle \in e_\beta]$

で定義する.

以上のように超限帰納法によって $\{\bar{V}_\alpha\}_\alpha$ と $\{p^{\alpha}_{\beta}\}_{\beta \le \alpha}$ が定義され各 v_α は extensionality を満たし

$\beta \le \alpha$, $a, b \in \bar{V}_\beta$ に対して $\langle p^{\alpha}_{\beta}(a), p^{\alpha}_{\beta}(b) \rangle \in e_\alpha \equiv \langle a, b \rangle \in e_\beta$

となる.

$\langle \{\bar{V}_\alpha\}_\alpha, \{p^{\alpha}_{\beta}\}_{\beta \le \alpha} \rangle$ の direct limit を $\langle \bar{U}, \{g_\alpha\}_\alpha \rangle$ とする ($\bar{U}$ は class).
$u_\alpha = [U_\alpha, E_\alpha, M]$ を injection g_α によって $v_\alpha = [\bar{V}_\alpha, e_\alpha, m_\alpha]$ に対応する structure とし, $E = \bigcup_\alpha E_\alpha$ とおくと E は $\bar{U}$ 上の2項関係 (class) である.

$\mu \leqq \lambda$ なる μ に対して $h_\mu = g_0 \circ k_\mu^\lambda$ とおき $\mathfrak{U}^\mu = [\mathfrak{V}^\mu, E^\mu, M^\mu]$ は h_μ によって W_μ に対応する structure とする。このとき W_μ は $\mathfrak{U}^\mu$ に isomorphic である。

$$
\begin{tikzcd}
R = \overline{W}_0 \arrow[r] \arrow[drrrr, "k_0^\lambda"'] & \cdots \arrow[r] & \overline{W}_\mu \arrow[r] \arrow[drr, "k_\mu^\lambda"] \arrow[ddrrrrr, bend right, "h_\mu"'] & \cdots \arrow[r] & \overline{W}_\lambda \arrow[d, equal] & & & \\
& & & & \overline{V}_0 \arrow[r] \arrow[drrr, "g_0"'] & \cdots \arrow[r] & \overline{V}_\alpha \arrow[r] \arrow[dr, "g_\alpha"] & \cdots \\
& & & & & & & \overline{V}
\end{tikzcd}
$$

$$\mathfrak{V}^0 \subset \cdots \subset \mathfrak{V}^\mu \subset \cdots \subset \mathfrak{V}^\lambda = \mathfrak{V}_0 \subset \cdots \cdots \subset \mathfrak{V}_\alpha \subset \cdots \subset \mathfrak{V}$$

$S = g_1(k_0^\lambda[R])$, $I = g_1(\overline{V}_0)$, $M = h_0(m)$, $\mathfrak{U} = [\mathfrak{V}, E, S, I, M]$ によって structure $\mathfrak{U}$ を定義する。

NST の formula を structure $\mathfrak{U}$ によって解釈し、$\mathfrak{U}$ において ${}^S\Phi_1, \cdots, {}^S\Phi_\ell$, 公理1, 公理3〜9 が成り立つことを確かめる。

$X \in \mathfrak{V}$ に対して $\langle X, S\rangle \in E$ と $X \in \mathfrak{V}^0$ は同値だから $\Phi_1^R, \cdots, \Phi_\ell^R$ から $\mathfrak{U} \models {}^S\Phi_1, \cdots, \mathfrak{U} \models {}^S\Phi_\ell$ が得られる。

$A \in \mathfrak{V}$, $B \in \mathfrak{V}_{\alpha+1}$ とすれば

$$\langle A, B\rangle \in E \quad \text{iff} \quad A \in \mathfrak{V}_\alpha \wedge g_\alpha^{-1}(A) \in g_{\alpha+1}^{-1}(B).$$

これから $\mathfrak{U}$ が公理3〜6を満たすことが証明される。

公理1は $m \in R$ から、公理7は $\mathfrak{U}_0$ が $\mathfrak{U}^0$ の elementary extension であることから、公理8は R の元の部分集合は R の元であることからすべて $\mathfrak{U}$ で成り立つことがわかる。

最後に公理9を確かめる。$D \subset \mathfrak{V}_0$, $F : \mathfrak{V}^0 \to D$ (onto), $x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{V}_0$ と仮定する。

$|D| \leq |\mathfrak{D}^q| = |R| < cf(\lambda)$, $D \subset \mathfrak{D}_0 = \bigcup_{\tau<\lambda} \mathfrak{D}^\tau$ だから

$$\tau < \lambda,\ D \subset \mathfrak{D}^\tau,\ x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{D}^\tau$$

なる ordinal τ が取れる. $j \in J$ とすると $j = \{r_1, \cdots, r_k\} \subset R$,

$$\mathfrak{U}^\lambda \models (\exists b)[\Phi[F(h_0(r_1)), b, x_1, \cdots, x_n]] \wedge \cdots \wedge \Phi[F(h_0(r_k)), b, x_1, \cdots, x_n]].$$

$\mathfrak{U}^\lambda$ は $\mathfrak{U}^\tau$ の elementary extension で

$$F(h_0(r_1)), \cdots, F(h_0(r_k)), x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{D}^\tau$$

だから同じことが $\mathfrak{U}^\tau$ で成り立つ. したがって $b \in \mathfrak{D}_\tau^J$ が存在して

$$j \in J,\ r \in j \text{ ならば } \mathfrak{U}^\tau \models \Phi[F(h_0(r)), h_\tau(b(j)), x_1, \cdots, x_n].$$

$A \in D$ とする. $A = F(h_0(r))$ なる $r \in R$ をとると

$$t(\{r\}) \subset \{j \in J \mid \mathfrak{U}^\tau \models \Phi[F(h_0(r)), h_\tau(b(j)), x_1, \cdots, x_n]\}.$$

左辺は ultrafilter $\mathfrak{F}$ に属すから右辺も $\mathfrak{F}$ に属し, Łoś の定理によって $\mathfrak{U}^{\tau+1} \models \Phi[A, h_{\tau+1}(b/\mathfrak{F}), x_1, \cdots, x_n]$.

ゆえに $\mathfrak{U}^\lambda$ すなわち $\mathfrak{U}_0$ において同じことが成り立ち, 公理 9 が確かめられた.

以上のように $\mathfrak{U}$ において ${}^S\Phi_1, \cdots, {}^S\Phi_\ell$, 公理 1, 公理 3〜9 が成り立つから $\mathfrak{U} \models {}^S\Phi$. したがって Φ^R. これから Φ が得られる. これは ZFC/m における Φ の証明を与え, conservation theorem が証明された.

文献

[1] Kawai, T. ; Axiom systems of nonstandard set theory, to appear.

[2] Feferman, S. ; Set-theoretical foundations of category theory (with an appendix by G. Kreisel), Reports of the Midwest Category Seminar III, Lecture Notes in Math. 106, Springer 1969, pp. 201 - 247.