

A class of 3-bridge knots

東工大理 森川 治

0. はじめに

2-bridge knot は、1956年 Schubert [9] によって分類された。すなわち、全ての 2-bridge knot は、整数の組 (P, Q) に対して standard に構成される knot $K(P, Q)$ と同型であり、又、2つの knot $K(P, Q)$ と $K(P', Q')$ が同型であるための必要十分条件は、(1) $P=P'$, (2) $Q=Q'$ 又は $QQ' \equiv 1 \pmod{2P}$ であることが示された。

しかし、3-bridge 以上の knot に対しては、ほとんどこのような結果は知られていない。現在、全ての 3-bridge knot は 6つの整数により表現された standard な knot $K(x, u; y, v; z, w)$ と同型であることが知られているが、これらの同型条件や、knot となるための条件は解決していない。ここでは、3つの整数の組 (P, Q, R) に対し標準

的な 3-bridge knot $K(P, Q; r)$ の構成法を与え、それに対して議論を行なう。

1. $K(P, Q; r)$ の定義

$K(P, Q; r)$ は、先ず 2-bridge knot $K(P, Q)$ から、 $K(P, Q; 0)$ を作り、この $K(P, Q; 0)$ から $K(P, Q; r)$ を作ることにより得られる。

(1) $K(P, Q; 0)$ は次の 4 つの step により構成される。

Step 0. 2-bridge knot $K(P, Q)$ を作る。 $P: S^3 \rightarrow R^2$ を regular projection とし、 $K(P, Q)$ は図 1 のように P の projection されているとする。

すなわち、underpass BE, FA は R^2 内にあり、overpass AB, EF は、 $R^3 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z \geq 0\}$ 内の annulus A_1, A_2 上にあるとする。knot orientation は Schubert の記法と同様に、overpass AB において、 A から B に向かっているように与える。

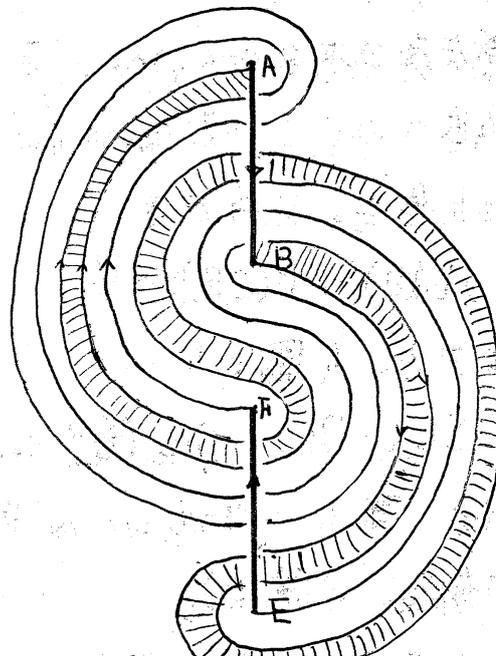


図 1 $K(7, 5)$

Step 1. Parallel area を定義する。 A', B' を $P(AB)$ 上の double point のうち、 $A=P(A), B=P(B)$ に最も近い点とする。 $P^{-1}(A') \cap K(P, \varepsilon) = \{A', A'_+\}$, $P^{-1}(B') \cap K(P, \varepsilon) = \{B', B'_+\}$ となるように、 A'_+, B'_+ を定義する。

overpass AB の subarc AA'_+, B'_+B の projection $P(AA'_+), P(B'_+B)$ と、 underpass の一部 $A'B, AB'$ の計 4本の arc により 1つの circle が出来る。この circle で囲まれる領域のうち、点 E を含まない方の領域を、 "Parallel area" と呼ぶ。(図1の斜線部分)

Step 2. Parallel area 内に 2点 C, D を A, B の近傍にとる。 $K(P, \varepsilon)$ から overpass AB を取り除き、

新たな 2本の overpass を AB ののつていた annulus A_1 上に作る。このとき、

$$P(AD) \cap P(CB) = \emptyset$$

とする。(図2)

Step 3. Parallel area 内に、新しい underpass DC を作る。(図2)

この knot を $K(P, \varepsilon; 0)$ と

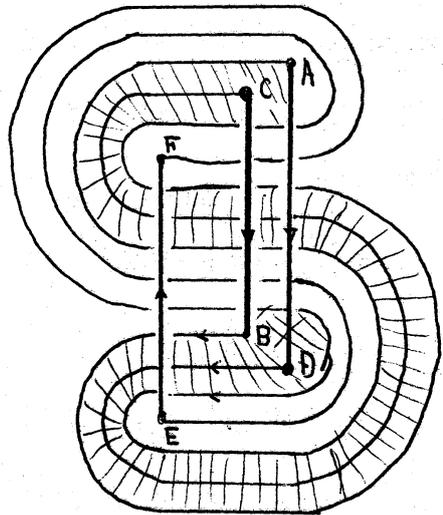


図2. $K(7,5;0)$

定義する。

(2) $t \neq 0$ の $K(p, q; t)$ は次の step により構成される。

Step 4. \mathbb{R}^2 内で, underpass
 FA と BC の点 C, A の近くを、
 annulus A_1 を中心にして、 $t > 0$
 のときは、右まわりに t 回、 $t < 0$ の
 ときは、左まわりに $|t|$ 回 まわす。(

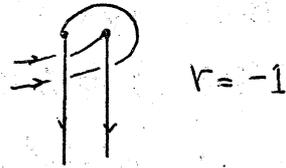
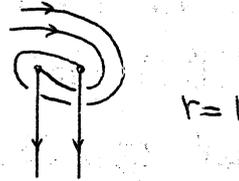


図3)。
 以上の操作により得られた knot を 図 3
 $K(p, q; t)$ と定義する。(図4)。

Remark: parallel arc をとるとき、overpass AB の代りに EF をとったとしても、2-bridge knot の対称性により全く同じ knot $K(p, q; t)$ が得られる。

次に $K(p, q; 0)$ から 整数の組 (Δ, t) を定義する。 CD を annulus A_1 上の arc とし、 FE を $\mathbb{R}^2 - (FA \cup DC \cup BE) \setminus \{E, F\}$ 上の arc とする。すると curve CD と EF は2本の simple closed curve となるので、 \mathbb{R}^3 内の 2-bridge link となる。この link type を (Δ, t) とおく。すると、 (Δ, t) は次の条件をみたす。

Lemma 1. $\det \begin{pmatrix} p & q \\ \Delta & t \end{pmatrix} = \pm 1$, Δ : even, $0 < |t| < \Delta < p$.

proof. Torus T^2 を $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 上の $P(CD)$, $P(EF)$ を branched set とする 2-fold branched covering space とする. $P: T^2 \rightarrow S^2$ を covering map とする. すると, $P^{-1}(DC)$ は, T^2 上での simple closed curve となり, torus knot type (Λ, t) となる. DB を \mathbb{R}^2 上の他の arc と交わらない arc とすると, $P^{-1}(DBE)$ も T^2 上の simple closed curve となり, type (P, φ) となる. 又, $P^{-1}(DC) \cap P^{-1}(DBE)$ は, $P^{-1}(D)$ 1点だけとなるので, この2本の simple closed curve の intersection number は ± 1 である. 又, intersection number は $\det \begin{pmatrix} P & \varphi \\ \Lambda & t \end{pmatrix}$ でもあるので, $\det \begin{pmatrix} P & \varphi \\ \Lambda & t \end{pmatrix} = \pm 1$ を得る. 又, Schubert の結果より, (Λ, t) が link を表わすパラメータであるので, Λ は偶数であり, $0 < |t| < \Lambda$ である. 又, underpass DC の定義より $\Lambda < P$ は明らかである. //

この Lemma より, DC は overpass EF の像 $P(EF)$ と $\frac{\Lambda}{2}$ 回交わっていることがわかる. 又, $P(AD)$, $P(CB)$ とは $\frac{\Lambda-1}{2}$ 回ずつ交わっていることがわかる.

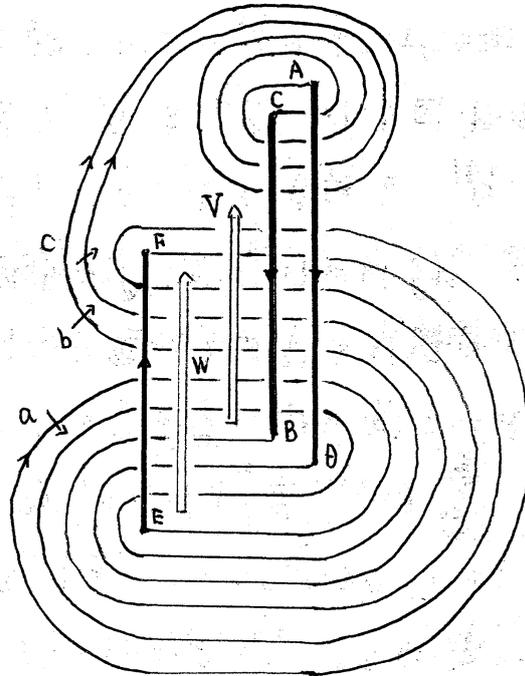
Remark: (Λ, t) は (P, φ) より幾何学的に定義し, Lemma の条件をみたすことを証明したが, Lemma の条件をみたす (Λ, t) は (P, φ) による代数的に unique に定まることが, 容易に示せる.

2. $K(P, Q; r)$ の Alexander polynomial について.

knot group $\pi K = \pi_1(S^3 - K)$ を under presentation
により次のように表現する。 generator a, b, c とし、
underpass BE, FA, DC を左から右に横切った事に対応
させ、 relator とし、 overpass EF と CB から得られる
ものを使う。 W とし、

$K(P, Q; 0)$ において、

overpass EF によって読
んだ word とし、 V を、 や
はり $K(P, Q; 0)$ において
overpass CB によって逆に
読んだ word に対応させ
る。(図4)。すると πK
は、 $\det \begin{pmatrix} P & Q \\ S & T \end{pmatrix} = 1$ の場合、



$$\langle a, b, c \mid aWb^{-1}W^{-1}, \\ aV(bc)^r c^{-1} (c^{-1}b^{-1})^r V^{-1} \rangle$$

又、 $\det \begin{pmatrix} P & Q \\ S & T \end{pmatrix} = -1$ の場合

図4. $K(7,5;2)$

$$\langle a, b, c \mid aWb^{-1}W^{-1}, \\ aV(cb)^r c^{-1} (b^{-1}c^{-1})^r V^{-1} \rangle$$

と表現される。すなわち、2番目の relator (overpass BC
に対応するもの) しか r の影響を受けない。

word W は次の性質をみたす。

$$\text{Lemma 2. } \#\{i \mid i\text{-th term of } W \text{ is } a^{\pm 1}, i \text{ is odd}\} \\ - \#\{i \mid i\text{-th term of } W \text{ is } a^{\pm 1}, i \text{ is even}\} = 1 \text{ or } 0$$

Proof. word W を

$$W = U_0 C^{\varepsilon_1} U_1 C^{\varepsilon_2} \cdots U_{k-1} C^{\varepsilon_k} U_k, \quad \varepsilon_j = \pm 1, U_j \text{ は } a^{\pm 1}, b^{\pm 1} \text{ が} \\ \text{ら成る word}$$

とすると、word $U_0 U_1 \cdots U_k$ は 2-bridge knot $K(P, \mathcal{E})$ の overpass EF によって読んだ word である。よってこの word 内では、 $a^{\pm 1}$ と $b^{\pm 1}$ が交互に表われている。又、 U_0 は $b^{\pm 1}$ で始まっている。すなわち、次のことが言える：

◎ U_j 内の $a^{\pm 1}$ は、 j が偶数なる W 内で偶数文字目の、 j が奇数なる W 内で奇数文字目の文字である。

よって次の式の値が 0 又は 1 であることを示せばよい。

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \#\{i \mid i\text{-th term of } U_j \text{ is } a^{\pm 1}\} \cdots (*)$$

次に、set $\{0, 1, \dots, k\}$ 上の permutation σ を次のように定める。 $S^2 - P(EF) - DC$ の connected open domain O_1, O_2, \dots, O_k を考える。このとき、 O_1 を点 E を含む open disk とする。Lemma 1 に述べたように、underpass DC は、2-bridge link (A, t) type の underpass と同じふるまいをする。すなわち、 $\text{cl}(O_i) \cap DC$ は 2本の subarc であり、 $\text{cl}(O_i) \cap P(EF)$ も 2本の subarc である (となり合う 2

本の subarc の場合もある。(図5)。ここで、(1) $\Gamma(0) = 0$,
 (2) O_j の closure と $P(EF)$ の交わりは、
 word $U_{\Gamma(j-1)}$ と $U_{\Gamma(j)}$
 に対応する subarc であるとする。

このように定義した Γ は次の性質をみたす。

$$\Gamma(j) \equiv j \pmod{2}$$

なせなら、点 θ を含む domain O_j が存在す

る。(図5の O_3)。すると、 Γ の定義(2)より、 $\Gamma(j)$ と $\Gamma(j-1)$ はとなり合っている。また、 $\Gamma(j-1) \equiv \Gamma(j) + 1 \pmod{2}$ である。次に、 O_j に θC により接している domain O_i が必ず存在する(図5の O_5)。このとき、次のどちらかが成り立つ。

$$\begin{cases} \Gamma(j) \equiv \Gamma(i) + 1 & \text{and} & \Gamma(j-1) \equiv \Gamma(i-1) + 1 & \pmod{2} \\ \Gamma(j) \equiv \Gamma(i-1) + 1 & \text{and} & \Gamma(j-1) \equiv \Gamma(i) + 1 & \pmod{2} \end{cases}$$

しかし、いざ本の場合でも、 $\Gamma(i-1) \equiv \Gamma(i) + 1 \pmod{2}$ が成り

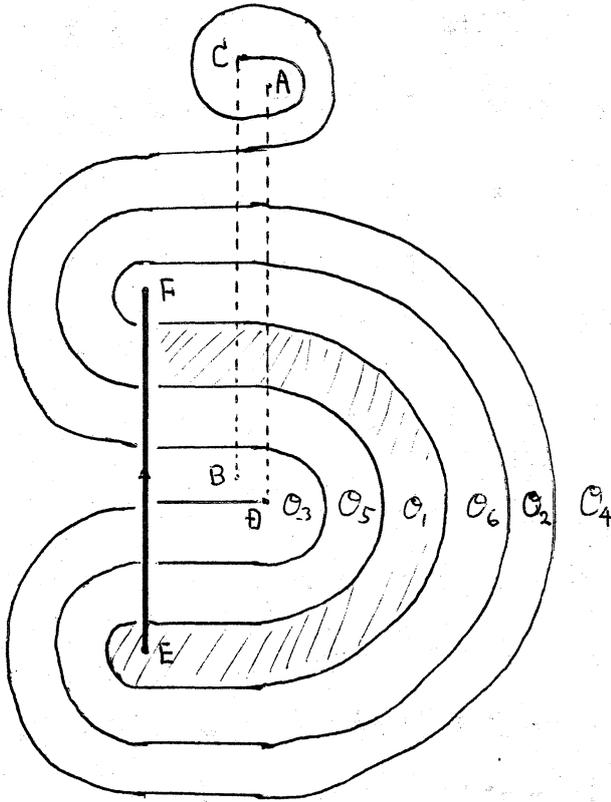


図5. $K(17, 7; -2)$

立つ。同様に、 \mathcal{O}_i と \mathcal{O}_C と接していて、 \mathcal{O}_j でない domain \mathcal{O}_R が見つかり、 $\uparrow(k-1) \equiv \uparrow(k)+1 \pmod{2}$ が成り立つ。よって、全ての j で $\uparrow(j-1) \equiv \uparrow(j)+1 \pmod{2}$ が成り立つ。又、 \uparrow の定義 (1) より $\uparrow(0) \equiv 0 \pmod{2}$ であるから、結局 全ての j で、 $\uparrow(j) \equiv j \pmod{2}$ が成り立つ。よって、次の式の値は、式 (**) の値と等しい。

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{j+1} \# \{ i \mid i\text{-th term of } U_{\uparrow(j)} \text{ is } a^{\pm 1} \} \dots (**)$$

さて、generator a は underpass BE に対応して定義されたことを思い出し、式 (**) を見ると次のことがわかる。 \uparrow の定義より明らかなるように、 $U_{\uparrow(j)}$ に対応する subarc を BE が横切った次は、 $U_{\uparrow(j \pm 1)}$ に対応する subarc を横切る。すなわち、BE にまっすぐ見るとき、 W 内の $a^{\pm 1}$ は、式 (**) の値を増加させるものと、減少させるものが交互に現れる。BE において最後に横切る点は $U_{\uparrow(0)}$ に対応する EF の subarc であるため、最初に横切る点により式 (**) の値は 1 または 0 となる。 //

word W の Lemma 2 の性質より、次の定理が導かれる。

Theorem 1. (P, ε) を、共に奇数、 $0 < |\varepsilon| < P$, $(P, \varepsilon) = 1$ を満たす整数の組とする。3-bridge knot $K(P, \varepsilon; t)$ の Alexander polynomial を Δ_r と書くことにする。このとき、整数の組 $r_0, r_1, n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が存在し、次の条件

を満たす。

1) $r_0 < r_i$

2) $\forall r \geq r_i$ に対し、 Δ_r の係数は、

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \underline{1 - 1 \ 1 - 1 \cdots 1 - 1} \alpha_m \cdots \alpha_1$$

となり、下線部分は、 $(1, -1)$ が $(r - r_i)$ 回くり返し現れている。

3) $\forall r \leq r_0$ に対し、 Δ_r の係数は、

$$\alpha_{m+1} \alpha_{m-1} \cdots \alpha_{2+1} \alpha_{1-1} \underline{1 - 1 \ 1 - 1 \cdots 1 - 1} \alpha_{1-1} \cdots \alpha_{m+1}$$

又は、(m : even)

$$\alpha_{m+1} \alpha_{m-1} \cdots \alpha_{2-1} \alpha_{1+1} \underline{-1 \ 1 \ -1 \ 1 \cdots -1 \ 1 \ -1} \alpha_{1+1} \cdots \alpha_{m+1}$$

(m : odd)

となり、下線部分は、 $(1, -1)$ を $(r_0 - r)$ 回くり返したものである。

Proof knot group πK の表示は 2通りあったが、先ず次のタイプについて証明する。

$$\pi K = \langle a, b, c \mid aWb^{-1}W^{-1}, aV(bc)^r c^{-1}(c^{-1}b^{-1})^r V^{-1} \rangle$$

* を abelianization とし、 $a^* = b^* = c^* = x$ とする。すると

と Alexander polynomial は、

$$\Delta_r(x) = \begin{vmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} (aW - Wb) \right\}^* & \left\{ \frac{\partial}{\partial b} (aW - Wb) \right\}^* \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial a} (aV(bc)^r - V(bc)^r c) \right\}^* & \left\{ \frac{\partial}{\partial b} (aV(bc)^r - V(bc)^r c) \right\}^* \end{vmatrix}$$

と書ける。こゝで、Polynomial $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ と整数 m を次の式が成り立つように選ぶ。

$$\Delta_r(x) = \begin{vmatrix} 1 + f_1(x)(x-1) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) - x^m \frac{1-x^{2r}}{1+x} \end{vmatrix}$$

この f_1, f_2, f_3, f_4, m は、word W, V によるのみ定まるので、 r には関係しない。ここで、word W, V の長さを l_1, l_2 とする。又、多項式 $f(x)$ が $\sum_{k=c}^d a_k x^k$ と書けるとき、

$\underline{c} \leq \text{power}(f) \leq \underline{d}$ と記述することにする。 f_1, f_2, f_3, f_4, m は次の条件をみたす。

- 1) $-l_2 \leq m \leq l_2$
- 2) $-l_1 \leq \text{power}(f_1) \leq l_1$
- 3) $-l_1 \leq \text{power}(f_2) \leq l_1$
- 4) $-l_2 \leq \text{power}(f_3) \leq l_2$
- 5) $-l_2 \leq \text{power}(f_4) \leq l_2$.

Alexander polynomial $\Delta_r(x)$ は、

$$\begin{aligned} \Delta_r(x) &= (1 + f_1(x)(x-1)) \left(f_4(x) - x^m \frac{1-x^{2r}}{1+x} \right) - f_2(x) f_3(x) \\ &= (1 + f_1(x)(x-1)) f_4(x) - f_2(x) f_3(x) - x^m (1 + f_1(x)(x-1)) \frac{1-x^{2r}}{1+x} \\ &= f_5(x) - x^m (1 + f_1(x)(x-1)) \frac{1-x^{2r}}{1+x} \end{aligned}$$

ただし、 $-(l_1 + l_2) \leq \text{power}(f_5) \leq (l_1 + l_2 + 1)$ である。

ここで、 $f_1(x) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} W \right\}^*$ であること、 W の lemma 2 で述べた性質をみたすことより、次の様な条件をみたす多項式 $g(x)$ が存在する。

$$1 + f_1(x)(x-1) = (1+x) g(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$-l_1 \leq \text{power}(g) \leq l_1.$$

よって、

$$\begin{aligned} x^{-m} \Delta_r(x) &= x^{-m} f_5(x) - g(x) + x^{2r} g(x) - \varepsilon \frac{1-x^{2r}}{1+x} \\ &= f_6(x) + x^{2r} g(x) - \varepsilon \frac{1-x^{2r}}{1+x} \end{aligned}$$

ただし、 $-(l_1+2l_2) \leq \text{power}(f_6) \leq l_1+2l_2+1$ 。

よって、 $r \geq 2l_1+2l_2+1$ 又は $r \leq -(2l_1+2l_2)$ のとき、 Δ_r の係数の中間部は、 $f_6(x)$, $g(x)$ にかかわらず、 $-\varepsilon \frac{1-x^{2r}}{1+x}$ の係数 1 又は -1 がそのまま現れる。

$$\pi K = \langle a, b, c \mid aWb^{-1}W^{-1}, aV(cb)^r c^{-1}(b^{-1}c^{-1})^r V^{-1} \rangle$$

のタイプに対しても、全く同様に証明できる。 //

Th 1 で示した (P, \mathcal{Q}) から定まる $(r, n, n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ を $\Gamma(P, \mathcal{Q})$ と書くことにする。

この定理により、1つの (P, \mathcal{Q}) から得られる 3-bridge knot $K(P, \mathcal{Q}; r)$ が、ほとんど全て相異なることがわかる。又、次の結果も導ける。

Corollary 1. 2-bridge knot $K(7, 3)$ と $K(7, 5)$ は同じ knot type である [9]。しかし、任意の r, r' に対し、 $K(7, 3; r)$ と $K(7, 5; r')$ が同じ knot type となることはない。

Proof. Th 1 を利用することにより、有限個の Alexander polynomial を比較することにより証明できる。

$\Gamma(7, 3) = (-2, 4, 5; 0, 2, -4, 3, -1)$ である。

$-2 < r < 4$ の r に対し Δ_r は

$$\Delta_{-1} = 2x^3 - 3x^2 + x + 1 + x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$\Delta_0 = 2x^2 - 3x + 3 - 3x^{-1} + 2x^{-2}$$

$$\Delta_1 = 4x - 7 + 4x^{-1}$$

$$\Delta_2 = 2x^2 - 4x + 5 - 4x^{-1} + 2x^{-2}$$

$$\Delta_3 = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 + 3x^{-1} - 4x^{-2} + 2x^{-3}$$

である。

$\Gamma(7, 5) = (-2, 4, 5; 1, -1, -1, 2, -1)$ である。

$-2 < r < 4$ の r に対し Δ_r は

$$\Delta_{-1} = x^3 - 2x + 3 - 2x^{-1} + x^{-3}$$

$$\Delta_0 = x^2 + x - 3 + x^{-1} + x^{-2}$$

$$\Delta_1 = x^2 - 1 + x^{-2}$$

$$\Delta_2 = x^3 - x^2 - x + 3 - x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}$$

$$\Delta_3 = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1 + 2x^{-1} - x^{-2} - x^{-3} + x^{-4}$$

である。

よって、任意の r, r' に対し $\Delta_r \neq \Delta_{r'}$ である。すなわち、任意の r, r' に対し $K(7, 3; r)$ と $K(7, 5; r')$ が同じ knot type となることはない。 //

3. $K(P, \mathcal{E}; \tau)$ の性質について.

一般に、 n -bridge knot は、genus n の standard surface F_n 上に embed できることは明らかである。しかし、 $K(P, \mathcal{E}; \tau)$ は 3-bridge knot にも関わらず、定義から明らか存ように、genus 2 の F_2 上に embed できる。

Prop. 1 $K(P, \mathcal{E}; \tau)$ は F_2 上に embed できる。

このことから、次の定理が導ける。

Theorem 2 $K(P, \mathcal{E}; \tau)$ は strongly invertible knot である。

Proof genus 2 の standard surface F_2 上の simple closed curve は、 S^3 内の F_2 の ambient isotopy により、対称な形に変形できる [1]。すなわち、 S^3 の involution $f: S^3 \rightarrow S^3$ が存在し、 $f(F_2) = F_2$ 、 $f(K(P, \mathcal{E}; \tau)) = K(P, \mathcal{E}; \tau)$ をみたすようにできる。又、 $K(P, \mathcal{E}; \tau)$ の F_2 への embedding は、 F_2 上で homologous \emptyset ではない。(overpass EF が annulus A_2 にのっていることを考えれば明らかである)。よって、knot K は、involution f の fixed point をもつ。すなわち、 K は strongly invertible knot である。 //

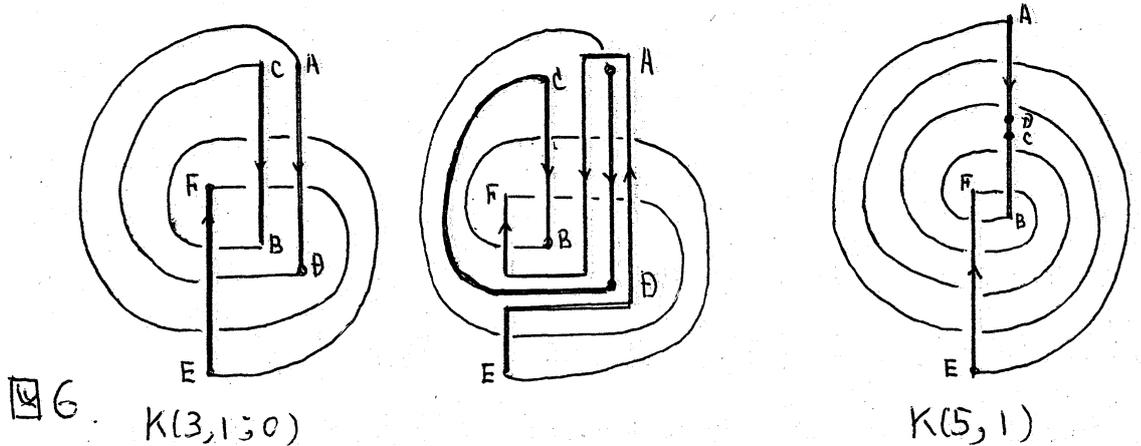
Remark: F_2 上に embed できる knot として、

2-bridge knot 以外のものご知らぬているのは、
 Pretzel knot のうち、twist 部分が3つあるタイプの
 $P_3(p, q, r)$ である。しかし、これは、 F_2 上で homologous
 0 であるので、Theorem 2 は成立しない。例えば、
 $P_3(7, 5, 3)$ は non-invertible knot であることが、
 1964年、Trotter により示された [12]。

Prop. 1 の knot $K(p, q; t)$ は genus 2 の standard
 surface F_2 上にあることを示したが、次の knot はさ
 らに、genus 1、すなわち torus 上にある knot である。

Prop. 2. $K(3, 1; 0) \approx T(5, 2) \approx K(5, 1)$

Proof. $P(K(3, 1; 0))$ において、AD と DC の交わりは
 1 点目だけである (図6)。そこで、underpass DC の上を
 横切っている overpass を DC 及び、overpass AB にそって
 動かして変形することにより、underpass FA の上を横切るよ
 うに変形できる。この操作により、underpass DC 上を横切る



overpass を全て取り除くことができる。この操作を、“点 θ に関する move operation” と呼ぶ。[4][5]。これにより、 $A\theta CB$ を1つの overpass とすることが出来る。よって、2つの overpass をもつ knot が得られる。Schubert の標準型をもってゆくと、 $K(5, 1)$ が得られる。又、Schubert の結果により、この knot は torus knot $T(5, 2)$ であることがわかる。//

さらに次の knot も torus knot である。

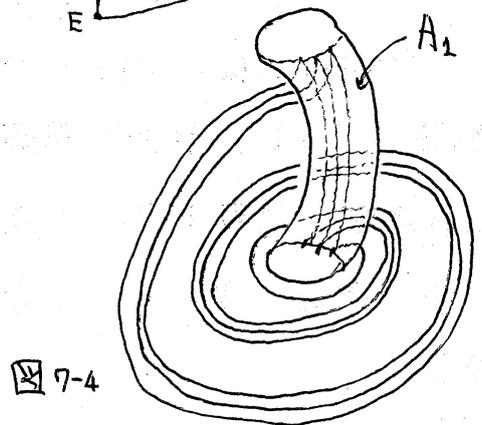
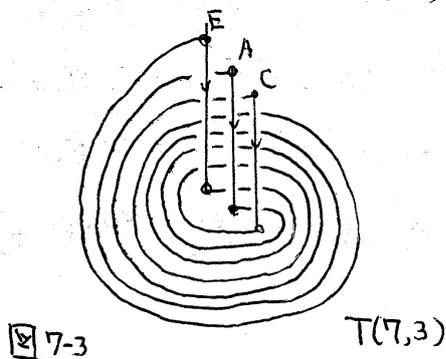
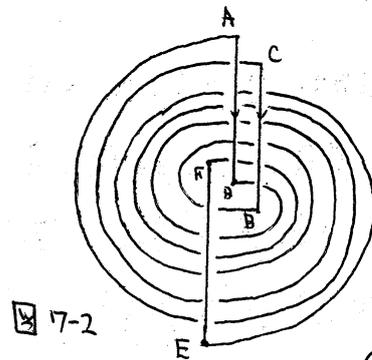
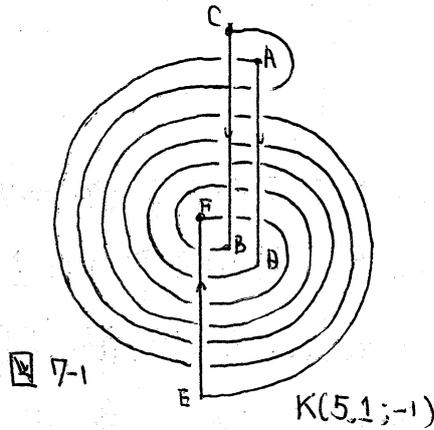
Prop. 3. $K(2n+1, 1; -1)$, $K(2n+1, 1; -2)$ は torus knot $T(3n+1, 3)$, $T(3n+2, 3)$ である。($n=1, 2, \dots$)。

Proof $K(2n+1, 1; -1)$ について。

先ず overpass CB を overpass $A\theta$ の上をまたがせる (7-1 \Rightarrow 7-2)。overpass EF を、点 F を中心に回転させ、 $A\theta$ のとなりにもってゆく (7-2 \Rightarrow 7-3)。すると、3本の overpass $EF, A\theta, CB$ は1つの annulus A_1 上にのせられるので、torus knot である。(7-4)。以上の変形で、overpass EF にある double points の数は不変であるので、 $K(2n+1, 1; -1)$ のときと同じ、 $3n+1$ である。よって、この torus knot は type $(3n+1, 3)$ である。

$K(2n+1, 1; -2)$ について。

overpass EF を点Fを中心に回転させ、overpass CBの近くにもって行く。(8-1 \Rightarrow 8-2)。underpass CD を underpass EB の下をくぐらせる (8-2 \Rightarrow 8-3)。overpass EF を overpass CB 及び AD の下をくぐらせる (8-3 \Rightarrow 8-4)。これにより、3本の overpass は1つの annulus 上にのせられるので、torus knot である。この変形で、overpass EF 上の double point の数は、初め $3n$ 個であったものが、(8-2 \Rightarrow 8-3) の変形で1つ増加して、(underpass CD との交わりが増加) $3n+1$ となる。その後は不変であるので、torus knot の type は $(3n+2, 3)$ である。 //



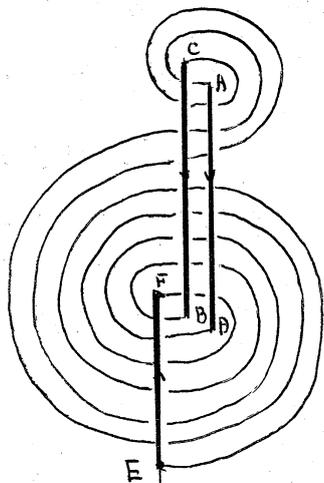


図8-1

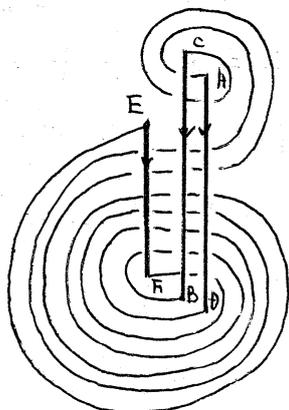
 $K(5, 1; -2)$


図8-2

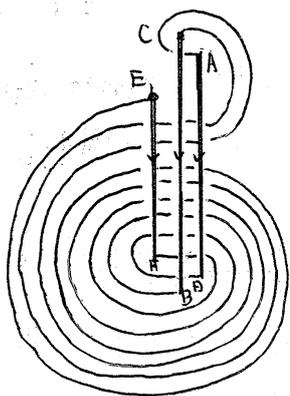


図8-3

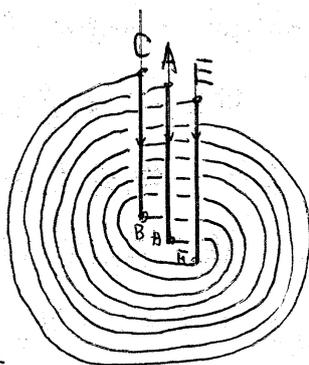


図8-4

 $T(8, 3)$

また、 $K(p, q; t)$ は 3-bridge knot であるが、次の knot の bridge index は 2 である。

Prop 4 次の knot は 2-bridge knot type に属する。

$$K(4n+1, 2n+1; 0) \approx K(8n+1, 6n+1)$$

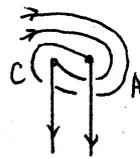
$$K(4n+1, 2n+1; 1) \approx K(8n+3, 2n+1)$$

$$K(4n+3, 2n+1; 0) \approx K(8n+5, 2n+1)$$

$$K(4n+3, 2n+1; -1) \approx K(8n+7, 6n+5)$$

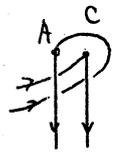
Proof これらの Knot は Lemma 1 で述べた (s, t) が $(2, 1)$ となるものである。よって、 $r=0$ のとき、 $P(CB)$ と BC の交わりは 1 点 C だけから成る。又、 $K(4n+1, 2n+1; 1)$ のとき (図 9-1), $K(4n+3, 2n+1; -1)$ のとき (図 9-2) もこの性質はくずれない。よって、点 C に関する move operation が行なえ、2-bridge knot を得る。//

ほとんどの Knot $K(p, q; r)$ は、Alexander polynomial により、bridge index が 3 であることや、tous knot でないことが示せるが、例外もある。



$K(4n+1, 2n+1; 1)$

図 9-1



$K(4n+3, 2n+1; -1)$

図 9-2

Prop 5 次の Knot の Alexander polynomial は、2-bridge tous knot のそれと同じであるが、異なる knot である。すなわち、bridge index 3 の knot である。

$$(1) K(4n+1, 1; 3n) \neq T(6n+1, 2) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(2) K(4n-1, 1; 3n-3) \neq T(6n-1, 2) \quad (n=2, 3, \dots)$$

証明のアウトライン :

(1) の Knot の $\pi K = \langle a, b, c \mid a(bca)^{2n} b^{-1}(a^{-1}b)^{2n}, a(b^{-1}c^{-1})^{2n-1} b^{-1}a^{-1}(bc)^{3n} c^{-1}(c^{-1}b^{-1})^{3n} abc(cab)^{2n-1} \rangle$ であることより、Alexander polynomial を求めると、 $\frac{x^{12n+2}-1}{(x^{6n+1}-1)(x+1)}$ が得られる。これは $T(6n+1, 2)$ のそれと等しい。異なることを示すために村杉 signature を求め

ると、 $\sigma(K(4n+1, 1; 3n)) = 2n$, $\sigma(T(6n+1, 2)) = 6n$ 不
 得られ、異なることを示せる。

(2) の knot の $\pi K = \langle a, b, c \mid a(bca)^{2n-1}b^{-1}(a^{-1}c^{-1}b^{-1})^{2n-1}, a(b^{-1}a^{-1}c^{-1})^{2n-2}b^{-1}a^{-1}$
 $(bc)^{3n-3}c^{-1}(c^{-1}b^{-1})^{3n-3}ab(cab)^{2n-2} \rangle$ であることより $\Delta(x) = \frac{x^{12n-2}-1}{(x^{6n-1}-1)(x+1)}$
 不得られ $T(6n-1, 2)$ と同じことをわかる。又、村杉 signature
 は、 $\sigma(K(4n-1, 1; 3n-3)) = 2n+2$, $\sigma(T(6n-1, 2)) = 6n-2$ あり。
 $n \geq 2$ では異なる。//

Remark: (2) において $n=1$ のときは、同じ knot type
 となる。(Prop 1)。①の証明の別証として、unknotting
 number を用いた証明がある(近藤)。

この他、この section に書くべきことも多くあるが、紙面
 の都合で、後は結果だけ述べておく。詳しくは、[6] を参
 照して下さい。

Prop 6. 次の knot の Alexander polynomial は互
 に等しいが、相異なる knot type の knot である:

$m, k \geq 1$, $m \neq k$ のとき。

$$(1) K(4m+1, 1; 3m+3k) \neq K(4k+1, 1; 3m+3k)$$

$$(2) K(4m-1, 1; 3m+3k-3) \neq K(4k-1, 1; 3m+3k-3)$$

$m, k \geq 1$ のとき。

$$(3) K(4m+1, 1; 3m-3k) \neq K(4k-1, 1; -3m+3k-3)$$

$K(P, q; r)$ を branched set とする $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ の 2-fold branched covering space を $\mathcal{D}(P, q; r)$ と書くことにする。

Prop 7 $\mathcal{D}(P, q; r)$ は homology lens space である。

Prop 8 $\mathcal{D}(4n+1, 2n+1; r)$, $\mathcal{D}(4n+3, 2n+1; r)$ は Seifert mfd である。

Theorem 3 任意の (P, q) に對し、 $\mathcal{D}(P, q; r)$ が homology sphere となる r が存在する。

4. コンピュータ実験の結果と問題

P の値が 17 以下の全 2 の $K(P, q; r)$ は、Prop 2, 3 で示したものの以外に torus knot は存在せず、Prop 2, 4 で示したものの以外は、2-bridge knot と同じ knot type にはならないことが証明できた。そこで、

予想: Prop 2, 3 以外の knot は全 2 torus knot である。
また、Prop 2, 4 以外の knot の bridge index は 3 である。

又、 $K(5, 1; 2) \approx K(7, 5; -1)$ である。よって、 $K(P, q; r)$ は、 (P, q, r) と 1 対 1 対応はつかない。

問題: $K(P, q; r) \approx K(P', q'; r')$ となる triplet

(P, \mathcal{Q}, τ) と $(P', \mathcal{Q}', \tau')$ の関係を明らかにせよ。

References

[1] J.S. Birman and H.M. Hilden: Heegaard splitting of branched covering of S^3 , Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975) 315-352

[2] R.I. Hartley: On two bridge knot polynomials. J. Austral. Math. Soc. 28 (1979), 241-249

[3] J.M. Montesinos: Variedades de Seifert que son recubridores ciclicos ramificados de dos hojas, Bol. Soc. Mat. Mexicana. 18 (1973), 1-32

[4] 森川 治: An algorithm for decreasing bridge numbers of knots. 東工大・情報科学科修士論文 (1979)

[5] 森川 治: 結び目の作図とその簡素化, bit 13 (1981) 812-821

[6] 森川 治: A class of 3-bridge knots, to appear in Math. Sem. Notes of Kobe Univ.

[7] K. Murasugi: On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 387-442

[8] D. Rolfsen: Knots and Links, Rebbish or Perish Inc. Berkley, 1976

[9] H. Schubert: Knoten mit zwei Brücken. Math.

Z. 65 (1956) 133-170

[0] Y. Shinohara: On the signature of knots and Links, Ph.D. Florida, 1969

[1] 戸川 隼人: マトリックスの数値計算, オーム社

[2] H. Trotter: Non invertible knots exist, Topology
2 (1964) 275-280