数理解析研究所講究録
441巻 1981年 27-42

S. Shelah の結果について

金井 康雄

1 序

G. Cantor は $2^{\aleph_0}$ の濃度がどれくらいなのか最初に考えた集合論の創始者である。この問題ー連続体問題ーに関して彼が得た結果は $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ だけであるが，このことより $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ を主張する連続体仮説（C.H.）を提起した。

1905年，J. König は前述の Cantor の結果を導く定理を得た。

<u>定理1</u>　$\{k_i\}_{i\in I}$ と $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ を二つの同じ集合によって添数づけられた基数からなる集合とする。このとき，任意の $i\in I$ に対し，$k_i < \lambda_i$ が成立すれば，

$$\Sigma_{i\in I} k_i < \Pi_{i\in I} \lambda_i$$ が成り立つ。

<u>系1</u>　任意の順序数 α, β に対し，$\aleph_\beta < cf.(\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta})$ が成立する。

<u>系2</u>　任意の無限基数 k に対し，$k < k^{cf.(k)}$ が成立する。

1930年のK. Gödel の結果―不完全性定理―は連続体仮説に少なからず影響を与え，この仮説が成立するかどうか通常の集合論の公理から決定できないのではないかという疑いが生じ始めた。

この疑いは次の二つの定理によって真実となった。

定理2（K. Gödel） 公理体系ZFが無矛盾ならば，公理体系 ZF + G.C.H. も無矛盾である。

定理3（P. Cohen） 公理体系ZFが無矛盾ならば，公理体系 ZF + ¬ C.H. あるいは ZFC + $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ も無矛盾である。

系 公理体系 ZF が無矛盾ならば，連続体仮説は公理体系 ZFC において非決定である。

P. Cohen の結果が得られて間もなく，R. M. Solovay は次のことを示した。

定理4 公理体系 ZF が無矛盾ならば，公理体系 ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ も無矛盾である。ここで，α は $cf.(\aleph_\alpha) > \aleph_0$ を満たす任意の順序数である。

さらに，W. B. Easton は上の結果を拡張して次の定理を得た。

定理5 公理体系 ZFC + G.C.H のもとで，F を次の条件を満たす，すべての正則基数にある基数を対応さす関数とす

る：

(a)　Fは非減少関数である；

(b)　すべての正則基数κに対し，$\kappa < cf.(F(\kappa))$が成り立つ。

この時，すべての正則基数κに対し$2^{\kappa} = F(\kappa)$が成立し，基数や共終性がすべて保存されるCohen拡大が存在する。

このEastonの方法では特異基数に対する連続体問題は扱えない(，しかし，彼のmodelにおいて，特異基数κに対するべき集合$\mathcal{P}(\kappa)$の濃度は，正則基数のそれらによって完全に決定される）ので，この後，この問題は‘特異基数問題’と呼ばれるようになった。

Eastonの結果が出て間もなく，BukovskyとHechlerは互いに独立して次のことを証明した。

<u>定理6</u>　κを特異基数，$\nu < \kappa$をすべての$\nu \leq \lambda \leq \kappa$を満たす基数$\lambda$に対し$2^{\lambda} = 2^{\nu}$が成立するような基数とするとき，$2^{\kappa} = 2^{\nu}$が成り立つ。

そして，最近，J. Silverは次の驚嘆すべて事実を提示した。

<u>定理7</u>　任意のω_1より小さい順序数αに対して$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$が成立すれば，$2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$が成り立つ。

このSilverの結果はF. GalvinとA. Hajnalによって，

次のように一般化された。

<u>定理8</u>　κとλを次のような非可算正則基数とする，即ち，すべての基数$\mu<\lambda$に対し，$\mu^{\kappa}<\lambda$が成り立つ。

さらに，$\langle \kappa_\alpha : \alpha<\kappa \rangle$を基数の列で すべての順序数$\alpha<\kappa$に対し，$\prod_{\beta<\alpha}\kappa_\beta<\aleph_\lambda$が成立しているものとする。このとき，$\prod_{\alpha<\kappa}\kappa_\alpha<\aleph_\lambda$ が成り立つ。

<u>系1</u>　ξを $cf.(\xi)>\aleph_0$ なる順序数とし，任意の順序数$\alpha<\xi$ 及び任意の基数 $\lambda<cf.(\xi)$ に対し，$\aleph_\alpha^{\lambda}<\aleph_{(|\xi|^{cf.(\xi)})^+}$ が成立しているならば，$\aleph_\xi^{cf.(\xi)}<\aleph_{(|\xi|^{cf.(\xi)})^+}$ が成り立つ。

<u>系2</u>　ξを $cf.(\xi)>\aleph_0$ なる順序数とし，任意の順序数$\alpha<\xi$ に対し $2^{\aleph_\alpha}<\aleph_{(|\xi|^{cf.(\xi)})^+}$ が成立しているならば，$2^{\aleph_\xi}<\aleph_{(|\xi|^{cf.(\xi)})^+}$ が成り立つ。

強極限基数$\aleph_\alpha$ のべき集合の濃度 $2^{\aleph_\alpha}$ の取り得る限度に関して，S. Shelah は次の三つの問題を設定した。

(α)　$cf.(\alpha)=\aleph_0$ なる時，何か結果を得ることが出来るか。

(β)　$\|\bar{\alpha}\|_{D(st)}$ あるいは $2^{\aleph_\alpha}$ の取り得る限度をより制限することが出来るか。

(γ)　$\alpha=\aleph_\alpha$ かつ $cf.(\alpha)=\aleph_1$ を満たす最小のαに対して何か証明することが出来るか。

ここで，$D(st)$ は the filter of closed unbounded sets

を表し，$f \in {}^{cf.(\alpha)}\mathrm{Ord}$ に対し，$\|f\|_{D(st)}$ は f の $D(st)$ による rank，即ち，任意の $g <_{D(st)} f$ なる g に対し，$\|g\|_{D(st)} < \beta$ なる最小の β，を表す。また，$\bar{\alpha}$ は値が α だけである $cf.(\alpha)$ 上の定関数を表す．

上記問題のうち，(β) に対して，彼自身次の結果を得ている。： もし $|\alpha| = \beth_\omega$ ならば $\|\bar{\alpha}\|_{D(st)} < (\beth_\omega)^+$ である。

また，ごく最近，Shelah は問題 (α) に対してある結果を得た。この結果の紹介がこの報告の主たる内容であり，続く section で述べられる事柄である。

R. Jensen は次に述べる概念の重要性を最初に指摘した set theorist である．

今，M と N を $M \subseteq N$ なる二つの ZFC の inner model とする。このとき，次の事柄が満たされれば，M に関して N は covering property を持つといわれる。その事柄とは，M は N における definable class である。また，‘X は順序数からなる非可算集合である’ということが model N で成立すれば，M の要素で，$X \subseteq Y$ を満たしかつ N で‘X と Y は同じ濃度をもつ’ということを成り立たせる Y が存在するということである。

次の定理は，この性質と特異基数問題とが如何に関連しているかを物語っている。

定理9　NをZFCのinner model，Mを$M \subseteq N$なるZFC+G.C.Hのinner modelとし，かつNはMに関してcovering propertyを持つとする。このとき次のことがmodel Nにおいて成り立つ。即ち，κが特異基数ならば，κのべき集合$\mathcal{P}(\kappa)$の濃度は，$\lambda \geq \sup.\{2^{|\alpha|} : \alpha < \kappa\}$かつ$\mathrm{cf.}(\lambda) > \kappa$を満たす最小の基数$\lambda$である。

このように，あるZFC+G.C.Hのinner modelに関して，universe Vがcovering propertyを持てば，特異基数問題が解決されるということが理解される。

以上，特異基数問題についての歴史をsketchしたが，次に述べるS. Shelahの結果の位置付けに役立てば幸いと思う。

2. S. Shelahの定理と証明

S. Shelahが最近得た結果とは，次に言う定理である。

定理10　$\aleph_\omega$が強極限基数ならば，$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$である。

以下，この定理の証明のsketchを試みるが，その前に記号法及び基本的概念の説明をすることにする。

(1) ${}^{\omega}\mathrm{Ord}$でもってω上の順序数値関数全体からなるclassを表す。

(2) Dをω上の非単項超filterとする。このとき，$\equiv_D$でもって次のような${}^{\omega}\mathrm{Ord}$上の同値関係を表す：

$f, g \in {}^{\omega}\mathrm{Ord}$に対し，

$f \equiv_D g$ iff $\{n<\omega : f(n)=g(n)\} \in D$.

また，$\leq_D$でもって次のような${}^{\omega}\mathrm{Ord}$上の二項関係を表す：

$f, g \in {}^{\omega}\mathrm{Ord}$に対し，

$f \leq_D g$ iff $\{n<\omega : f(n) \leq g(n)\} \in D$.

そして，$f <_D g$は次の事柄の略記と考える：

$f \leq_D g$ and $f \not\equiv_D g$.

このとき，次のことが成立する。

① $f \equiv_D g$ ならば $f \leq_D g$；

② $f \leq_D g$ かつ $g \leq_D f$ ならば $f \equiv_D g$；

③ $f \leq_D g$ かつ $g \leq_D h$ ならば $f \leq_D h$.

各$f \in {}^{\omega}\mathrm{Ord}$に対し，

$[f]_D = \{g \in {}^{\omega}\mathrm{Ord} : f \equiv_D g$ かつ $(\forall h \in {}^{\omega}\mathrm{Ord})$
$(h \equiv_D f$ ならば $\mathrm{rank}(g) \leq \mathrm{rank}(h))\}$

とおく。そしてAを${}^{\omega}\mathrm{Ord}$の部分classあるいは部分集合とするとき，A/Dでclassあるいは集合である

$\{[f]_D : f \in A\}$ を表すことにする。

最後に，

④ $f \equiv_D g$ かつ $f \leq_D h$ ならば $g \leq_D h$； と

⑤　$f \equiv_D g$　かつ　$h \leq_D f$　ならば　$h \leq_D g$：

が成立するので，A/D 上の二項関係 $\leq^D$ を

$[f]_D \leq^D [g]_D$　iff　$f \leq_D g$　によって定義することが出来る。

(3)　A を ${}^\omega\mathrm{Ord}$ の部分集合とするとき，$\mathrm{cf.}(A/D)$ でもって次の条件を満たす最小の基数λを表す：

長さλのAにおける列 $\langle g_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ がとれて，

$(\forall f \in A)(\exists \alpha < \lambda)\ f <_D g_\alpha$　を満たしている。

(4)　Aの部分集合 $\mathcal{F}$ が　$(\forall g \in A)(\exists f \in \mathcal{F})(\forall n < \omega)\, g(n) \leq f(n)$ を満たせば，$\mathcal{F}$ は A の covering であると言われる。

(5)　$\mathfrak{M}$ でもって次のような構造 $\langle \aleph_\omega, \in, h \rangle$ を示す：

①　$h : \aleph_\omega \times \aleph_\omega \longrightarrow \aleph_\omega$；

②　$\omega \leq \alpha < \aleph_\omega$ なる任意の順序数αに対し，関数

$h^\alpha : \beta \longmapsto h(\alpha, \beta)$　は　$h^\alpha[|\alpha|] = \{h^\alpha(\beta) : \beta < |\alpha|\} = \alpha + 1$

を満たす。このような構造が存在するのは明らかである。

(6)　$\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{M}$ の任意の初等的部分構造とする。このとき，次の条件を $\mathfrak{A}$ が満たしたならば $\mathfrak{A}$ は good であると言うことにする。その条件とは；　$\mathfrak{A} = \langle A, \in, h_A \rangle$ とするとき，

①　$\omega \subseteq A$；

②　任意の $n < \omega$ に対し，$A \cap \aleph_{n+1}$ の順序型は，非可算な共終性をもつ極限順序数である。また，$A \cap \aleph_{n+1}$ は

$\chi_\alpha(n+1) = \sup.(A \cap \aleph_{n+1})$ における closed unbounded set を含む。 ここで，χ_α は α に依存した ω から $\aleph_\omega$ への関数で $\chi_\alpha(n) = \sup.(A \cap \aleph_n)$ ($n < \omega$) で定義されるものである。

(7) A を集合，λ を基数とするとき，次の二つの集合を定義する。

① $[A]^\lambda = \{B \subseteq A : |B| = \lambda\}$；

② $[A]^{<\lambda} = \{B \subseteq A : |B| < \lambda\}$.

さて証明にとりかかることにする。

先ず，次のことが証明される。

Claim 1 濃度が $\aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ 以下である $\prod_{n<\omega} \aleph_n$ の covering $\mathcal{F}$ が存在する。

Claim 1 の証明

$\omega^* = \{D \subseteq \mathcal{P}(\omega) : D$ は ω 上の非単項超 filter である$\}$ とおくと，各 $D \in \omega^*$ に対し，$\prod_{n<\omega} \aleph_n$ の部分集合 $\mathcal{A}_D = \{g_\alpha^D : \alpha < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}\}$ で $(\forall f \in \prod_{n<\omega} \aleph_n)(\exists \alpha < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+})$ $f <_D g_\alpha^D$ を満たすものがとれる。このことは次の命題（証明は省略する）より導かれる。

命題 1 $<_D$ に関して単調減少である長さ $(2^{\aleph_0})^+$ の列を ${}^\omega\mathrm{Ord}$ において見つけることは出来ない。

命題2　${}^{\omega}\mathrm{Ord}$における長さλが$2^{\aleph_0}$より大きく，$<_D$に関して単調増加である列$\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$に対して，集合$\{[f_\alpha]_D : \alpha < \lambda\}$は$\leq_D$に関して最小上界をもつ。

命題3　$\mathrm{cf.}(\prod_{n<\omega} \aleph_n / D) < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$.

ここで，Dはω上の任意の非単項超filterであるとする。

(例えば，命題1の証明には，Erdös-Radoの定理$(2^{\aleph_0})^+ \longrightarrow (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$より得られる，$(2^{\aleph_0})^+ \longrightarrow (\aleph_0)^2_{\aleph_0}$を用いる。

次に，$\mathcal{G} = \bigcup_{D \in \omega^*} \mathcal{A}_D$とおくと，$|\omega^*| \leq 2^{2^{\aleph_0}} < \aleph_\omega$より$|\mathcal{G}| \leq \aleph_\omega \cdot \aleph_{(2^{\aleph_0})^+} = \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$となる。

ここで，$\mathcal{F}$を次の性質をもつ$\prod_{n<\omega} \aleph_n$の部分集合で(包含関係に関して)最小のものとすると，$\mathcal{F}$が求めているcoveringとなる。その性質とは，

① $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$　かつ　$|\mathcal{F}| \leq \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$；

② $(\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{F}]^{<\aleph_0})\ \sup.\mathcal{A} \in \mathcal{F}$，ここで$\sup.\mathcal{A}$とは$(\sup.\mathcal{A})(n) = \sup.\{f(n) : f \in \mathcal{A}\}\ (n<\omega)$で定義される$\prod_{n<\omega} \aleph_n$の要素である；

③ $(\forall f \in \mathcal{F})(\forall g \in \prod_{n<\omega} \aleph_n)(|\{n \in \omega : f(n) \neq g(n)\}| < \aleph_0$ならば$g \in \mathcal{F})$；

の3つである。

$\mathcal{F}$がcoveringであることを証明するために，gを$\prod_{n<\omega} \aleph_n$の任意の要素とし，ある$f \in \mathcal{F}$に対し，$(\forall n<\omega)\ g(n) \leq f(n)$と

なっていることを示す。

今，(*)… $(\exists h\in\mathcal{F})\,|\{n<\omega : h(n)<g(n)\}|<\aleph_0$ なる命題を考え，この命題を証明するために，否定をとって矛盾を導くことにする。(*) の否定は，

$(\forall h\in\mathcal{F})\,|A_h|=\aleph_0$ となる。ここで，

$A_h=\{n<\omega : h(n)<g(n)\}$ である。

ある異なる $\mathcal{F}$ の要素 h_1, h_2 に対し，$A_{h_1}\cap A_{h_2}\in[\omega]^{<\aleph_0}$ と仮定すると，明らかに $|A_{\sup.\{h_1,h_2\}}|\leq|A_{h_1}\cap A_{h_2}|<\aleph_0$ となり，$\mathcal{F}$ の性質② より $\sup.\{h_1,h_2\}\in\mathcal{F}$ となって (*) の否定に反する。従って，$(\forall h_1,h_2\in\mathcal{F})(h_1\neq h_2$ ならば $|A_{h_1}\cap A_{h_2}|=\aleph_0)$ が示されたこととなり，集合 $\mathfrak{X}=\{A_h : h\in\mathcal{F}\}$ は有限交叉性を持つことがわかる。また，$\mathcal{F}$ の性質③ より $\bigcap\mathfrak{X}=\phi$ である。D_0 を $\mathfrak{X}$ より生成された非単項filterを含む，非単項超filterであるとする。このとき，$\mathcal{A}_{D_0}$ の性質より，ある $\alpha<\aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ に対し $g<_{D_0}g^{D_0}_\alpha$ となる。しかし，一方 $g^{D_0}_\alpha\in\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ なので，$A_{g^{D_0}_\alpha}\in\mathfrak{X}\subseteq D_0$ となり，$g^{D_0}_\alpha<_{D_0}g$ が得られる。これは矛盾である。

従って，(*) が成立し，ある $h\in\mathcal{F}$ に対し $|A_h|<\aleph_0$ となっている。$\prod_{n<\omega}\aleph_n$ の要素 f を次のように定める；

$$f(n)=\begin{cases} h(n) & \text{if} \quad n\in\omega-A_h \\ g(n) & \text{if} \quad n\in A_h. \end{cases}$$

明らかに，$(\forall n<\omega)\ g(n)\le f(n)$ が成立し，

$|\{n<\omega : h(n)\ne f(n)\}|<\aleph_0$。だから $f\in\mathcal{F}_1$ となる．

以上で Claim1 の証明を完了した。□

Claim 1 で存在の保証された covering $\mathcal{F}_1$ の濃度を κ で表すと，各 $n<\omega$ に対し $\aleph_n$ は正則基数なので，

$$\aleph_\omega \le \kappa \le \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$$ が証明される。

そして，$\lambda=(2^{\aleph_0})^{++}$ とおくと，$\aleph_\omega$ の強極限性より，

$2^\lambda<\aleph_\omega\le\kappa<\lambda$，即ち，$2^\lambda<\kappa<\lambda$ が成立する。さらにこのとき，$[\mathcal{F}_1]^\lambda$ の部分集合 $\mathcal{G}$ で $|\mathcal{G}|=\kappa$ かつ $(\forall A\in[\mathcal{F}_1]^\lambda)(\exists B\in\mathcal{G})\ B\subseteq A$ を満たすものが存在する。

このことを一般的に証明しておく。

Claim 2　λ を任意の非可算正則基数，κ を $2^\lambda\le\kappa<\lambda$ を満たす基数とするとき，$[\kappa]^\lambda$ の部分集合 $\mathcal{G}$ で $|\mathcal{G}|=\kappa$ かつ $(\forall A\in[\kappa]^\lambda)(\exists B\in\mathcal{G})\ B\subseteq A$ を満たすものが存在する。

Claim 2 の証明

κ における超限帰納法によって証明する。

Case 1　$2^\lambda=\kappa$ のとき。

$\kappa^\lambda=(2^\lambda)^\lambda=2^\lambda=\kappa$ で $|[\kappa]^\lambda|=\kappa^\lambda=\kappa$ となるので $\mathcal{G}$ として $[\kappa]^\lambda$ 自身をとってくればよい。

Case 2　ある基数 $\nu<\kappa$ に対し，$2^\lambda<\kappa=\nu^+$ となるとき。

$2^\lambda \le \nu < \beth_\lambda$ が成立するので，帰納法の仮定より，$\nu \le \alpha < \kappa$ を満たす各順序数 α に対し，$[\alpha]^\lambda$ の部分集合 $\mathcal{G}_\alpha$ で $|\mathcal{G}_\alpha| = \nu$ かつ $(\forall A \in [\alpha]^\lambda)(\exists B \in \mathcal{G}_\alpha)\, B \subseteq A$ を満たすものが存在する。ここで，$\mathcal{G} = \bigcup_{\nu \le \alpha < \kappa} \mathcal{G}_\alpha$ とおくと，$\mathcal{G}$ が求められる $[\kappa]^\lambda$ の部分集合となる。（例えば，λ の正則性と $\lambda < \kappa$ であることより，$[\kappa]^\lambda = \bigcup_{\nu \le \alpha < \kappa} [\alpha]^\lambda$ となる。）

<u>Case 3</u>　κ が $2^\lambda < \kappa < \beth_\lambda$ を満たす極限基数であるとき。

$\kappa < \beth_\lambda$ より，ある極限順序数 $\alpha < \lambda$ に対し，$\kappa = \beth_\alpha$ となっている。今，$\nu = \mathrm{cf.}(\kappa)$ とおくと，$\nu = \mathrm{cf.}(\alpha) \le |\alpha| < \lambda$ となる。$\langle \kappa_\xi : \xi < \nu \rangle$ を κ において共終性をもった列で，$\kappa_0 = 0$，$2^\lambda \le \kappa_1$ を満たすものとする。各 $\xi < \nu$ に対し，$2^\lambda \le \kappa_{\xi+1} < \beth_\lambda$ で $|\kappa_{\xi+1}| < \kappa$ だから，帰納法の仮定を使って，$[[\![\kappa_\xi, \kappa_{\xi+1}]\!]]^\lambda$ の部分集合 $\mathcal{G}_\xi$ で $|\mathcal{G}_\xi| = |\kappa_{\xi+1}|$ かつ
$(\forall A \in [[\![\kappa_\xi, \kappa_{\xi+1}]\!]]^\lambda)(\exists B \in \mathcal{G}_\xi)\, B \subseteq A$ を満たすものが存在する。ここで各 $\xi < \nu$ に対して，$[\![\kappa_\xi, \kappa_{\xi+1}]\!]$ は集合 $\{\beta < \kappa : \kappa_\xi \le \beta \le \kappa_{\xi+1}\}$ を表しているものとする。

$\mathcal{G} = \bigcup_{\xi < \nu} \mathcal{G}_\xi$ とおくと，$\mathcal{G}$ が求める $[\kappa]^\lambda$ の部分集合の条件を満たすものとなっている。

以上で Claim 2 の証明を終る。$\square$

a を $[\aleph_\omega]^{\aleph_0}$ の任意の要素とする。

このとき，次のような超限列 $\langle\langle \mathfrak{M}^a_\alpha, f^a_\alpha\rangle : \alpha \in \mathrm{Ord}\rangle$ を作ることが出来る。

① $\mathfrak{M}^a_\alpha = \langle M^a_\alpha, \in, h^a_\alpha\rangle$ で $\mathfrak{M}^a_\alpha \prec \mathfrak{M}$，かつ $f^a_\alpha \in \mathcal{F}$；

② $a \cup \omega \subseteq M^a_\alpha$ かつ $|M^a_\alpha| \leq |\alpha| + \aleph_0$；

③ 各 $n<\omega$ に対し，$\chi_{\mathfrak{M}^a_\alpha}(n) < \aleph_n$ ならば $\chi_{\mathfrak{M}^a_\alpha}(n) < f^a_\alpha(n)$ である；

④ $M^a_\alpha \cup \{f^a_\alpha(n), \chi_{\mathfrak{M}^a_\alpha}(n)\}_{n<\omega} \subseteq M^a_{\alpha+1}$；

⑤ β が極限順序数ならば，列 $\langle \mathfrak{M}^a_\alpha : \alpha<\beta\rangle$ は初等鎖であって $\mathfrak{M}^a_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathfrak{M}^a_\alpha$ である。

今，$\mathfrak{M}^a = \mathfrak{M}^a_\lambda$ かつ $F^a = \{f^a_\alpha : \alpha<\lambda\}$ とおく。

列の作り方より，容易の次の事がらが証明される。

<u>命題4</u>　$(\forall n<\omega)(\aleph_n \leq \lambda$ ならば $\chi_{\mathfrak{M}^a}(n) = \aleph_n)$.

<u>命題5</u>　$(\forall n<\omega)(\lambda < \aleph_n$ ならば $\chi_{\mathfrak{M}^a}(n) < \aleph_n)$.

<u>命題6</u>　$\mathfrak{M}^a$ は good な $\mathfrak{M}$ の初等的部分構造である。

さらに，次のことが成立する。

<u>Claim 3</u>　$|\{M^a : a \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}\}| \leq \kappa$.　ここで，各 $a \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}$ に対し，$\mathfrak{M}^a = \langle M^a, \in, h^a\rangle$ である。

<u>Claim 3 の証明</u>

各 $a \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}$ に対し，$\lambda < \aleph_\omega$ なので，$|F^a| = \lambda$ となり F^a は $[\mathcal{F}]^\lambda$ の要素となる。従って，ある $\mathcal{G}$ の要素 A_a に対

し $A_a \subseteq F^a$ となる。今, $\mathcal{G} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ とし, $A_\alpha \subseteq F^a$ となる最小の順序数を $\alpha(a)$ で表すと, Claim 3 を証明するには, 各 $a, b \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}$ に対し,

$\alpha(a) = \alpha(b)$ ならば $M^a = M^b$ を証明すれば十分である。

そこで $\alpha(a) = \alpha(b)$ と仮定することにする。先ず次の命題が成立するということを注意する必要がある。

<u>命題7</u>　$\mathfrak{A} = \langle A, \in, h_A \rangle$ が $\mathfrak{M}$ の初等的構造で, A の部分集合 B が $A \cap \aleph_{n+1}$ において共終性をもてば,

$$A \cap \aleph_{n+1} = Cl_h(B \cup (A \cap \aleph_n)) \cap \aleph_{n+1}$$ が成立する。

<u>命題8</u>　$\mathfrak{A} = \langle A, \in, h_A \rangle$ と $\mathfrak{B} = \langle B, \in, h_B \rangle$ を二つの good な $\mathfrak{M}$ の初等的部分構造とするとき, $\chi_{\mathfrak{A}} = \chi_{\mathfrak{B}}$ ならば

$A = B$ が成立する。

これらの命題より, $\chi_{\mathfrak{M}^a} = \chi_{\mathfrak{M}^b}$ を証明すれば, Claim 3 が証明出来たこととなる。

命題4より, 各 $n < \omega$ に対し, $\aleph_n \leq \lambda$ ならば $\chi_{\mathfrak{M}^a}(n) = \aleph_n = \chi_{\mathfrak{M}^b}(n)$ である。そこで, $n < \omega$ を $\aleph_n > \lambda$ を満たす任意な自然数とする。

このとき, $\chi_{\mathfrak{M}^a}(n) < \aleph_n$, $\chi_{\mathfrak{M}^b}(n) < \aleph_n$ (命題5)だから, 二つの列 $\langle f^a_\alpha(n) : \alpha < \lambda \rangle$ と $\langle f^b_\alpha(n) : \alpha < \lambda \rangle$ は共に $\aleph_n$ における単調増加列である。今, $\gamma = \alpha(a) = \alpha(\beta)$ とおき, $A^n_\gamma = \{f(n) : f \in A_\gamma\}$ とおくと, A^n_γ は

$\{f^a_\alpha(n) : \alpha<\lambda\} \cap \{f^b_\alpha(n) : \alpha<\lambda\}$ の部分集合で，$|A^n_\gamma| = \lambda$ である。従って，λ の正則性より，

$\sup_{\alpha<\lambda} f^a_\alpha(n) = \sup A^n_\gamma = \sup_{\alpha<\lambda} f^b_\alpha(n)$ が成り立つ。

これより，$\chi_{\mathfrak{M}^a}(n) = \chi_{\mathfrak{M}^b}(n)$ を示すには，

$\chi_{\mathfrak{M}^a}(n) = \sup_{\alpha<\lambda} f^a_\alpha(n)$ かつ $\chi_{\mathfrak{M}^b}(n) = \sup_{\alpha<\lambda} f^b_\alpha(n)$

を言えばよいが，これらは $\mathfrak{M}^a$, $\mathfrak{M}^b$ の作り方より明らかである。故に，$\chi_{\mathfrak{M}^a} = \chi_{\mathfrak{M}^b}$ が証明され，Claim 3 の証明が終る。□

$\aleph_\omega$ は強極限基数なので，

$2^{\aleph_\omega} = 2^{\Sigma_{n<\omega}\aleph_n} = \prod_{n<\omega} 2^{\aleph_n} \leq \prod_{n<\omega} 2^{<\aleph_\omega} = (2^{<\aleph_\omega})^{\aleph_0} \leq \aleph_\omega^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_\omega}$

より，$2^{\aleph_\omega} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$ が成立する。

各 $a \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}$ に対し，$|M^a| = |M^a_\lambda| \leq \lambda + \aleph_0 = \lambda$ で，

$|[M^a]^{\aleph_0}| \leq \lambda^{\aleph_0} \leq 2^\lambda < k$ だから，

$2^{\aleph_\omega} = \aleph_\omega^{\aleph_0} = |[\aleph_\omega]^{\aleph_0}| \leq |\bigcup\{[M^a]^{\aleph_0} : a \in [\aleph_\omega]^{\aleph_0}\}| \leq k \cdot k = k$

より，$2^{\aleph_\omega} \leq k \leq \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ が成り立つ。

König の定理1より，$cf.(\aleph_{(2^{\aleph_0})^+}) = (2^{\aleph_0})^+ < \aleph_\omega < cf.(2^{\aleph_\omega})$ だから，$2^{\aleph_\omega} \neq \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$。従って $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ が成り立ち，定理10の証明を終えることが出来る。□