数理解析研究所講究録
442巻 1981年 168-175

Link Cobordism

神戸大 理　中西 康剛

この稿で、絡み輪は 3-球面に埋められた有向単純閉曲線の順序付集合を意味する。

素な絡み輪の concordance と Alexander 不変量との関連を 考える。 河内 [6] と中川 [11] は、concordant な n 成分の絡み輪の Alexander 多項式は $F(t_1,\cdots,t_n)\cdot F(t_1^{-1},\cdots,t_n^{-1})$ 因子だけ異なることを示した。 ここで、$F(t_1,\cdots,t_n)$ は、$|F(1,\cdots,1)|=1$ となる n 変数 Laurent 多項式 である。2つの Laurent 多項式が、この関係にある時、これらは、concordant であるという。

Kirby-Lickorish [8] の tangle 論法の改良型 と、絡み輪の手術的描写により、「任意の絡み輪は 同型の Alexander 不変量を有する ある素な絡み輪に concordant である。」ことを示す。 次いで、中川 [11] の実現定理と合わせて、「Concordant な多項式 は 素な絡み輪で実現されうる。」ことを示す。

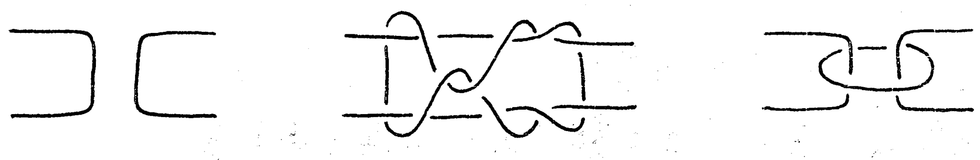
述語 tangle は 3-球体に埋められた 2本の弧 と 0本以上の輪 の集合を意味する。

3-球体 B 内の tangle t が、次の性質を満足する時、素であるという。

(1) (局所単純) t と2点で交わるような B 内の2-球面は、t との交わりが単純弧であるような3-球体を張る。

(2) (不分離性) t の弧・輪は、B に埋められた2-円板では分離されない。

図1において (甲) は素ではなく、(乙)(丙) は 素である。



(甲)　　(乙)　　(丙)

図 1.

絡み輪 L が 次の性質を満足する時、素であるという。

(1) (局所単純) L と2点で交わるような3-球面内の2-球面は、L との交わりが単純弧であるような3-球体を張る。

(2) (不分離性) L は 2-球面では分離されない。

(1)であって(2)を満足しない絡み輪は  だけである。

<u>定理 1.</u>　絡み輪$\mathcal{L}$と4点で交わる2-球面が，3-球面を，2つの3-球体に分離している。　この時，$\mathcal{L}$と各3-球面の交わりが，素な tangle であるならば，$\mathcal{L}$は　素な絡み輪である。

Lickorish[9]と 同様にして証明される。

<u>補助定理 2.</u>　(C,v)をtangle，DをC内の2-円板で(C,v)を2つのtangles (A,t)，(B,u)に分離するとしよう。　更に(B,u)が素である時，

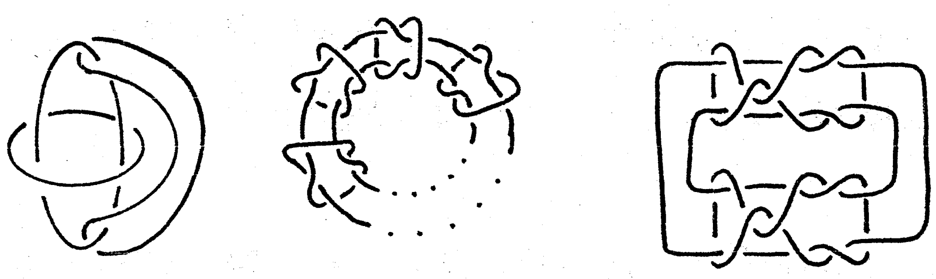
(I) (A,t) が素である，又は

(II) (A,t) が局所単純かつtが2本の弧のみより成り，かつ∂Dが　Aでtを分離する2-円板を張れない，

ならば，(C,v) は　素である。

切貼り論法により証明されるが，ここでは略する。

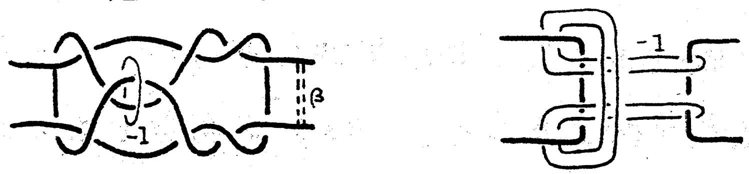
応用例．次の絡み輪は　素（非単純）である。



<u>補助定理 3.</u>　絡み輪Lの各成分との絡み数が0となるような単純な結び目が、Lと交わらないリボン円板を張るとする。この結び目に沿っての手術でLより得られる新らしい絡み輪は、Lと同型なAlexander不変量を有する [12]。

<u>補助定理 4.</u>　絡み輪の投影図において図1の(甲)、(乙)の描き替えはAlexander不変量を変えない。

<u>証明.</u>　図1.(乙)は図2(伊)のように手術描写され、これは(呂)のように移型できる。これにより、補助定理3を満足することが、見てとれる。



(伊)　　　(呂)

図 2

また(伊)においてβに沿っての裂開が、(甲)と(乙)のconcordanceを示していることに注意する。

<u>補助定理 5.</u>　絡み輪Lに対して、これと4点で交わり、次のような2つの3-球体に3-球面を分離する2-球面がある。

(1) 一方の3-球体とLの交わりは、素である。

(2) 他方の3-球体とLの交わりは、**図1(甲)と位相同型である。**

証明. 絡み輪の成分数が1の時は Bleiler [2] や Lickorish[9] により示されている。また、この時、局所単純な絡み輪への分割を考え、補助定理2を適用したわけであるが、これは成分数が2以上でも有効である。何故なら絡み輪は、局所単純な絡み輪へ必ず分割される。但し、分割の方法は唯一とは限らない。(参照 橋爪[4])

成分数が2の時。《1》 ○○ は図3のようにとる。これ以外は局所単純なら素である。《2》少なくとも一方の成分が非単純の時、両成分の部分弧により、(2)となる3-球体を構成する。すると、残りの3-球体は(1)を満足する。何故なら、絡み輪が素より、局所単純は明らか。また、分離できれば、局所単純に反する。《3》両成分ともに単純の時、図4のように取りかえれば、補助定理2より求める分離が得られる。

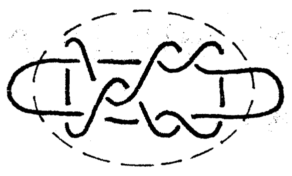


図 3

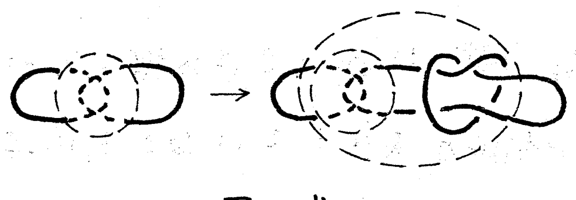


図 4

成分数が3以上の時。上述《2》と同様に異なる成分の部分弧により(2)となる3-球体を構成する。すると残りの3-球体は(1)を満足する。何故なら絡み輪が素より、局所単純は明らか。また分離できれば、絡み輪が素に反する。

<u>定理 6.</u>　n 成分の絡み輪は　同型の Alexander 不変量を有する　素な絡み輪に　concordant である。　更に. $n \geq 2$ の時. 成分の結び目型を変えないで実現できる。

<u>証明.</u>　補助定理 5において. (2) の tangle を補助定理 4 より描き替える。　定理 1 より. これが. 求める絡み輪である。　$n \geq 2$ の時. (甲) の弧は単純より. 各成分の結び目型を変えないことは明らか。

中川[11] の議論より. 次の実現定理が成立する。

<u>定理 7.</u>　n 成分の絡み輪 L 及び $|F(1, \cdots, 1)| = 1$ となる n 変数 Laurent 多項式 $F(t_1, \cdots, t_n)$ に対し. Alexander 多項式が. $F(t_1, \cdots, t_n) F(t_1^{-1}, \cdots, t_n^{-1})$ だけ L と異なる n 成分の絡み輪が存在する。

定理 6. 7 を結合して. 次を得る。

<u>定理 8.</u>　n 成分の絡み輪 L 及び $|F(1, \cdots, 1)| = 1$ となる n 変数 Laurent 多項式 $F(t_1, \cdots, t_n)$ に対し. Alexander 多項式が. $F(t_1, \cdots, t_n) F(t_1^{-1}, \cdots, t_n^{-1})$ だけ L と異なる　素な　n 成分の絡み輪が存在する.

特異点集合が．全てリボン型であるような．種数0の有向曲面の3-球面への挿入像 の境界となる絡み輪を __弱意のリボン__という。

__定理9.__ 任意の2以上の自然数n 及び．任意の 偶数次の対称多項式 $f(t)$ に対して．∇-多項式が $f(t)$となるような弱意のリボン絡み輪が存在する。

__証明.__ 細川[5]は．∇-多項式を定義し．特徴づけをしたが．その構成において．a_{2i} と a_{2j}^{+} の絡み数が0より $(1\leqq i,j\leqq h)$ これらが．単純な絡み輪である様にすれば．求める絡み輪が得られる。 何故なら．$B_{2h+1},\cdots,B_{2h+n-1}$ に沿っての融合．そして．$B_1,\cdots,B_{2i-1},\cdots,B_{2h-1}$ に沿っての裂開により．単純な絡み輪が得られるからである。

__付記.__ 弱意のリボン絡み輪Lに対し．その成分数nとの間に． $|\sigma(L)|\leqq n-1$ が成り立つことが．村杉[13]により知られている。

__定理 10.__ 素なリボン結び目に対して．これを赤道とする様な 4-球面に埋められた 2-結び目は．唯一とは限らない。

証明は略する．

References

[1] J.W. Alexander: Topological invariants of knots and links, *Trans. AMS. 30 (1928), 275-306.*

[2] S.A. Bleiler: Realizing concordant polynomials with prime knots, *preprint.*

[3] J.H. Conway: An enimeration of knots and links, and some of their algebraic properties, 'Computational Problems in Abstract Algebra', Pergamon Press, Oxford, 1969, 329-358.

[4] Y. Hashizume: On the uniqueness of the decomposition of a link, *Osaka Math. J. 10 & 11 (1958,59).*

[5] F. Hosokawa: On ∇-polynomials of links, *Osaka Math. J. 10 (1958), 273-282.*

[6] A. Kawauchi: On the Alexander polynomials of concordant links, *Osaka J. Math. 15 (1978), 151-159.*

[7] S. Kinoshita and H. Terasaka: On unions of knots, *Osaka Math. J. 9 (1957), 131-153.*

[8] R.C. Kirby and W.B.R. Lickorish: Prime knots and concordance, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 86 (1979), 437-441.*

[9] W.B.R. Lickorish: Prime knots and tangles, *Trans. AMS. (to appear).*

[10] C. Livingston: Homology cobordisms of 3-manifolds, knot concordances, and prime knots, *Pacific J. Math. 94 (1981), 193-206.*

[11] Y. Nakagawa: On the Alexander polynomials of slice links, *Osaka J. Math. 15 (1978), 161-182.*

[12] Y. Nakanishi: Prime links, concordances and Alexander invariants, *Math. Sem. Notes Kobe Univ. 8 (1980), 561-568.*

[13] K. Murasugi: On a certain numerical invariants of link types, *Trans. AMS. 117 (1965), 387-422.*

//