数理解析研究所講究録
442巻 1981年 1-15

Surface Bundles over S^1 which are 2-fold Branched Coverings of S^3

大阪市大 理　作間 誠

F_g を genus g の closed orientable surface とすると、$F_g \times S^1$ ($g \geq 1$) は S^3 の 2-fold branched cover にならない事が知られている。(Fox [3], Hirsh-Neumann [5], Montesinos [8]) ところが、最近、落合-高橋 [10] は、すべての自然数 g に対して、S^3 の 2-fold branched cover になる S^1 上の F_g-bundle が存在する事を示した。(実際には、すべての自然数 g に対して、Heegoard genus が 2 である F_g-bundle が構成されている。) 更に、そこでは、Heegoard genus が 2 である torus bundle の分類が行なわれた。

そこで、ここでは、どの様な F_g-bundle が S^3 の 2-fold branched covering になるか? という問題について考える。

<u>記号</u> 以下、surface F_g には一つの longitude-meridian

system $\{l_i, m_i \ (1 \leq i \leq g)\}$ が与えられているとする。
F_g 上の homeomorphism φ に対して、M_φ を $F_g \times [0,1] / (x,0) \sim (\varphi(x),1)$ とする。又、φ が誘導する $H_1(F_g)$ 上の isomorphism φ_* を底 $\{l_i, m_i\}$ に関して表現する行列を A_φ で表わす。(i.e. $\varphi_* \begin{pmatrix} \vdots \\ l_i \\ m_i \\ \vdots \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} \vdots \\ l_i \\ m_i \\ \vdots \end{pmatrix}$ で決まる行列)。

$g = 1$ の時、対応 $\varphi \mapsto A_\varphi$ は、torus の homeotopy group から $GL(2, \mathbb{Z})$ への anti-isomorphism になる。$A \in GL(2, \mathbb{Z})$ に対して、φ_A を torus 上の homeomorphism で $A_{\varphi_A} = A$ なるものとし、又、torus bundle M_{φ_A} を M_A で表わす。

§1. Homological Condition

M_φ を F_g-bundle とすると、$H_1(M_\varphi) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Coker}(\varphi_* - 1)$ となる。$H_1(F_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ であるので、$\mathrm{Coker}(\varphi_* - 1)$ は $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_g} \oplus \mathbb{Z}_{n_{g+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_{2g}}$ (n_i : non-negative integer, $n_i \mid n_{i+1}$) と表わせる。この時、次が成り立つ。

<u>定理 1</u> もし M_φ が S^3 の 2-fold branched cover になるなら、n_g は 1 又は 2 である。逆に $\{n_i\}_{1 \leq i \leq 2g}$ を $n_i \mid n_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2g-1)$, $n_g = 1$ or 2 なる non-negative integer の列とすると、S^3 の 2-fold branched cover になる F_g-bundle

M で $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_{2g}}$ となるものが存在する。

この定理の証明のためには次の補題が必要である。

<u>補題 1</u>　M を S^3 の 2-fold branched cover とする。すると、任意の $x, y \in H_2(M; R)$ に対して $2\,\mathrm{int}(x.y) = 0$ in $H_1(M; R)$. 但し R は任意の環で、int は intersection paring : $H_2(M; R) \times H_2(M; R) \to H_1(M; R)$ を表わす。

(証明は [12] 参照)

(定理 1 の前半の証明)　η を natural map
$H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g}) \to \mathrm{Coker}(\phi_* - 1 ; H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g}) \circlearrowleft) \hookrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$
とする。　すると、$\mathrm{Coker}(\phi_* - 1 ; H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g}) \circlearrowleft) \supset (\mathbb{Z}_{n_g})^{g+1}$ である事より、$\mathrm{Ker}(\phi_* - 1 : H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g}))$ の元 z で、$\eta(z)$ $(\in H_1(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g}))$ の位数が n_g であるものが存在する事がわかる。　$\phi_*(z) = z \in H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g})$ であるので、2-chain $z \times [0,1]$ $(\subset F_g \times [0,1]/\phi = M_\phi)$ は自然に $H_2(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$ の元 $\hat{z}$ を決める。　今、fiber F_g が作る $H_2(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$ の元を $[F_g]$ で表わすと、$\mathrm{int}(\hat{z}, [F_g]) = \eta(z) \in H_1(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$ である事がわかる。　ところが $\eta(z)$ の位数は n_g であるので、$n_g \neq 1$ or 2 なら、補題 1 により M_ϕ は S^3 の 2-fold branched cover になれない。　□

（定理1の後半の証明）　整数の組 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1\le i\le g}$ に対し $K(\alpha_1,\cdots,\alpha_g;\beta_1,\cdots,\beta_g)$ を図1で示される S^3 の中の link とする。

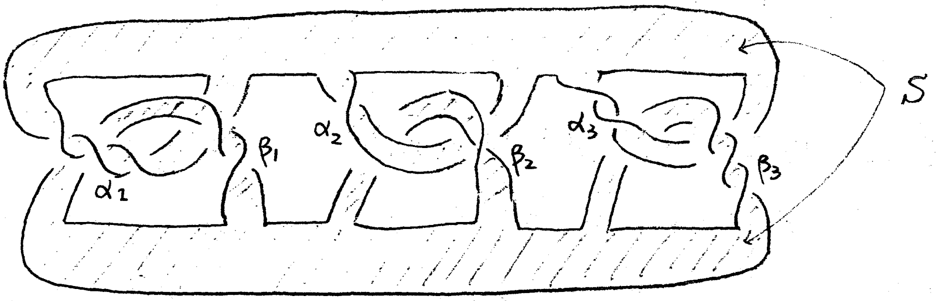


図1　（$K(3,1,-2;2,1,3)$）

（α_i, β_i は right-hand half twists の数を表わす。）

すると、$K(\alpha_1,\cdots,\alpha_g;\beta_1,\cdots,\beta_g)$ の 2-fold branched cover M は F_g-bundle である。

（∵　S を図1の斜線部で表わされる $K(\alpha_1,\cdots,\beta_g)$ を張る surface とすると、M は S^3 を S で切り開いた空間の二つのコピーを張り合わせて得られる。ところが、S^3 を S で切り開くと $F_g\times I$ になるので、M は F_g-bundle になる。

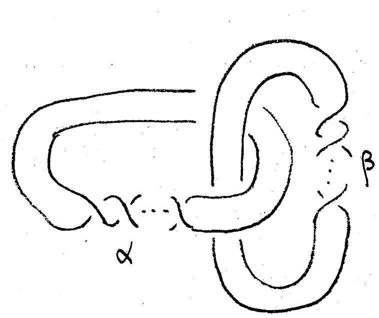
更に、その monodromy に対応する matrix A は $\bigoplus_{i=1}^{2g}\begin{pmatrix}-1 & -\alpha_i\\ \beta_i & \alpha_i\beta_i-1\end{pmatrix}$ で与えられる事がわかる。従って $H_1(M)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathrm{Coker}(A-I)$ $\cong\mathbb{Z}\oplus\{\bigoplus_{i=1}^{g}\{\mathbb{Z}_{g_i}\oplus\mathbb{Z}_{(|\alpha_i\beta_i-4|/g_i)}\}\}$ （但し $g_i=\mathrm{g.c.d}\{2,\alpha_i,\beta_i\}$）となる。$\alpha_i, \beta_i$ を適当に選べば定理1の後半の証明が出来る。□

註　この証明と同様な構成方法により、任意の closed orientable 3-manifold は surface bundle を branched cover に持つ事がわかる。言い換えれば、すべての closed orientable 3-manifold は surface bundle を involution で割る事によりできる。

§2. Torus Bundles

J. L. Tollefson [14] は、$H_1(M_\phi;\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$ なる surface bundle M_ϕ 上の involution は fiber preserving である事を示した。この結果は、もう少し一般的な条件の下で成り立つ事がわかる。特に、M_ϕ 上の involution h に対して $M_\phi/h\cong S^3$ なら、h は fiber preserving である事がわかる。これより、次の事がわかる。

定理２　S^3 内の link で torus bundle を 2-fold branched cover に持つものは、$K(\alpha;\beta)$ に限る。
特に、S^3 の 2-fold branched cover になる torus bundle は $M_{\alpha,\beta}$ に限る。
但し $M_{\alpha,\beta}$ は $A_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}-1 & -\alpha\\ \beta & \alpha\beta-1\end{pmatrix}$ を monodromy に持つ torus bundle を表わす。



$K(\alpha;\beta)$

$K(\alpha;\beta)$ については次の事が成りたつ。

- $K(\alpha;\beta) \cong K(\alpha',\beta') \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=\pm(\alpha',\beta')$ or $\pm(\beta',\alpha')$
- $K(\alpha;\beta)$ の bridge index が3以下 $\Leftrightarrow$ α or $\beta=\pm 1$

従って、Birman-Hilden [1] を使って次を得る。

系 (Theorem 3 of Ochiai-Takahashi [10])
Orientable torus bundle で Heegaard genus が 2 になるのは $M_{1,\beta}$ $(\beta\in\mathbb{Z})$ に限る。しかも $M_{1,\beta}$ の genus 2 の Heegaard splitting は一意である。

註 $M_{1,\beta}$ は [10] で定義されている $M(\beta-2,-1)$ に同相である。又、[10] では、non-orientable torus bundle についても調べている。

§3. Invariants of Torus Bundles

前セクションで、S^3 の 2-fold branched cover になる torus bundle をすべて挙げたが、このセクションでは、$\{M_{\alpha,\beta}\}$ の同相問題を調べる。又、与えられた $SL(2,\mathbb{Z})$ の元 A に対して、M_A が S^3 の 2-fold branched cover になるかどうかの判定方法を与える。このためには、次の補題が必要である。

<u>補題 2</u>. $A, A' \in GL(2,\mathbb{Z})$ とする。 この時、M_A が $M_{A'}$ に同相であるための必要十分条件は、A が A' 又は A'^{-1} に（$GL(2,\mathbb{Z})$ の中で）conjugate である事である。

<u>補題 3</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ とすると次が成り立つ

(1) $\mathrm{Tr}\, A = 2\varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$ なら、唯一つの non-negative integer n が存在し、A は $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ n & \varepsilon \end{pmatrix}$ に conjugate である。

(2) $\mathrm{Tr}\, A = -1$ (resp. $0, 1$) とすると、A は $A_{1,1}$ (resp. $A_{1,2}$, $A_{1,3}$) に conjugate である。

(3) $|\mathrm{Tr}\, A| \geqq 3$ の時。 $\theta(A) = \{(a-d) + \sqrt{D_A}\}/2c$ （但し $D_A = (a-d)^2 + 4bc = (\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4$ ）は二次の無理数になり、A の $GL(2,\mathbb{Z})$ での conjugate class は、$\theta(A)$ の連分数展開の純循環部分（但し up to cyclic permutation ）で決まる。（[4] 参照）

<u>補題 4</u> $A_{\alpha,\beta}$ について次が成り立つ。

(1) $A_{\alpha,\beta}$, $A_{-\alpha,-\beta}$, $A_{\beta,\alpha}$, $A_{-\beta,-\alpha}$ は互いに conjugate である。（よって以下 $1 \leq \alpha \leq |\beta|$ 又は $0 = \alpha \leq \beta$ としてよい。）

(2) $A_{\alpha,\beta}$ は $A_{\alpha,\beta}^{-1}$ に conjugate である。

(3) $\mathrm{Tr}\, A_{\alpha,\beta} = -2 \Leftrightarrow \alpha = 0$ 。

(4) $\mathrm{Tr}\, A_{\alpha,\beta} = 2 \Leftrightarrow (\alpha,\beta) = (1,4)$ or $(2,2)$.
　更に $A_{1,4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{2,2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(5) $\mathrm{Tr}\, A_{\alpha,\beta} = -1$ (resp. 0, 1)

$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (1, 1)$ (resp. (1, 2), (1, 3))

(6) $|\mathrm{Tr}\, A_{\alpha,\beta}| \geq 3$ の時。 $\theta(A_{\alpha,\beta})$ の連分数展開の純循環部分は次で与えられる。

$[\,\dot{\alpha}, |\dot{\beta}|\,]$ if $\beta < 0$

$[\,\dot{1}, (\dot{\beta-4})\,]$ if $\alpha = 1,\ \beta \geq 5$

$[\,\dot{2}, (\dot{\beta-2})\,]$ if $\alpha = 2,\ \beta \geq 3$

$[\,\dot{1}, (\alpha-2), 1, (\dot{\beta-2})\,]$ if $\alpha \geq 3,\ \beta \geq 3$ 。

(補題の証明は [12] 参照)

以上により、次を得る事が出来る。

<u>定理 3</u> (Branch line の一意性)

$M_{1,6}$ は $M_{2,3}$ に同相である。しかし、この例外を除いて、$M_{\alpha,\beta}$ の位相型は $K(\alpha;\beta)$ の link type で一意に決まる。

<u>定理 4</u> (判定方法)

$A \in SL(2, \mathbb{Z})$ とする。 M_A が S^3 の 2-fold branched cover になるためには、次の (1)〜(3) のいずれかが成り立つ事が必要十分である。

(1) $-2 \leq \mathrm{Tr}\, A \leq 1$,

(2) $\mathrm{Tr}\,A = 2$ で $\mathrm{Coker}(A-I) \cong \mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$,

(3) $|\mathrm{Tr}\,A| \geq 3$ の時。 $\alpha\beta = \mathrm{Tr}(A)+2$ となる整数で、$\theta(A)$ の純循環部分が、$\theta(A_{\alpha,\beta})$ のそれに（up to cyclic permutation で）一致するものがある。

<u>例 1</u>　$H_1(M_A) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_n$ $(0 \leq n \leq 11$, or $n = 14, 16, 19)$
or
$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{2n}$ $(0 \leq n \leq 4)$

$\Rightarrow$ M_A は S^3 の 2-fold branched cover.

<u>例 2</u>　$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$ とすると $H_1(M_A) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{12}$ となり定理 1 で与えられた必要条件を満たす。しかし $\mathrm{Tr}\,A = -10$, $\theta(A) = \sqrt{96}/6 = [1, \dot{1}, 1, 1, \dot{2}]$ となり、定理 4 の条件(3)を満たさない。よって M_A は S^3 の 2-fold branched cover にならない。

<u>例 3</u>　$\dim_{\mathbb{Q}} H_1(M;\mathbb{Q}) \geqq 2$ の時。 M が S^3 の 2-fold branched cover になるための必要十分条件は、$H_1(M) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 又は $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$ となる事である。

§4. Abelian Coverings and Regular Coverings.

Torus bundle については、S^3 の regular covering になるかどうかも判定できる。但しここでは、多様体 M が S^3 の regular cover になるとは、M 上の finite group action G があり、$M/G \cong S^3$ となる事とする。（G の singular orbit は manifold になるとは限らない。）

<u>定理5</u>　Torus bundle M_A に対して次は同値。

(1) M_A は S^3 の regular cover になる。

(2) M_A は S^3 の $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ cover になる。

(3) (イ) $|\mathrm{Tr}\, A| \leqq 2$　又は　(ロ) $|\mathrm{Tr}\, A| \geqq 3$ の時、$\theta(A)$ の純循環部分を $[\dot{\alpha}_1, \cdots, \dot{\alpha}_n]$ とすると、ある奇数 k が存在して $(\alpha_n, \cdots, \alpha_1) = (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \cdots, \alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ となる。

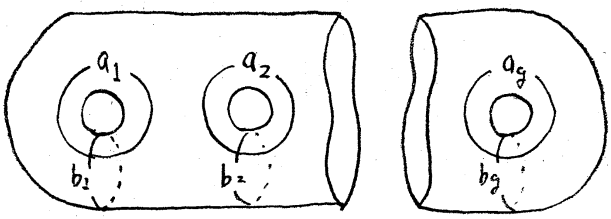
<u>例4</u>　例2 の torus bundle は S^3 の $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-cover になる。

<u>例5</u>　$A_k = \begin{pmatrix} 3k+4 & 3k+1 \\ 2k+3 & 2k+1 \end{pmatrix}$　$(k \geqq 3)$　とすると

$\theta(A_k) = [\dot{1}, 2, k, \dot{1}]$。よって M_{A_k}　$(k \geqq 3)$　は S^3 の regular cover になれない。

<u>*Addendum 1*</u>

$\{a_i, b_i \ (1 \leq i \leq g)\}$ を下図で示される F_g-上の simple closed curves とする。



$t(a_i)$ (resp. $t(b_i)$) で a_i (resp. b_i) に沿っての Dehn twist を表わす。今、$g \geq 3$ とし、$\{n_1, \cdots, n_g\}$ を互いに相異なる自然数の組で $n_i \geqq 3 \ (1 \leq i \leq g)$ なるものとする。

$\Phi = \prod_{i=1}^{2g} t(a_i) \circ t(b_i)^{-n_i+1}$ を F_g-上の homeomorphism とする。

Raymond-Tollefson [11] は、対応する F_g-bundle M_Φ は non-trivial periodic map を持たないと主張した。しかし、それは誤まりである。実際、M_Φ は §1 で定義した link $K(n_1+3, \cdots, n_g+3; 1, \cdots, 1) \subset S^3$ の 2-fold branched cover になり、従って non-trivial involution を持つ事がわかる。

しかし、誤まりの原因は、簡単な計算ミスにあり、Raymond-Tollefson の idea (元元、Conner-Raymond に依る idea) は有効である。例えば、$\{k_1, \cdots, k_g\}$ を互いに相異なり、$k_i \geq 3 \ (1 \leq i \leq g)$ である自然数の組とし、

$\Phi' = \prod_{i=1}^{g} t(a_i) \circ t(b_i)^{-k_i} \circ t(a_i)^2 \circ t(b_i)^{-1}$ とすると、M_Φ は non-trivial periodic map を持たない可能性がある。実際、この $M_{\Phi'}$ については、[11] の議論の前半は成立する。(M_Φ については成りたたない。) もし、次が証明できれば、$M_{\Phi'}$ は non-trivial map を持たない事がわかる。

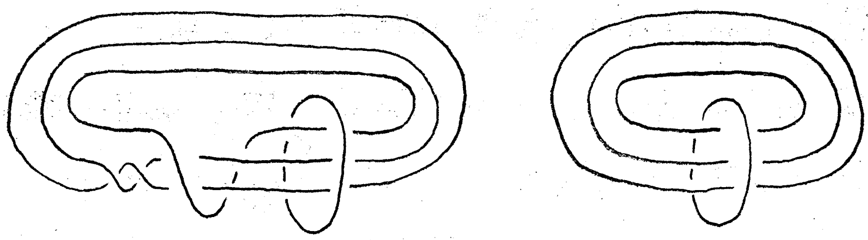
☆ 任意の F_g 上の involution α に対して、Φ' は $\alpha\Phi'\alpha^{-1}$ に homotopic でない。(α は 2-fold branched cover $F_g \to S^2$ に対応する involution としてよい。)

Addendum 2

ここでは次の問題に解答を与える。(Problem 25 of "Knot Theory" Lect. Notes in Math. 685, Springer 1978, p311)

問題　S^3 内の2つの link で、補空間は同相であるが、2-fold branched cover の1次元 Betti 数が異なるものはあるか。

下図で示される二つの link K, K′ を考える。



K　　　K′

すると、KとK'の補空間は同相である。Kは§1で定義されたlink $K(2;2)$と同じであり、従ってKの2-fold branched coverはBetti-numberが2であるtorus bundleになる。一方、K'は(2,2)-torus link  の3つのsumであるので、K'の2-fold branched coverは $\overset{3}{\#}\mathbb{R}P^3$ となり、従ってBetti-numberは0である。

更に次が成り立つ事がわかる。

(1) 2-components linkの2-fold branched coverのBetti-numberはlink complementで決まる。

(2) componentsの数が3以上の時は、上は成り立たない。

(3) $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ (μ-components link) に対し、$d = g.c.d\{lk(K_i, K_j)\ \ 1 \le i < j \le \mu\}$ はlink complementで決まる。更に、もし $d \equiv 0 \pmod 2$ なら、2-fold branched coverの1次元Betti-numberはlink-complementで決まる。

(4) μ-components link Lの2-fold branched coverを $\Sigma_2(L)$ とすると $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(\Sigma_2(L); \mathbb{Z}_2) = \mu - 1$ となる。従ってlinkの2-fold branched coverの1次元$\mathbb{Z}_2$-Betti numberはcomponentsの数で決まる。

参考文献

[1] J.S. Birman - H.M. Hilden: Heegaard splittings of branched coverings of S^3, Trans. A.M.S. 213 (1975) 313-352.

[2] G. Bredon: Introduction to compact transformation groups, 1972, Academic Press.

[3] R. H. Fox: A note on branched cyclic coverings of spheres, Rev. mat. Hisp.-Amer., 32 (1972), 158-166.

[4] G. H. Hardy - E. M. Wright: An introduction to the theory of numbers, 1964, Oxford: Clarendon.

[5] U. Hirsh - W.D. Neumann: On cyclic branched coverings of spheres, Math. Ann., 215 (1975), 289-291

[6] Y. Kikuchi: On Heegaard splittings of torus bundles, Master thesis, Tokyo Institute of Technology, 1980.

[7] C. G. Latimer - C.C. MacDuffee: A correspondence between classes of ideals and classes of matrices, Ann. of Math., 34 (1933), 313-316

[8] J.M. Montesinos: 3-variétés qui ne sont pas des revêtments cycliques ramifiés sur S^3, Bull. A.M.S., 80 (1974) 845-846.

[9] D. A. Neumann: 3-manifolds fibering over S^1, Proc. A.M.S., 58 (1976), 353-356.

[10] M. Ochiai - M. Takahashi : Heegaard diagrams of torus bundles over S^1, preprint.

[11] F. Raymond - J. L. Tollefson : Closed 3-manifolds with no periodic maps, Trans. A. M. S. 221 (1976) 403 - 418.

[12] M. Sakuma : Surface bundles over S^1 which are 2-fold branched cyclic coverings of S^3, Math. Semi. Notes Kove Univ., 9 (1981) 159 - 180.

[13] O. Taussky : On a theorem of Latimer and MacDuffee, Can. J. Math., 1 (1949), 300-302.

[14] J. L. Tollefson : Periodic homeomorphisms of 3-manifolds fibered over S^1, Trans. A. M. S., 223 (1976), 223 - 234.