

パラメータ依存にもとづく

一次元写像系の周期倍現象の理論

京大 基研 大同寛明

1. まえおき

力学系が chaotic なふるまいを示す状態に到る様式のうちで、最もポピュラーなものとして知られているのが、周期倍現象を経由してのものである。ここで、周期倍現象とは、いわゆる熊手型分岐 (pitchfork bifurcation) 現象のことであり、系の分岐パラメータを変えていくとき、次々と、先行する周期解の不安定化が起り、2 倍の周期をもった新しい周期解が分岐するという現象である¹⁾。このような 2^n の周期 (例えば、離散力学系であるとして) をもつ周期解の分岐は、あるパラメータ値に対して集積し、そこから chaotic なふるまいが現われ始める。このような現象は、はじめ、May らによって、その存在と重要性が主張され、それ以後、彼らの調べた一次元写像系にとどまらず、微分方程式を含む、様々な系において見出された。最近では、流体系など、現実の

系の実験において，周期倍現象を観測したという報告も増えつつある。

ところで，Feigenbaum²⁾は，このような現象において，系の詳細に依らない universal な性質があることを示し，その理論的おくぐみを与えた^{*}。なおでも有名であり，重要なのは，周期解が極大安定になるパラメータ値が，系によらない，universal な率， $\delta_F = 4.66920\dots$ で分岐の集積点へと収束することである。現在では，彼の理論は，パワースペクトルせ，リヤプノフ数のふるまい等，様々な問題に應用されており，また，分岐の集積点近傍で，さらに詳しい universal な性質が見い出されている。しかしながら，彼の理論は，分岐パラメータの値としては，周期解の極大安定点に相当する値のみを考えに入れているため，上のような問題に対し，extensive で十分な解答を与えていると思われない。物理的には，いろいろな量が，分岐の集積点近傍で，パラメータを連続的に変えていくとき，どのようにふるまうかという問題が，とりわけ重要と考えられるが，彼の理論では，このような問いに，満足に答えられえないのである。本稿では，パラメータ依存を変数 (x) 依存と同等に扱う事によつて，そのような問いにも答えられうる理論的おくぐみが可能であることを示す。

*) 詳細は文献を参照して下さい。

(注. 表題は, パラメータ依存に「もとづく」となっています。が, 実は, 「ふくむ」の方がより適切です。しかし, ここでは, 同じタイトルをもつ筆者の速報³⁾に従って書いていきますので, 題は変えないでおきました。この事情は, 以下に示すのよりも, より系統的な取り扱いによって明確となりますが, それについては, 文献⁴⁾を参照して下さい。)

2. Recursion relation

次のような一次元写像系を考える。

$$x_{n+1} = F(x_n, \tau) \quad (1)$$

この系は周期倍現象を示すとし, 2^k 周期点を $x_k^*(\tau)$ (又は, 単に x_k^*) とおき, それが分岐する点をあらわすパラメータ (τ) の値を τ_k とおく。まず, 次の恒等式に注意する。

$$F^{(2^k)}(F^{(2^k)}(x_k^* + y)) = F^{(2^{k+1})}(x_k^* + y) \quad (2)$$

ここで, τ は簡単のため省略した。また, $F^{(j)}$ は F の j th iterate, つまり, $\underbrace{F(F(F(\dots(F(x))\dots))}_{j}$ をあらわす。ここで (2)

の両辺を y について Taylor 展開することによって, 次のような式がえられる。

$$\lambda_{k+1}^{(1)} = a_k + 2b_k \varepsilon_{k+1} + 3c_k \varepsilon_{k+1}^2 + 4d_k \varepsilon_{k+1}^3 + 5e_k \varepsilon_{k+1}^4 + \dots \quad (3)$$

$$\lambda_{k+1}^{(2)} = 2b_k \varepsilon_{k+1} + 6c_k \varepsilon_{k+1}^2 + 12d_k \varepsilon_{k+1}^3 + 20e_k \varepsilon_{k+1}^4 + \dots \quad (4)$$

$$\lambda_{k+1}^{(3)} = 6c_k \varepsilon_{k+1}^2 + 24d_k \varepsilon_{k+1}^3 + 60e_k \varepsilon_{k+1}^4 + \dots \quad (5)$$

$$\lambda_{k+1}^{(4)} = 24d_k \varepsilon_{k+1}^3 + 120e_k \varepsilon_{k+1}^4 + \dots \quad (6)$$

$$\lambda_{k+1}^{(5)} = 120e_k \varepsilon_{k+1}^4 + \dots, \quad (\text{and so on}) \quad (7)$$

ここで, $\lambda_k^{(i)}$ は 次式によつて定義される。

$$\lambda_k^{(i)}(\tau) \equiv \frac{\partial^i}{\partial x^i} F^{(2^k)}(x, \tau) \Big|_{x=x_k^*} \times (\alpha_k^* - \alpha_{k-1}^*)^{i-1} \quad (i \geq 1) \quad (8)$$

また, a_k, \dots は, 以下のような, $\lambda_k^{(i)}$ の 函数である。

$$\begin{aligned} a_k &\equiv (\lambda_k^{(1)})^2, \quad b_k \equiv \lambda_k^{(1)}(1 + \lambda_k^{(1)})\lambda_k^{(2)}/2 \\ c_k &\equiv \lambda_k^{(1)}\{1 + (\lambda_k^{(1)})^2\}\lambda_k^{(3)}/6 + \lambda_k^{(1)}(\lambda_k^{(2)})^2/2 \\ d_k &\equiv \lambda_k^{(1)}\{1 + (\lambda_k^{(1)})^3\}\lambda_k^{(4)}/24 + (\lambda_k^{(2)})^3/8 \\ &\quad + (1 + 3\lambda_k^{(1)}/2)\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}\lambda_k^{(3)}/6 \\ e_k &\equiv \lambda_k^{(1)}\{1 + (\lambda_k^{(1)})^4\}\lambda_k^{(5)}/120 + \lambda_k^{(1)}\{1 + 2(\lambda_k^{(1)})^2\}\lambda_k^{(2)}\lambda_k^{(4)}/24 \\ &\quad + \left\{ (1 + 3\lambda_k^{(1)}/2)(\lambda_k^{(1)})^2 + (\lambda_k^{(1)})^2\lambda_k^{(2)} \right\} \lambda_k^{(3)}/12 \\ &\quad (\text{and so on}) \end{aligned} \quad (9)$$

さらに, $\varepsilon_{k+1} \equiv (\alpha_{k+1}^* - \alpha_k^*) / (\alpha_k^* - \alpha_{k-1}^*)$ であり, これは,

(2) で $\gamma = \alpha_{k+1}^* - \alpha_k^*$ とおくことにより, 次の式をみたすことが示される。

$$1 = a_k + b_k \varepsilon_{k+1} + c_k \varepsilon_{k+1}^2 + d_k \varepsilon_{k+1}^3 + e_k \varepsilon_{k+1}^4 + \dots \quad (10)$$

さて, ε_{k+1} が $\lambda_k^{(i)}$ の 函数として (10) によつて決まることを考えると, (3), (4), ... は, 一組の量 ($\lambda_k^{(i)}$) を 他の組の量

$(\lambda_{k+1}^{(1)})$ に移す recursion relation になっていることがわかる。しかもこの recursion relation は F に依らない, universal なものである。実は, この事実こそが, 周期倍現象において見出される諸種の universality の源である。

3. Illustration of the framework

上で求めた exact な recursion relation の代わりに, まず次の, はるかに簡単な recursion relation を取り扱う。これによって, 本稿で述べる理論的あくぐみの大すじが明らかになるものと考えらる。

$$\lambda_{k+1}^{(1)} \cong 3 - 2(\lambda_k^{(1)})^2 \quad (11)$$

これは, May と Oster によって提出されたものであり,¹⁾ $\lambda_k^{(1)}$ (われわれの記法で) のみを含むという非常に簡単な recursion relation ながら, いくつかの問題に対し, おなり良い結果を与えることが知られている。(11) は, (10) を用いて (3) のうち, b_k を含む項を消去し, できた式で, ε_{k+1} を含む項を捨てる (ε_{k+1} は小さい量なので) ことによってえられる。さて, $\lambda_k^{(1)}$ は 2^k 周期解の安定性を支配する量であり, τ_k の定義によつて,

$$\lambda_k(\tau_k) = 1 \quad \text{かつ} \quad \lambda_k(\tau_{k+1}) = -1 \quad (12)$$

でなければならぬ。つまり, 分岐パラメータ τ が, τ_k から τ_{k+1} まで変わる間に $O(1)$ の変化をする。そこで, 次のよ

うに、このパラメータ-依存性をスケールすることによって、新しい関数 $\hat{\lambda}_k$ を導入する。

$$\lambda_k^{(1)}(\tau) \equiv \hat{\lambda}_k \left(\frac{\tau - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} \right) \quad (13)$$

すると (11) は次のような functional recursion relation となる。

$$\hat{\lambda}_{k+1}(\gamma) = 3 - 2 \{ \hat{\lambda}_k (1 + \delta_k^{-1} \gamma) \}^2 \quad (14)$$

ここで、 $\delta_k \equiv (\tau_{k+1} - \tau_k) / (\tau_{k+2} - \tau_{k+1})$ であり、これは、 $\hat{\lambda}_{k+1}(1) = -1$ ((12) を参照) を用いて、

$$\hat{\lambda}_k (1 + \delta_k^{-1}) = -\sqrt{2} \quad (15)$$

から、 $\hat{\lambda}_k$ が与えられると同時に決まる量である。よって、(14) は、関数 $\hat{\lambda}_k$ を関数 $\hat{\lambda}_{k+1}$ に移す recursion relation ということになるのである。今、ここで、 $\hat{\lambda}_k$ が $k \rightarrow \infty$ で、ある関数 $\hat{\lambda}$ に収束すると仮定する。もちろん、(15) によつて、そのとき δ_k もある値 δ に収束することになる。この仮定の下に、(14) から、次の函数方程式をうる。(但し、 $\hat{\lambda}(1) = -1$)

$$\hat{\lambda}(\gamma) = 3 - 2 \{ \hat{\lambda}(1 + \delta^{-1} \gamma) \}^2 \quad (\gamma \geq 0) \quad (16)$$

これはつまり、recursion relation (14) の固定点方程式である。これを、 δ を固有値、 $\hat{\lambda}$ を固有函数とする非線形の固有値問題とみなすこともできるであろう。これを解くことによつて、大きな k に対する λ_k (つまり 2^k 周期解のリヤプノフ数)

と、 γ_R の収束率である、 δ がえられる。

(16)を解くことを考えよう。まず、 y が1のオーダーであり、他方、数値計算などから知られているとおり、 δ は5のオーダーである。したがって $\delta^{-1}y$ は、小さな量とみなせる。そこで、(16)の右辺を $\delta^{-1}y$ で展開すると、($t \equiv \delta^{-1}y$)

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(y) = & \{3 - 2\hat{\lambda}^2(1)\} - 4\hat{\lambda}(1)\hat{\lambda}'(1)t \\ & - 2\{[\hat{\lambda}'(1)]^2 + \hat{\lambda}(1)\hat{\lambda}''(1)\}t^2 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

がえられる。高次の寄与は小さいので、(17)の右辺を t^n の項までで切断し、その式を使って $\hat{\lambda}(1) \dots \hat{\lambda}^{(n)}(1)$ に対する閉じた連立方程式を立てればよいであろう。その際、 δ が未定のパラメータとして残るが、これは $\hat{\lambda}(1) = -1$ の条件から決められる。これが、われわれの第 n 次近似の内容である。次にその結果を記す。

- (i) $n = 1$; $\delta = 4$, $\hat{\lambda}(y) = 1 - 2y$
 (ii) $n = 2$; $\delta = 5.842$, $\hat{\lambda}(y) = 1 - 1.626y - 0.374y^2$
 (iii) $n = 3$; $\delta = 5.994$,

$$\hat{\lambda}(y) = 1 - 1.609y - 0.372y^2 - 0.020y^3$$

δ についても、 $\hat{\lambda}(y)$ についても、収束がはやくことがわかる。ここでは省略するが、実は、 $\delta = 6$ であることが示せる^{3),4)}ので、上の近似法の有効性は明らかである。

4. Exact recursion relation の場合

わくぐみは前節で示されたので、この節は概略のみにとどめる。Exact recursion relation (3), (4), ... は、もちろん、無限個の量 $\lambda_k^{(i)}(\gamma)$ ($i=1, 2, \dots$) に対するものである。そこで、それらの全てに対し、

$$\lambda_k^{(i)}(\gamma) \equiv \hat{\lambda}_k^{(i)} \left(\frac{\gamma - \gamma_k}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} \right) \quad (i \geq 1) \quad (19)$$

によって新函数 $\hat{\lambda}_k^{(i)}$ を導入する。ところで、(10) は、もちろん、 ε_{k+1} についてそのままとくことはできない。しかし、何れにせよ、本節でも、3. で示されたのと同じ近似方法を用いるので、実は、 ε_{k+1} も、 $t_k \equiv \delta_k^{-1} \gamma$ の巾級数の形で非めておけば充分である。そこで (19) を (10) の a_k, b_k, \dots の中の $\lambda_k^{(i)}$ の所に代入し、 $\gamma \equiv (\gamma - \gamma_{k+1}) / (\gamma_{k+2} - \gamma_{k+1})$ とおくと次の式がえられる。

$$\varepsilon_{k+1} = 2 \left\{ \frac{-\hat{\lambda}_k^{(1)}(1)}{\frac{2}{3}\hat{\lambda}_k^{(1)}(1) + [\hat{\lambda}_k^{(1)}(1)]^2} \right\}^{1/2} t_k^{1/2} - \frac{\hat{\lambda}_k^{(1)}(1)\hat{\lambda}_k^{(2)}(1)}{\frac{2}{3}\hat{\lambda}_k^{(1)}(1) + [\hat{\lambda}_k^{(1)}(1)]^2} t_k + \dots \quad (20)$$

つまり、 ε_{k+1} が $\hat{\lambda}_k^{(i)}$ を使って表わされたのである。こうして、(19) と (20) を (3), (4), ... に用いることにより、exact recursion relation ($\hat{\lambda}_k^{(i)}$ を $\hat{\lambda}_{k+1}^{(i)}$ に移す) のあらわな形が (δ_k の $\hat{\lambda}_k^{(i)}$ 依存性を除いて) えられる。そこで、前と同様に、

$\hat{\lambda}_k^{(n)} \rightarrow \hat{\lambda}^{(n)}$ ($\delta_k \rightarrow \delta$) ($k \rightarrow \infty$) を仮定すれば, $\hat{\lambda}^{(n)}$ と δ を決定する函数方程式がえられる。これに対して, 前と同様の近似法を使うと (以下では $\hat{\lambda}^{(n)}(y)$ ($n \geq 2$) に対する結果は省略する), 次の結果をうる。

$$(i) \quad n=1; \quad \delta=4, \quad \hat{\lambda}^{(1)}(y) = 1 - 2y$$

$$(ii) \quad n=2; \quad \delta=4.6450,$$

$$\hat{\lambda}^{(2)}(y) = 1 - 1.8508y - 0.1492y^2 \quad (21)$$

$n=1$ の場合は, 3. の結果 ((18)参照) と同一であるが, $n=2$ の場合は, 明らかに違っており, δ の値は exact value, 4.66920... (1. 参照) に比べ, 2次近似の値としては非常によいことがわかる。 $\hat{\lambda}^{(n)}(y)$ の結果のよさを調べるために,

$$F(x, r) = x e^{r(1-x)} \quad (22-a)$$

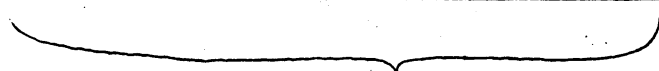
$$F(x, r) = rx(1-x) \quad (22-b)$$

の2つの場合について, 数値計算で $\hat{\lambda}_k^{(n)}$ ($k=1 \sim 5$) を求めた。その結果は, k が大きくなるにつれて $\hat{\lambda}_k^{(n)}$ がかなりはやく収束していくこと, また, その極限 ($k=5$) 函数が, (22-a) と (22-b) の両系で異ならぬ (universality) こと, さらに, 理論式 (21) が, よくその函数と一致していることを示している (Table 1)。つまり, われわれの framework は, 2次近似ですらも非常によい結果を生み出すことが, 知られる。

* * * * *

Table 1

m	k = 1	Simulation					Theory
		2	3	4	5	5	
1	.895	.906	.907	.907	.907	.907	.907
2	.687	.716	.718	.719	.719	.719	.719
3	.480	.524	.527	.528	.529	.529	.528
4	.276	.329	.333	.335	.335	.335	.334
5	.074	.132	.136	.138	.138	.138	.137
6	-.126	-.068	-.064	-.062	-.062	-.062	-.063
7	-.323	-.270	-.267	-.265	-.265	-.265	-.266
8	-.519	-.475	-.472	-.471	-.471	-.471	-.472
9	-.713	-.683	-.681	-.680	-.680	-.680	-.681
10	-.905	-.894	-.893	-.893	-.892	-.892	-.893


 (22-a)


 (22-b)

<注> タテが Y 軸に相当し、 m の所の Y の値は $(2m-1)/20$ である。
 また k のカラムはその Y の値における $\lambda_k^*(Y)$ の値から
 なっている。

5. おわりに

以上では, $\hat{\lambda}_k^{(n)}$ の $k \rightarrow \infty$ における収束を仮定してきたが, その帰結が, よく数値計算の結果と合うことから, 少なくとも, (22) のような系については, その正しさは, かなり確かなものと思われる。とはいえ, この点は, 数学的には最も重要な点であり, どのような F に対してそれが真であるか, 今後に残されている重要な問題である。(ちなみに, recursion relation (14) については, その固定点の線形安定性が, かなり一般的な条件下で, 証明できる⁴⁾)。また, 1. であげたような様々な問題に適用していくという課題が残っている⁵⁾。これらについては, また別の機会に報告する。(なお, 以上では, 概略のみにとどめましたので, より詳しくは, 下の文献 3) と 4) を参照して下さい。)

文 献

- 1) R.M. May and G.F. Oster, *Am. Nat.* 110 (1976), 573.
 - 2) M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19 (1978), 25; 21 (1979), 669.
 - 3) H. Daido, *Phys. Lett.* 83A (1981), 246.
 - 4) H. Daido, Period-doubling bifurcations and associated universal properties including parameter dependence, to be published.
 - 5) H. Daido, *Phys. Lett. A* (to appear) など。
- (詳しい文献については 3), 5) の文献を参照して下さい。)