数理解析研究所講究録
443巻 1981年 70-101

位相同型の性質について

都立大 理　伊達山正人
早大 理工　平出 耕一

I

§0. 序　Takens [9] は，Zeeman の寛容安定性予想についての研究の中で，OE-system の概念を導入した。森本 [7] は，コンパクト空間上の位相力学系が pseudo orbit tracing property をもつならば，その位相力学系は OE-system であることを証明した。また [7] には，n 次元トーラス群 $\mathbb{T}^n$ 上の群自己同型 σ に関して，$(\mathbb{T}^n, \sigma)$ が OE-system ならば $(\mathbb{T}^n, \sigma)$ は pseudo orbit tracing property をもつか，という問題が提出されている。ここでは，距離をもつコンパクト群 X と，X 上の自己同型 σ が与えられたとき，(X, σ) が OE-system であることと，pseudo orbit tracing property をもつことが同値であることを証明する。

§1　定理の主張．　(X, d) をコンパクト距離空間，σ

をXからそれ自身の上への同相写像とせよ。 Xの点列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$がσの <u>δ-pseudo orbit</u> であるとは，$d(\sigma x_i, x_{i+1})<\delta$ が，すべての$i\in\mathbb{Z}$ に対して成立することである。δ-pseudo orbit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が，点$x\in X$ によって <u>ε-trace</u> されるとは $d(\sigma^i x, x_i)<\varepsilon$ がすべての $i\in\mathbb{Z}$ に対して成立することである。位相力学系(X,σ)が <u>pseudo orbit tracing property</u>（P.O.T.P. と略記）をもつとは，任意の$\varepsilon>0$ に対して$\delta>0$が存在して，任意のδ-pseudo orbit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が，ある点$x\in X$ によって ε-trace されることである。

$C(X)$ はXの空でない閉部分集合の全体で，次のような Hausdorff metric $\bar{d}$ を持つとせよ； $A, B\in C(X)$ に対して，

$$\bar{d}(A,B)=\max\left(\max_{a\in A} d(a,B),\ \max_{b\in B} d(b,A)\right),$$ ただし $d(a,B)=\min_{b\in B} d(a,b)$.

$C(X)$は，距離$\bar{d}$に関してコンパクト距離空間である。Xの閉部分集合Aがσの <u>extended orbit</u>であるとは，任意の$\varepsilon>0$ に対して，ε-pseudo orbit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が存在して，$\bar{d}(A, \overline{\{x_i; i\in\mathbb{Z}\}})<\varepsilon$ が成立することである（“$\bar{E}$”は集合Eの閉包を表わす）。 点$x\in X$ に対して $O_\sigma(x)=\overline{\{\sigma^i x; i\in\mathbb{Z}\}}$，$O(\sigma)=\overline{\{O_\sigma(x); x\in X\}}$（この場合の閉包は$C(X)$の位相に関してとっている）とおけ。$E(\sigma)$は，$\sigma$の extended orbit の全

体の，$C(X)$ における閉包とする。明らかに $O(\sigma)\subset E(\sigma)$ が成立する。位相力学系 (X,σ) が OE-system であるとは，$O(\sigma)=E(\sigma)$ が成立することをいう。位相力学系 (X,σ) が，P.O.T.P. を持つこと，OE-system であることは，metric d の選び方に依らない性質である。次の定理が知られている。

定理A（森本[7]）　X をコンパクト距離空間，σ を X からそれ自身の上への同相写像とせよ。このとき (X,σ) が P.O.T.P. を持つならば，(X,σ) は OE-system である。

我々は，次の定理を証明する。

定理　X は距離をもつコンパクト群，σ は X 上の自己同型とせよ。このとき，(X,σ) が OE-system であることと，P.O.T.P. をもつこととは同値である。

この定理は，X が n 次元トーラス群の場合が [7] で問題として提出されている。$n\leqq 3$ の場合については，T. Sasaki [8] で解決されている。

§2　自己同型の性質．　この節では，我々は定理を証明するために使われる基本的な性質を示す。この節を通じて，X は両側不変距離 d をもつコンパクト群，σ は X 上の自己同型とする。K が X の σ-不変 $(\sigma K=K)$ 部分群であるとき，σ の K への制限，及び左側剰余空間 X/K に導入された同相写像は，混乱のない限り同じ記号 σ で表わされる。簡単のた

めに，X/K 上の距離は，つねに $d_K(xK, yK) = \min_{k \in K}(d(x, yk))$ $(x, y \in X)$ で定義される距離 d_K だけを考える。

P.1. K は X の σ－不変部分群とする。このとき次の(a)と(b)が成立する。

(a) (X, σ) が P.O.T.P. をもつならば，$(X/K, \sigma)$ も P.O.T.P. をもつ。

(b) (X, σ) が OE-system ならば，$(X/K, \sigma)$ も OE-system である。

証明．π を X から X/K の上への自然な射影とする。X/K における任意の δ-pseudo orbit $\{x_i K\}_{i \in \mathbb{Z}}$ に対して，X における δ-pseudo orbit $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ が存在して $\pi y_i = x_i K$ $(i \in \mathbb{Z})$ が成立することに注意しよう。

(a)を示す。任意の $\varepsilon > 0$ をとる。ある $\delta > 0$ が存在して，X における任意の δ-pseudo orbit は，ある X の点によって ε-trace される。今 X/K における δ-pseudo orbit $\{x_i K\}_{i \in \mathbb{Z}}$ をとる。上の議論から $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ は X における δ-pseudo orbit としてよい。このとき，ある点 $x \in X$ が存在して $d(x_i, \sigma^i x) < \varepsilon$ $(i \in \mathbb{Z})$ が成立する。したがって $d_K(x_i K, \pi(\sigma^i x)) = d_K(\pi x_i, \sigma^i(\pi x)) < \varepsilon$.

(b)を示す。任意の $E \in E(\sigma_{X/K})$ をとる。$E(\sigma_{X/K})$ の定義と(a)の上の議論から，任意の $n > 0$ に対して，X における $\frac{1}{n}$－

pseudo orbit $\{x_{n,i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$が存在して，$\bar{d}_K(E, \{\pi x_{n,i}\ ;\ i\in\mathbb{Z}\}) < \frac{1}{n}$となる。$E_n=\{x_{n,i}\ ;\ i\in\mathbb{Z}\}\ (n>0)$とおけ。$C(X)$はコンパクトだから，部分列$\{n_j\}_{j\in N}$がとれて，ある$E'\in C(X)$に対して$E_{n_j}\to E'$となる。$E'\in E(\sigma)$であるから，$(X,\sigma)$がOE-systemであることより$E'\in O(\sigma)$。$\pi E'=E$であるから，$E\in O(\sigma_{X/K})$が成り立つ。

P.2　KはXのσ－不変開部分群とする。このとき次の(a)及び(b)が成立する。

(a)　次のi)とii)は同値である。

i)　(X,σ)はP.O.T.P.をもつ。

ii)　(K,σ)はP.O.T.P.をもつ。

(b)　(X,σ)がCE-systemであるならば，(K,σ)もまたCE-systemである。

証明.　K及び$X\setminus K$はともにコンパクトであるから，$d(K,X\setminus K)=\min_{k\in K,x\in X\setminus K} d(k,x)>0$．よって$\delta>0$が十分小さいとき，Kの中の点列をδ－traceする点はKに含まれる。このことから(a)のi)⇒ii)及び(b)は容易に導かれる。X/Kは有限集合であるから，$\rho>0$が十分小なるとき，Xのδ－pseudo orbit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$は$\sigma^i x_0\in x_iK\ (i\in\mathbb{Z})$をみたす。(a)ii)⇒i)をそう。任意の$\varepsilon>0$をとる。$(K,\sigma)$は，P.O.T.P.をみたすから，$\delta>0$が存在してKの任意のδ－

pseudo orbit は ε-trace される。今, X の δ-pseudo orbit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ をとる。$x_i=\sigma^i x_0 k_i$ なる $k_i\in K$ が任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対して存在すると仮定してよい。$d(k_{i+1},\sigma k_i)=d(\sigma^{i+1}x_0 k_{i+1},\sigma^{i+1}x_0\sigma k_i)=d(x_{i+1},x_i)<\delta\ (i\in\mathbb{Z})$ であるから, $\{k_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ は K の δ-pseudo orbit である。よって, ある $k\in K$ に対して $d(\sigma^i k,k_i)<\varepsilon\ (i\in\mathbb{Z})$ が成立する。$x=x_0 k$ とおけば, $d(\sigma^i x,x_i)=d(\sigma^i x_0\sigma^i k,\sigma^i x_0 k_i)=d(\sigma^i k,k_i)<\varepsilon$ 。

P. 3　X の σ-不変部分群の列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ が存在して, $X_n\supset X_{n+1}\ (n\geq 1)$ かつ $\bigcap_{n\geq 1}X_n=\{e\}$ (e は X の単位元) を, みたすとせよ。任意の $n\geq 1$ に対して, $(X/X_n,\sigma)$ が P.O.T.P. をもつならば, (X,σ) は P.O.T.P. をもつ。

証明.　任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $n\geq 1$ が存在して, $\mathrm{diam}(X_n)<\frac{\varepsilon}{2}$ をみたす。$(X/X_n,\sigma)$ は P.O.T.P. をみたすから, $\delta>0$ が存在して, X/X_n の任意の δ-pseudo orbit は $\varepsilon/2$-trace される。$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を X における δ-pseudo orbit とする。このとき $\{x_i X_n\}_{i\in\mathbb{Z}}$ は X/X_n における δ-pseudo orit である。よって $x\in X$ が存在して, $d(\sigma^i x X_n, x_i X_n)<\varepsilon/2\ (i\in\mathbb{Z})$ となる。このとき, $d(\sigma^i x,x_i)\leq d_{X_n}(\sigma^i x X_n,x_i X_n)+\mathrm{diam}(X_n)<\varepsilon$. よって, (X,σ) は P.O.T.P. をもつ。

2.4. KをXのσ-不変部分群とせよ。もし$(X/K, \sigma)$と(K, σ)がともにP.O.T.P.をみたすならば，(X, σ)もP.O.T.P.をみたす。

証明．(K, σ)はP.O.T.P.をもつから任意の$\varepsilon>0$に対して$0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$が存在し，$K$における任意の$\delta$-pseudo orbitは$\frac{\varepsilon}{2}$-traceされる。$0<\gamma<\delta/3$と$d(x, y)<\gamma$ $(x, y\in X)$ならば$d(\sigma x, \sigma y)<\frac{\delta}{3}$なるようにとる。$(X/K, \sigma)$はP.O.T.P.をもつから，$0<\eta<\gamma$が存在して，$X/K$における任意の$\eta$-pseudo orbitは，$\gamma$-traceされる。今，$X$における$\eta$-pseudo orbit $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$をとれ。このとき$\{x_iK\}_{i\in\mathbb{Z}}$は$X/K$における$\eta$-pseudo orbitである。よって，$x\in X$が存在して，$d(\sigma^i xK, x_iK)<\gamma$ $(i\in\mathbb{Z})$である。すなわち任意の$i\in\mathbb{Z}$に対して$k_i\in K$が存在して，$d(\sigma^i x k_i, x_i)<\gamma$となる。

$d(\sigma k_i, k_{i+1})=d(\sigma^{i+1}x\sigma k_i, \sigma^{i+1}x k_{i+1})\leqq d(\sigma^{i+1}x\sigma k_i, \sigma x_i)$
$+d(\sigma x_i, x_{i+1})+d(x_{i+1}, \sigma^{i+1}x k_{i+1})<\delta$ $(i\in\mathbb{Z})$であるから，$\{k_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$はKにおけるδ-pseudo orbitである。よって，$k\in K$が存在して$d(\sigma^i k, k_i)<\varepsilon/2$ $(i\in\mathbb{Z})$となる。このとき，

$d(\sigma^i(xk), x_i)<\gamma+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ $(i\in\mathbb{Z})$となり，$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$は，xkによってε-traceされた。

Xの正規部分群Kが存在して，Xが直積 $X=\bigotimes_{i=-\infty}^{\infty}\sigma^i K$と表わされるとき，$(X, \sigma)$を<u>shift自己同型</u>とよぶ。

<u>P 5.</u> (X,σ) が shift 自己同型ならば，(X,σ) は P.O.T. P. をもつ。

証明．(X,σ) が shift 自己同型であるから，ある正規部分群 K が存在して，$X=\otimes_{i=-\infty}^{\infty}\sigma^i K$ と表わされる。よって，$x\in X$ は，$x=(\cdots,\sigma^{-1}x_{-1},x_0,\sigma x_1,\cdots)$ $(x_i\in K,\ i\in\mathbb{Z})$ の形に表わされる。同相写像 $h:X\to$ on $Y=\otimes_{i=-\infty}^{\infty}K_i$ $(K_i=K,\ i\in\mathbb{Z})$ を $x=(\cdots,\sigma^{-1}x_{-1},x_0,\sigma x_1,\cdots)\in X$ に対して，$h(x)=(\cdots,x_1,x_0,x_{-1},\cdots)$ と定義する。Y 上の shift $\tilde{\sigma}$ を $\tilde{\sigma}(\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots)=(\cdots,x_0,x_1,x_2,\cdots)$ によって定義すれば，$h\sigma=\tilde{\sigma}h$ が成立する。したがって，$(Y,\tilde{\sigma})$ が P.O.T. P. をもつことを示せば十分である。d を K 上の距離とせよ。Y 上の距離 $\tilde{d}$ を

$\tilde{d}(x,y)=\max_{i\in\mathbb{Z}}2^{-|i|}d(x_i,y_i)$ ただし，$x=(\cdots x_{-1},x_0,x_1,\cdots)$，$y=(\cdots,y_{-1},y_0,y_1,\cdots)$，なるものとする。任意の $\varepsilon>0$ に対して，$n>0$ が存在して，$2^{-n}\cdot\mathrm{diam}\,K<\varepsilon$ となる。$\delta>0$ を $2^n\delta<\varepsilon$ なるものとする。今，Y における δ-pseudo orbit $\{x^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ $(x^{(i)}=(\cdots,x^{(i)}_{-1},x^{(i)}_0,x^{(i)}_1,\cdots),\ i\in\mathbb{Z})$ に対して $x=(\cdots,x^{(-1)}_0,x^{(0)}_0,x^{(1)}_0,\cdots)$ とおけば，$\tilde{d}(\tilde{\sigma}^i x,x^{(i)})=\max_{j\in\mathbb{Z}}2^{-|j|}d(x^{(i+j)}_0,x^{(i)}_j)\leq\max(\varepsilon,\max_{|j|<n}d(x^{(i+j)}_0,x^{(i)}_j))$．一方 $d(x^{(i+j)}_0,x^{(i)}_j)<2^{|j|+1}\delta$ $(j\in\mathbb{Z})$ であるから，$\tilde{d}(\tilde{\sigma}^i x,x^{(i)})<\varepsilon$ $(i\in\mathbb{Z})$ が成立する。

P6. [2] Xが完全不連結群ならば，(X,σ)はP.O.T.P.をもつ。

Xが solenoid群 であるとは，Xが有限次元連結アーベル群であることを言う。

P7. [1] Xがアーベル群であるとする。このとき，σ-不変完全不連結部分群X_1，σ-不変連結部分群X_C，X_Bが存在して，X_C，X_Bは次の条件をみたす；X_Cのσ-不変部分群の単調減少列$\{X_{C,n}\}_{n\geq 0}$が存在して$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_{C,n}=\{e\}$かつ$X_C/X_{C,n}$ $(n\geq 0)$は solenoid群であり，X_Bのσ-不変部分群の単調減少列$\{X_{B,n}\}_{n\geq 0}$が存在して$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_{B,n}=\{e\}$かつ$(X_{B,n-1}/X_{B,n},\sigma)$ $(n\geq 1)$は shift自己同型である。さらに$X=X_1X_CX_B$が成立する。

P8. Xが連結とする。このとき(X,σ)がOE-systemであるならば，(X,σ)は topologically transitive である。とくに，$X\neq\{e\}$で(X,σ)が isometry であるならば，(X,σ)は topologically transitive ではないから(X,σ)はOE-system ではない。

証明. Xはコンパクトかつ連結だから，任意の$\delta>0$に対して，$k>0$と$x_1,\cdots,x_k\in X$が存在して$\bigcup_{i=1}^{k} U(x_i,\delta)=X$かつ$d(x_i,x_{i+1})<\frac{\delta}{2}$ $(1\leq i\leq k-1)$となる。ただし$U(x_i,\delta)$はx_iのδ-開近傍である。任意の$1\leq i\leq k-1$に対

して，$n_i>0$ が存在して，$\sigma^{n_i}U(x_i,\frac{\delta}{2})\cap U(x_i,\frac{\delta}{2})\neq\phi$ となる（∵ σ は自己同型だから）。したがって $\sigma^{n_i}U(x_i,\delta)\cap U(x_{i+1},\delta)\neq\phi$ $(1\leq i\leq k-1)$。今 $z_i\in\sigma^{n_i}U(x_i,\delta)\cap U(x_{i+1},\delta)$ $(1\leq i\leq k)$ をとる。$y_j=\sigma^{j}x_1$ $(j<0)$，$y_j=\sigma^{j-n_1}z_1$ $(0\leq j<n_1)$ $y_j=\sigma^{j-n_i}z_i$ $(n_1+\cdots+n_{i-1}\leq j<n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i,\ 2\leq i\leq k-1)$，$y_j=\sigma^{j-(n_1+n_2+\cdots+n_k)}x_k$ $(j\geq n_1+\cdots+n_k)$ とおくとき，$\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は，2δ-pseudo orbit である。しかも $\bar{d}(X,\overline{\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}})<2\delta$ であることが容易に確かめられる。δ は任意だったから $X\in E(\sigma)$ である。(X,σ) は OE-system だから $X\in O(\sigma)$。これは，(X,σ) が topologically transitive であることを示している。

§3　ソレノイド群上の自己同型．　この節を通じて，X は r 次元 solenoid群，σ は X 上の自己同型とする。d は X の不変距離とする。

G を X の指標群とせよ。G における σ の共役自己同型 γ を $(\gamma g)(x)=g(\sigma x)$ $(g\in G,\ x\in X)$ によって定義する。このとき，G から $\mathbb{Q}^r$ の中への同型写像 φ と $\mathbb{Q}^r$ 上の自己同型 $\bar{\gamma}$ が存在して $\bar{\gamma}\varphi=\varphi\gamma$ をみたす。我々は簡単のために $\gamma=\bar{\gamma}$ と書く（実際 $\bar{\gamma}$ は φ の選び方によらずに相似を除いて一意に定まる）。γ を自然な仕方で $\mathbb{R}^r$ 上の自己同型に拡張して，同じ記号 γ で表わすことにする。

S.1 ([4] §2 (P.2) 及びその前の記述を見よ。) $\mathbb{R}^r$からXの準同型ψと、Xの完全不連結部分群Fが存在して次の条件を満たす。

(i) $\psi\gamma = \sigma\psi$,

(ii) X/F は r次元トーラス群と同型である,

(iii) $X = \psi(\mathbb{R}^r)F$ かつ

(iv) $\mathbb{R}^r$における0の閉近傍Uが存在して$U \times F$ ($\times$は位相空間の直積を表わす) は $\psi(U)F$ と同相である。我々は、このような近傍$\psi(U)F$ を $\psi(U)\otimes F$と書く。

S.2 ([4] §2 (P.3) を見よ。) FをS.1のものとする。このとき $\hat{F}^- = \bigcap_{i=0}^{\infty}\sigma^i F$, $\hat{F}^+ = \bigcap_{i=0}^{\infty}\sigma^{-i}F$ とおけ。このとき、$F = \hat{F}^+\hat{F}^-$ かつ $\hat{F}^+/\sigma\hat{F}^+$ 及び $\hat{F}^-/\sigma\hat{F}^-$ は有限群である。

次の補助定理は、森本[7]の問題が肯定的に解決したことを示している。

補助定理 1. Xはsolenoid群, σはX上の自己同型とせよ。(G, γ)を前の如くとするとき、次の(i),(ii)及び(iii)は同値である。

(i) (X, σ)はOE-systemである。

(ii) $(\mathbb{R}^r, \gamma)$は hyperbolic である。

(iii) (X, σ)は P.O.T.P. を持つ。

証明. (ii) ⇒ (iii) は明らかである。(iii) ⇒ (i) は定理 A によって成立する。(i) ⇒ (iii) を示そう。$(\mathbb{R}^r, \gamma)$ が hyperbolic でないとして、(X, σ) が CE-system でないことを導く。$(\mathbb{R}^r, \gamma)$ が hyperbolic でないから、G を加法群と見れば、ある $0 \neq g_0 \in G$ と、絶対値 1 の根をもつ整数上既約な整数係数多項式 $P(x)$ が存在して $P(\gamma) g_0 = 0$ が成立する。今、$G_0 = gp\{\gamma^j g_0 ; j \in \mathbb{Z}\}$ ($gp E$ は集合 E から生成された群を表わす。) とおけば、G_0 は G の γ-不変部分群である。よって X の σ-不変部分群 K が存在して、G_0 は X/K の指標群である。§2 の P.1 によって $(X/K, \sigma)$ が CE-system でないことを示せば十分。こうして、任意の $g \in G$ に対して $P(\gamma) g = 0$ が成立すると仮定しても一般性を失なわない。

$\mathbb{R}^r$ は γ-不変部分空間 E^u, E^s 及び E^c の直積 $\mathbb{R}^r = E^u \oplus E^s \oplus E^c$ に分解し、γ_{E^u} の固有値は絶対値が 1 より大、γ_{E^s} の固有値は絶対値が 1 より小、γ_{E^c} の固有値は絶対値が 1 であるようにできる。E^u, E^s の各々のノルム $\|\cdot\|_u$, $\|\cdot\|_s$ と $0 < \lambda_0 < 1$ が存在して、

$$\|\gamma^n x\|_u \leq \lambda_0^{-n} \|x\|_u \qquad (x \in E^u,\ n \leq 0)$$

$$\|\gamma^n x\|_s \leq \lambda_0^{n} \|x\|_s \qquad (x \in E^s,\ n \geq 0)$$

が成立する。$P(x)$ に対する仮定より、$E^c \neq \{0\}$ であり、E^c のノルム $\|\cdot\|_c$ が存在して、

$$\|\gamma^n x\|_c = \|x\|_c \qquad (x \in E^c,\ n \in \mathbb{Z})$$

が成立する。$\mathbb{R}^r$ 上の距離 d_0 を

$$d_0(x, y) = \max\{\|x^u - y^u\|_u,\ \|x^s - y^s\|_s,\ \|x^c - y^c\|_c\}$$

$$(x = x^u + x^s + x^c,\ y = y^u + y^s + y^c \in E^u \oplus E^s \oplus E^c)$$

によって定義する。このとき，S.1 の (iii) によって，ある $\alpha_1 > 0$ が存在して，$B(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^r;\ d_0(x, 0) \leqq \alpha\}$ $(\alpha \in (0, \alpha_1])$ に対して $\psi B(\alpha) \cap F = \{0\}$ かつ $\psi B(\alpha) \oplus F$ は X の 0 における閉近傍である。

$B^u(\alpha) = B(\alpha) \cap E^u$, $B^s(\alpha) = B(\alpha) \cap E^s$, $B^c(\alpha) = B(\alpha) \cap E^c$ $(\alpha \in (0, \alpha_1])$ とおけ。$x_0 \in B^c(\alpha_1/2)$ を $\|x_0\|_c > \frac{\alpha_1}{4}$ なるものとする。任意の $n > 0$ に対して，点列 $\{x_{n,i}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を

$$x_{n,i} = 0 \qquad (i \leqq 0)$$

$$x_{n,i} = \frac{i}{n}\gamma^i x_0 \quad (0 < i < n)$$

$$x_{n,i} = \gamma^i x_0 \qquad (i \geqq n)$$

によって定義せよ。$E_n = \overline{\{x_{n,i};\ i \in \mathbb{Z}\}} \in C(B^c(\alpha_1))$ とおくとき，$C(B^c(\alpha_1))$ がコンパクトだから部分列 n_j と $E \in E(\gamma_{B^c(\alpha_1)})$ が存在して $E_{n_j} \to E$ $(j \to \infty)$ となる。明らかに $E \subset B^c(\frac{\alpha_1}{2})$ であり，$0 \in E$。また $E \cap (B^c(\frac{\alpha_1}{2}) \setminus B^c(\frac{\alpha_1}{4})) \neq \phi$ なることも容易に証明できる。よって $E \notin C(\gamma_{B^c(\alpha_1)})$ である。

$E' = \psi E$ とおけ。$E' \in E(\sigma)$ は ψ が連続だから明らか。$E' \notin C(\sigma)$ なることを示す。$E' \in C(\sigma)$ ならば，S.2 から任意の

$n>0$ に対して $x_n\in X$ が存在して，$\bar{d}(E', O(x_n)) < \frac{1}{n}$ をみたす。P.1 によって，$\tilde{F}^+\cap\tilde{F}^- = \{0\}$ と仮定しても一般性を失わない。S.2により，ある $N>0$ が存在して，任意の $n\geq N$ に対して，$O_\sigma(x_n)\subset\sigma^{-1}\psi B^u(\alpha_1)\oplus\sigma\psi B^s(\alpha_1)\oplus\psi B^c(\alpha_1)\oplus\sigma\tilde{F}^+\oplus\sigma^{-1}\tilde{F}^-$ となる。$n\geq N$ に対して，$x_n\in\psi B^c(\alpha_1)$ でなくてはならないことがこのことから容易に証明される。S.1 の (iv) によって $O_\gamma(\psi^{-1}x_n)\to E$ でなくてはならない。$E\neq O(\gamma_{\beta(\alpha)})$ であったからこれは矛盾。

§4　一般の場合のための準備.　この節を通じて，X は距離をもつコンパクト群，σ は X 上の自己同型とする。この節では §5 の中で使われるコンパクト群の構造についての，いくつかの結果を準備する。

補題 1.（[10] の Lemma 3，4）　X が連結で，かつ代数的に単純な非アーベル群の直積 $\times_{i\in I} D_i$ に分解するとき，その分解は unique であり，X の部分群は，部分群 D_i のいくつかのあつまりに等しい。

補題 2.（[11] の PP. 88－93）　X が連結であるならば，X の正規部分群 A, B が存在して，

i)　A は X の中心 Z_X に含まれる。

ii)　B は $B/Z = (\times_{i\in I} L_i')/Z$ と同型である。

ただし，L_i $(i\in I)$ は単連結，コンパクト単純リー群で，Z は B' の中心 $Z_{B'}$ の部分群かつ，

(iii) $X = A\cdot B$。

次は，補題2から容易に得られる。

補題3．　補題2の仮定と記法のもとで，もし Z_B が B の中心であれば，

(i) B/Z_B は $B'/Z_{B'} = \times_{i\in I}(L_i'Z_{B'}/Z_{B'})$ と同型，

(ii) B/Z_B は直積 $B/Z_B = \times_{i\in I} L^{(i)}$ に分解し，$L^{(i)} = L_iZ_B/Z_B$ $(i\in I)$ となる。ただし，L_i は B の単連結コンパクトリー部分群であり，B/Z_B は中心をもたない群である。

(iii) Z_B は完全不連結な正規部分群である。

(iv) Z_B は $Z_B \doteqdot \Pi_{i\in I} Z_i$ のように表わせる。ただし Z_i $(i\in I)$ は L_i の中心である。また Z_B は X の中心に含まれる。

(v) X/AZ_B は B/Z_B と同型，かつ $AZ_B = Z_X$ である。

補題4．　X が連結であるとする。補題2と3の記法のもとで，φ を B/Z_B から X/Z_X へ次のように定義された同型写像とする；すなわち　$\varphi(xZ_B) = xZ_X$ $(x\in B)$。このとき $\sigma(B) = B$ が成立し，$(X/Z_X, \sigma)$ は $(B/Z_B, \sigma)$ と φ のもとで同型である。

証明．　$\psi(xZ_B) = \sigma(x)\sigma(Z_B)$ $(x\in B)$ と定義せよ。このとき $\psi : B/Z_B \to \sigma(B)/\sigma(Z_B)$ は同型写像である。B は，

Xで正規であるから，$\sigma(Z_B)(\sigma(B)\cap B)/\sigma(Z_B)$ は $\sigma(B)/\sigma(Z_B)$ の正規部分群である。補題3 (ii) によって $B/Z_B = \times_{i\in I} L^{(i)}$ であるから $\sigma(B)/\sigma(Z_B) = \times_{i\in I} \psi L^{(i)}$ を得る。したがって，補題1から次を得る；

$$\sigma(Z_B)(\sigma(B)\cap B)/\sigma(Z_B) = \times_{i\in I} \psi L^{(i)}$$

ただし，I_0 は I の部分集合である。

$\sigma(B)/\sigma(Z_B) = \{\times_{i\in I_0} \psi L^{(i)}\}\times\{\times_{i\notin I_0} \psi L^{(i)}\}$ であるから，

(1) $$\begin{aligned}\sigma(B)B/\sigma(Z_B)B &\cong \sigma(B)/\sigma(Z_B)(\sigma(B)\cap B)\\ &\cong \{\sigma(B)/\sigma(Z_B)\}/\{\sigma(Z_B)(\sigma(B)\cap B)/\sigma(Z_B)\}\\ &\cong \times_{i\in I_0} \psi L^{(i)}\end{aligned}$$

（$\cong$ なる記法は2つの位相群が同型であることを表わす）。

補題4の証明を完全にするために，$A\times B$ から X への射影の核を D で表わす。このとき同型写像 $\varphi_1 ; (A\times B)/D \to X$ が存在する。π_0，π_1 と π_2 を次の図式

$$\begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{\pi_0} & A \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\pi_2 \\ (A\times B)/D & \xrightarrow[F]{} & A/\pi_0(D) \end{array}$$

における射影とする。ただし F は，$F\pi_1(a,b)=\pi_2\pi_1(a,b)$，$a\in A$ かつ $b\in B$ によって定義される。F が連続な準同型で

あることは明らか。$\sigma' = \varphi_1^{-1}\sigma\varphi_1$ によって $(A\times B)/D$ 上の同型を定義せよ。$F(\sigma'((\{e\}\times B)D/D))$ はアーベル群で F の核は $(\{e\}\times B)D/D$ であるから、

$$\sigma'[(\{e\}\times B)D/D]\,[(\{e\}\times B)D/D]/[(\{e\}\times B)D/D]$$

はアーベル群である。したがって $\sigma(B)/B$ はアーベル群であり、$\sigma(B)B/\sigma(Z_B)B$ は(1)によって自明な群でなくてはならない。$\sigma(Z_B)B/B$ の単位元の連結成分をとることによって、$\sigma(B)\subset B$ を得る。実際 $\sigma(B)$ は連結であり $\sigma(Z_B)$ は完全不連結である。対称性により $\sigma(B)=B$。第2の主張は写像 φ の定義から容易に得られる。

補題5. 補題3の記法のもとで、

$$B/Z_B = \times_{i\in I} L^{(i)} \cong M_1\times M_2,$$

ただし $M_1 = \times\{L^{(i)};\ \sigma^n L^{(i)} \neq L^{(i)}$ (すべての $n\neq 0$ に対して)$\}$

$M_2 = \times\{L^{(i)};\ \sigma^n L^{(i)} = L^{(i)}$ (ある $n\neq 0$ に対して)$\}$

と分解できる。また $\sigma M_1 = M_1$, $\sigma M_2 = M_2$, かつ (M_1, σ) は shift 自己同型, $\sigma|M_2$ は M_2 のある距離に対して isometry である。

補題6. X における単位元の連結成分 X_0 が有限次元ならば、完全不連結 σ-不変正規部分群 H_1 が存在して、H_1X_0 は X の開部分群である。

証明。X^* を X の既約ユニタリー表現の同値類の全体とす

る。$g\in X^*$ を $g(X_0)\neq\{E\}$ なるものとする（Peter-Weil の定理により，X^* はこのような表現をもつ）。$H^{(1)}$ を g の核とする。このとき $H^{(1)}$ は X の中で正規，かつ $X_0H^{(1)}=g^{-1}(g(X_0))$ が成立する。$g(X_0)$ は $g(X)$ の開集合であるから，$X_0H^{(1)}$ もまた X の開集合である。$H^{(1)}$ を $H^{(1)}$ における単位元 e の連結成分とせよ。

このとき $H_0^{(1)}\subsetneq X_0$ をうるから $\dim(H_0^{(1)})<\dim(X_0)$．また，$f\in X^*$ を $f(H_0^{(1)})\neq\{E\}$ なるものとし，f' を f の $H^{(1)}$ への制限とする。このとき f' の核 $H^{(2)}$ は X の中で正規である。実際 $H^{(2)}$ は部分群である。正規性は，任意の $x\in X$ に対して $xH^{(1)}x^{-1}=H^{(1)}$ かつ $f'(xhx^{-1})=f(x)f(h)f(x^{-1})=E$ がすべての $h\in H^{(2)}$ に対して成立することから出る。$f'(H_0^{(1)})$ は $f'(H^{(1)})$ であるから，$H_0^{(1)}H^{(2)}=f'^{-1}(f'(H_0^{(1)}))$ もまた $H^{(1)}$ で正規である。それ故に $H^{(1)}/H_0^{(1)}H^{(2)}$ は有限群である。$XH^{(1)}/X_0H^{(2)}$ が $H^{(1)}/H_0^{(1)}H^{(2)}$ の剰余群であることは容易にわかる。したがって $X_0H^{(2)}$ は $X_0H^{(1)}$ において —— したがってまた X においても —— 開集合である。$H_0^{(2)}$ を $H^{(2)}$ における e の連結成分とせよ。このとき $\dim(H_0^{(2)})<\dim(H_0^{(1)})$。

上の議論を繰り返していくと，X の正規部分群の列

$$X\supset H^{(1)}\supset H^{(2)}\supset\cdots$$

が存在して，$\dim(X_0)>\dim(H_0^{(1)})>\dim(H_0^{(2)})>\cdots$，

かつすべてのkに対して$X_cH^{(k)}$はXの開部分群である。$\dim(X_c)<\infty$であるから，nが存在して$H^{(n)}$は完全不連結である。$D=H^{(n)}$，$A_m=D\cdot\sigma(D)\cdots\sigma^m(D)$ $m\geq 1$と書け。$\{X_cA_m\}_{m\geq 1}$はXの開部分群の増大列である。よって$\bigcup_{m\geq 1}X_cA_m$もまたXの開部分群である。$\bigcup_{m\geq 1}X_cA_m$はまたコンパクトであるから，$M>0$が存在して$\bigcup_{m\geq 1}X_cA_m=X_cA_M$となる。$A_M=H_1$とおけば求める分解を得る。

§5　定理の証明．　この節を通じてXは距離をもつコンパクト群，σはX上の自己同型とする。

<u>補助定理2．</u>　Xが連結でかつアーベル群であるとする。このとき(X,σ)がOE-systemであるための必要十分条件は，(X,σ)がP.O.T.P.をもつことである。

証明．　X_c，X_B，$\{X_{c,n}\}_{n\geq 0}$，$\{X_{B,n}\}_{n\geq 0}$をP.7のものとする。(X,σ)がOE-systemならば，$(X/X_BX_{c,n},\sigma)$はOE-systemである。一方，$X/X_BX_{c,n}$は$X_c/X_{c,n}$の剰余群だから，$X/X_BX_{c,n}$はsolenoid群である。補助定理1により，$(X/X_BX_{c,n},\sigma)$ $(n\geq 1)$はP.O.T.P.をもつ。したがって$(X/X_B,\sigma)$はP.O.T.P.をもつ。$(X_B/X_{B,n},\sigma)$はP.O.T.P.をもつから，(X_B,σ)もまたP.O.T.P.をもつ。こうして，(X,σ)はP.O.T.P.をもつ。

<u>補助定理3.</u>　Xがアーベル群であるとする。このとき，(X,σ)がOE-systemであるための必要十分条件は(X,σ)がP.O.T.P.をもつことである。

証明．　X_1をP.7のものとする。P.6によって(X_1,σ)はP.O.T.P.をもつ。X/X_1は連結でP.1により$(X/X_1,\sigma)$はOE-systemである。補助定理2$(X/X_1,\sigma)$はP.O.T.P.をもつ。したがってP.4によって(X,σ)はP.O.T.P.をもつ。

<u>補助定理4.</u>　Xが連結であるとする。このとき(X,σ)がOE-systemであるための必要十分条件はP.O.T.P.をもつことである。

証明．　A, B, Z_B, Z_X, M_1, M_2を補題2.3.5のものとする。補題4によって$\sigma(B)=B$かつ$AZ_B=Z_X$だから，$\sigma(AZ_B)=AZ_B$が成立する。よって$Z_B=AZ_B\cap B$はσ-不変。補題3の(iii)によってZ_Bは完全不連結だから，(Z_B,σ)はP.6によってP.O.T.P.をもつ。$(X/Z_B,\sigma)$がP.O.T.P.をもつことを示そう。$X/Z_B=AZ_B/Z_B\times B/Z_B$である。$(X,\sigma)$が$OE$-systemならばP.1によって$(AZ_B/Z_B,\sigma)$及び$(B/Z_B,\sigma)$は$OE$-systemである。補助定理2により，$(AZ_B/Z_B,\sigma)$はP.O.T.P.をもつ。$B/Z_B=M_1\times M_2$であり，$(M_2,\sigma)$はisometryであるから，P.8により$B/Z_B=M_1$。したがって$(B,Z_B)$はP.O.T.P.をもつ。P.4によって$(X/Z_B,\sigma)$はP.O.T.P.をも

定理の証明.　Xの単位元の連結成分 X_0 とおく。X_0 の部分群 A, B, Z_B を補題2,3のものとせよ。Z_Bは完全不連結だから，(Z_B, σ) は P.O.T.P. をもつ。$(X/Z_B, \sigma)$ が P.O.T.P. であることを示せば十分。

ここで $X' = X/Z_B$, $A' = AZ_B/Z_B$, $B' = B/Z_B$, $X_0' = X_0/Z_B$ とおきなおす。そのとき $X_0' = A' \times B'$ であり，$\sigma(A') = A'$ が成立する。A'の部分群 $X_c, X_B, \{X_{c,n}\}_{n\geq 0}, \{X_{B,n}\}_{n\geq 0}$ を P.7 のものとする。任意の $n\geq 1$ に対して，$Y_n = X'/(X_{c,n}X_B B')$ の単位元の連結成分 $(Y_n)_0$ は $X_c/X_{c,n}$ の剰余群であるから，有限次元である。したがって補題6によって $X/(X_{c,n}X_B B')$ の完全不連結 σ-不変正規部分群 H_n が存在して，$H_n(Y_n)_0$ は Y_n の開正規部分群である。(X', σ) はOE-systemであるから P.2 と P.3 によって，$(H_n(Y_n)_0, \sigma)$ はOE-systemである。したがって $(H_n(Y_n)_0/H_n, \sigma)$ はOE-systemである。$H_n(Y_n)_0/H_n$ は連結だから，補助定理4によって $(H_n(Y_n)_0/H_n, \sigma)$ は P.O.T.P. をもつ。P.2 によって $(Y_n/H_n, \sigma)$ はP.O.T.P.をもつ。P.6 により (H_n, σ) は P.O.T.P. をもつから，(Y_n, σ) は P.O.T.P. をもつ。すなわち $(X/(X_{c,n}X_B B), \sigma)$ $(n\geq 1)$ は P.O.T.P. をもつ。一方 (B, σ)，$(X_{B,n-1}/X_{B,n}, \sigma)$ は shift 自己同型であるから，P.O.T.P. をもつ。P.4 と P.3 によって，

(X_B, σ) もまた P.O.T.P. をもつ。$(X_B B, \sigma)$ は直積 $(X_B \otimes B, \sigma \times \sigma)$ の剰余 system であるから P.O.T.P. をみたす。よって (X, σ) は P.O.T.P. をもつ。

文　献

1. N. Aoki, A simple proof of the Bernoullicity of ergodic automorphisms on compact abelian groups, to appear in Israel J. Math.

2. N. Aoki, The splitting of Zero-dimensional automorphisms and Its application, prepint.

3. N. Aoki and M. Dateyama, The relationship between algebraic numbers and expansiveness, to appear in Fund. Math.

4. N. Aoki, M. Dateyama, and M. Komuro, Solenoid-al automorphisms with specification, to appear in Monatsch. Math.

5. G. Ikegami, On existence of tolerance stable Diffeomorphisms, preprint.

6. C. Kuratowski, Topologie Vol. II, Pónstwowe Wydawnictwo Naukow, Warsaw, 1961.

7. A. Morimoto, The method of pseudo orbit

tracing and the stabilities of dynamical systems, Seminarie notes 39. Tokyo univ. Tokyo 1979.

8. T. Sasaki, Some examples of stochastically stable homeomorphisms, Nagoya Math. J. 71 (1978), 97-105.

9. F. Takens, Tolelance stability, Dynamical Systems - Warwick 1974. Proceedings 1973/74 (Edited by A. Manning), Lecture Notes in Math., 468 (1975), Springer, 293-304.

10. A. Weil, L'integration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1951.

11. S. A. Yuzvinskii, Metric properties of compact groups, Amer. Math. Soc. Transl. 66 (1968), 63-98.

§ 0 Introduction.

In [5] M. Sears proves that in the group of $\mathcal{H}(C)$ of homeomorphisms on the Cantor set C, the set of expansive homeomorphisms is dense by the C^0-topology. The notion of the pseudo orbit tracing property of homeomorphisms play an important role constructing an invariant smooth probability measure (see R. Bowen [2]). Our aim is to prove that the set of homeomorphisms with such the property is dense in $\mathcal{H}(C)$ by the C^0-topology. We know (c.f. see p.128 of [4]) that every compact totally disconnected metric space is homeomorphic to the Cantor set. By this fact, it will be followed that our result contains N. Aoki's result ([1]) that every group automorphism of compact totally disconnected metric group X has the pseudo orbit tracing property.

§ 1 Definitions. Let X be a compact metric space with metric d,

Let X be a compact metric space with metric d, and σ be a homeomorphism from X onto itself. A sequence $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset X$ is said to be a δ-pseudo orbit of if $d(\sigma x_i, x_{i+1}) < \delta$ holds for all i. A dynamical system (X, σ) is said to have the pseudo orbit tracing property if for every $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that for every δ-pseudo orbit $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset X$, there exists an $x \in X$ such that $d(\sigma^i x, x_i) < \varepsilon$ for all i.

We denote by $\mathcal{B}(X)$ the set of all homeomorphisms from X onto itself, and by $\mathcal{B}(X)$ we denote the set of all homeomorphisms from X onto itself which satisfy the pseudo orbit tracing property. We define the metric $\bar{d}$ on $\mathcal{H}(X)$ by

$$\bar{d}(\sigma, \tau) = \max_{x \in X} d(\sigma x, \tau x) \qquad \sigma, \tau \in \mathcal{H}(X) .$$

§ 2 The Cantor set. Let $C \subset [0,1]$ be the Cantor set; i.e. C is the set of the numbers $x \in [0,1]$ with $x = a_1/3 + a_2/3^2 + \cdots$ ($a_i = 0$ or 2 for $i \geqslant 1$.). Let d be the metric on C defined by $d(x,y) = |x-y|$ ($x,y \in C$) . In this section we shall prove the following Theorem.

<u>Theorem 1.</u> $\overline{\mathcal{B}(C)} = \mathcal{H}(C)$

To prove Theorem 1, we need some definitions and some lemmas.

For $r \geqslant 1$, we call the set $C \cap [i/3^r, (i\ 1)/3^r]$ $(0 \leqslant i \leqslant 3^r-1)$ a <u>Cantor subinterval with rank r</u> if $C \cap (i\ 3^{-r}, (i+1)3^{-r}) \neq \phi$. Clearly any two Cantor subintervals with the rank coincides or are disjoint. Therefore we denote the Cantor subinterval with rank r which is the i-th set from the left by $I(r,i)$.

Following properties are easy to check.

Property 1. (i) $C = \bigcup_{i=1}^{2^r} I(r,i)$ for all $r \geqslant 1$.

(ii) For every $r \geqslant 1$ and $1 \leqslant i \leqslant 2^r$

$$I(r,i) = I(r+1, 2i-1) \cup I(r+1, 2i)$$

(iii) For every $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, every $1 \leqslant i \leqslant 2^r$, and every $1 \leqslant j \leqslant 2^s$ with $I(r,i) \cap I(s,j) \neq \phi$, $I(r,i) \cap I(s,j)$ coincides with $I(r,i)$ or $I(s,j)$.

For given Cantor subintervals $I(r,i)$ and $I(s,j)$, we define a Homeomorphism $\varphi_{(r,i)(s,j)}$ from $I(r,i)$ onto $I(s,j)$ by following equation;

$\varphi_{(r,i)(s,j)}(x) = y_o + 3^{r-s}(x-x_o)$ $\quad (x \in I(r,i))$ where x_o and y_o are the least numbers in $I(r,i)$ and $I(s,j)$ respectively.

Following property is easy to check.

Property 2. (i) For every $r \geq 1$, $s \geq 1$, and every $1 \leq i \leq 2^r$ and $1 \leq j \leq 2^s$,

$$\varphi_{(r,i)(S,j)} \,|\, I(r+1,2i-1) = \varphi_{(r+1,2i-1)(s+1,2j-1)}$$

and

$$\varphi_{(r,i)(s,j)} | I(r+1,2i) = \varphi_{(r+1,2i-1)(s+1,2j-1)}$$

holds.

(ii) $\varphi^{-1}_{(r,i)(s,j)} = \varphi_{(s,j)(r,i)}$ $\quad (1 \leq i \leq 2^r, 1 \leq j \leq 2^s, r \geq 1, s \geq 1)$.

Definition 2. For $r \geq 1$, we call an $f \in \mathcal{H}(C)$ a $\mathcal{L}^r$-type homeomorphism if $f^{-1}|I(r,i) = \varphi_{(r,i)(s,j)}$ for some $s \geq 1$ and some $1 \leq j \leq 2^s$ for all $1 \leq i \leq 2^r$. By $\mathcal{L}^r(C)$, we denote the set of $\mathcal{L}^r$-type homeomorphisms.

Following properties are easy to check.

Property 3. (i) $\mathcal{L}^r(C) \subset \mathcal{L}^{r'}(C)$ $\quad (1 \leq r \leq r')$,

(ii) For every $r \geq 1$, $m > 0$, $f \in \mathcal{L}^r(C)$, and every $1 \leq i_j \leq 2^r$ $(0 \leq j \leq m)$, the set

$\bigcap_{j=o}^{m} f^{-1}(I(r,i_j))$

is a Cantor subinterval if $\bigcap_{j=o}^{m} f^{-1}(I(r,i_j)) \neq \phi$.

(iii) For every $r \geqslant 1$ and $f \in \mathcal{L}^r(C)$ there exist $c > o$ such that $\bar{d}(f^{-1}(x), f^{-1}(x)) < c\, d(x,y)$ for all $x,y \in C$.

Lemma 1. $\bigcup_{r \geqslant 1} \mathcal{L}^r(C)$ is dense in $\mathcal{H}(C)$

Proof, For every $f \in \mathcal{H}(C)$ and every $\varepsilon > 0$, there existw an $r \geqslant 1$ such that $3^{-r} \leqslant \varepsilon$. Since $I(r,i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^r)$ is open and closed, $f^{-1}(I(r,i))$ is a disjoint union of Cantor subintervals.

For fixed $1 \leqslant i \leqslant 2^r$, put

$$f^{-1}(I(r,i)) = \bigcup_{m=1}^{k} I(s_m, j_m) \quad \text{(disjoint)} .$$

By Property 1 (ii) , we can choose $r_m \geqslant r$ and $1 \leqslant 1_m \leqslant 2^{r_m}$ $(1 \leqslant m \leqslant k)$ such that

$$I(r,i) = \bigcup_{m=1}^{k} I(r_m, 1_m) .$$

Define a homeomorphism $g_i : f^{-1}(I(r,i)$ on $I(r,i)$ by $g_{i|I(s_m,j_m)} = \varphi_{(s_m,j_m)(r_m,i_m)}$ $(1 \leqslant m \leqslant k)$. Since $1 \leqslant i \leqslant 2^r$ is arbitary, we can define a homeomorphism $g \in \mathcal{H}(C)$ by $g_{|f^{-1}(I(r,i))} = g_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^r)$. Clearly $\bar{d}(f,g) < 3^{-r} < \varepsilon$. By the definition of g and by Property 2 (i), and (ii) , $g \in \mathcal{L}^{r'}(C)$ for some $r' \geqslant r$.

Lemma 2. For $f \in \mathcal{L}^r(C)$ $(r \geqslant 1)$, put

$$A = \{ \boldsymbol{i} = \{i_j\}_{j=-\infty}^{\infty} ; 1 \leqslant i_j \leqslant 2^r \text{ for all } j \}.$$

and

$$A' = \{ \boldsymbol{i} \in A ; \bigcap_{j \geqslant 1} f^{-j} I(r, i_j) \neq \phi \},$$

then the following (i), (ii), and (iii) hold;

(i) For every $\boldsymbol{i} \in A'$, there exists the minimal $n = n(\boldsymbol{i}) > 0$ such that following (a) or (b) holds;

(a) $\bigcap_{j \geqslant 1} f^{-j} I(r, i_j) = \bigcap_{j=1}^{n} f^{-j} I(r, i_j) = I(r', i)$ for some r' r and some $1 \leqslant i \leqslant 2^{r'}$,

(b) $\bigcap_{j=1}^{n} f^{-j} I(r, i_j) \subset I(r, i)$ for some $1 \leqslant i \leqslant 2^r$,

(ii) There exists $N = \max_{\boldsymbol{i} \in A'} n(\boldsymbol{i})$,

(iii) Put $B = \{ (i_0, i_1, \ldots, i_N) ; 1 \leqslant i_j \leqslant 2^r$ for all $0 \leqslant j \leqslant N$, and $\bigcap_{j=0}^{N} f^{-j} I(r, i_j) \neq \phi \}$, then $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f^{-j} I(r, i_j) \neq \phi$ holds for every $\boldsymbol{i} = \{i_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in A$ with $(i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{k+N}) \in B$ for all k.

Proof. Since $\bigcap_{j=1}^{m} f^{-j} I(r, i_j)$ $(m \geqslant 1)$ are Cantor subintervals unless i $\bigcap_{j=1}^{m} f^{-j} I(r, i_j) = \phi$ by Property 3 (ii). Clearly

$$\operatorname{rank}\left(\bigcap_{j=1}^{m} f^{-j} I(r, i_j) \right) \leqslant \operatorname{rank}\left(\bigcap_{j=1}^{m+1} f^{-j} I(r, i_j) \right)$$

for all $m \geqslant 1$, and therefore (a) or (b) holds for some $n \geqslant 1$.

Since $f \in \mathcal{L}^r(C)$, from the minimality of $n(\boldsymbol{i}) > 0$ and from Property 3 (ii), there exists an $r'' > r$ such that $\operatorname{rank}\left(\bigcap_{j=1}^{n(\boldsymbol{i})} f^{-j} I(r, i_j) \right) < r''$ for all $\boldsymbol{i} = \{i_j\} \in A'$. Therefore the sets of the form

$$\bigcap_{j=1}^{n(\mathfrak{i})} f^{-j} I(r,i_j) \qquad (\mathfrak{i} = \{ i_j \} \in A')$$

are finite. On the other hand, if

$$\bigcap_{j=1}^{n(\mathfrak{i})} f^{-j} I(r,i_j) = \bigcap_{j=1}^{n(\mathfrak{i}')} f^{-j} I(r,i'_j)$$

holds for some $\mathfrak{i} = \{ i_j \}$ and some $\mathfrak{i}' = \{ i'_j \}$ in A', then $n(\mathfrak{i}) = n(\mathfrak{i}')$ by their minimality. Thus we can take $N = \max_{\mathfrak{i} \in A'} n(\mathfrak{i})$.

Now we shall prove (iii). Take $\mathfrak{i} = \{ i_j \} \in A$ with $(i_k, i_{k+1}, \cdots, i_{k+N}) \in B$ for all k. Then

$$(*) \qquad \bigcap_{j=0}^{m} f^{-j} I(r,i_j) \neq \phi$$

hols for all $m \geq 1$. Indeed it is clear that (*) holds for $m \leq N$, Assume that (*) holds for m. Then $\bigcap_{j=1}^{m+1} f^{-j} I(r,i_j) = f^{-1}(\bigcap_{j=0}^{m} f^{-j} I(r,i_{j+1})) \neq \phi$. By the definition of N, we have either

$$\bigcap_{j=1}^{m+1} f^{-j} I(r,i_j) = \bigcap_{j=1}^{N} f^{-j} I(r,i_j) = I(r',i) \supset I(r,i_0)$$

for some $r' < r$ and some $1 \leq i \leq 2^{r'}$, or

$$\phi \neq \bigcap_{j=1}^{m+1} f^{-j} I(r,i_j) \subset \bigcap_{j=1}^{N} f^{-j} I(r,i_j) \subset I(r,i_0) .$$

Anyway we have $\bigcap_{j=0}^{m+1} f^{-j} I(r,i_j) \neq \phi$. Since C is compact and Cantor subintervals are closed, (iii) is followed from above.

Proof of Theorem. For $r \geq 1$ and $f \in \mathcal{L}^r(C)$, take N and B as in Lemma 2. Choose $\delta > 0$ such that $d(x,y) < \delta$ $(x,y \in C)$ implies $d(f^j(x), f^j(y)) < 3^{-r}$ for $|j| \leq N+1$. Let $\{ x_j \}_{j=-\infty}^{\infty}$ be a δ-pseudo orbit in C, then $d(f^{k+1}x_j, f^k x_{j+1}) < 3^{-r}$ for all $|k| \leqslant N+1$ and all j. For every j, take $1 \leqslant i_j \leqslant 2^r$ such that $x_j \in I(r, i_j)$. Since $d(x,y) < 3^{-r}$ $(x, y \in C)$ implies x and y are in the same Cantor subinterval with rankrr, by Lemma 2, there exists an $x \in C$ such that $d(f^j x, x_j) \leqslant 3^{-r}$ for all j, By Property 3 (i), $f \in \mathcal{L}^{r'}(C)$ for all $r' \geqslant r$. Thus by the same argument as above, we have that (C, f) has the pseudo orbit tracing property. Since $\mathcal{L}(C)$ is dense in $\mathcal{H}(C)$, we have $\mathcal{B}(C)$ is dense in $\mathcal{H}(C)$.

§ 3. Appendix. Next Proposition is probably known, but we cannot find it in literratures, so we will give here its proof for the completeness.

Proposition. Let X be a compact totally disconnected metric space without isolated points. Then X is homeomorphic to C.

Proof. Let d' be a metric on X. Since X is totally disconnected, there exist a $k_1 \geqslant 1$ and open closed subsets $X_1, \dots, X_{2^{k_1}}$ of X with $X_i \cap X_j = \phi$ $(i \neq j)$ and $\operatorname{diam}(X_i) \leqslant 2^{-1}\operatorname{diam}(X)$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^{k_1})$ such that $X = \bigcup_{i=1}^{2^{k_1}} X_i$. Notice that every X_i $(1 \leqslant i \leqslant 2^{k_1})$ is also a compact totally disconnected metric space without isolated points. Therefore there exist $k_2 > 0$ and open closed subsets $X_{i,j}$ with $X_{i,j} \cap X_{i',j'} = \phi$ $((i,j) \neq (i',j'))$ and $\operatorname{diam}(X_{i,j}) \leqslant 2^{-2}\operatorname{diam}(X)$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^{k_1},\ 1 \leqslant j \leqslant 2^{k_2})$ such that $X_i = \bigcup_{j=1}^{2^{k_2}} X_{i,j}$ for all i.

Repeating this process inductively, we can choose a sequence $\{k_n\}_{n=1}$ of positive integer and open closed subsets $X_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ $(1 \leqslant i_n \leqslant 2^{k_n},$ $1 \leqslant n \leqslant m,\ m \geqslant 1)$ such that

i) $X_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \cap X_{i'_1,i'_2,\ldots,i'_m} = \emptyset \quad ((i_1,i_2,\ldots,i_m) \neq (i'_1,i'_2,\ldots,i'_m))$,

ii) $\mathrm{diam}(X_{i_1,i_2,\ldots,i_m}) \leqslant 2^{-m}\mathrm{diam}(X) \quad (m \geqslant 1)$,

iii) $X = \bigcup_{j=1}^{2^{k_1}} X_i$ and $X_{i_1,\ldots,i_{m-1}} = \bigcup_{j=1}^{2^{k_m}} X_{i_1,\ldots,i_{m-1},j}$

$(1 \leqslant i_n \leqslant 2^{k_j} ,\ 1 \leqslant n \leqslant m ,\ m \geqslant 2)$.

Thus we can define an one-to-one correspondence between a sequence $\{i_j\}_{j=1}$ $(1 \leqslant i_j \leqslant 2^{k_j} ,\ j \geqslant 1)$ and a point $x \in X$ by $\bigcap_{m=1}^{\infty} X_{i_1,\ldots,i_m} = \{x\}$. By Property 1, we can define an one-to-one correspondence between a sequence $\{i_j\}_{j=1}$ $(1 \leqslant i_j \leqslant 2^{k_j} ,\ j \geqslant 1)$ and a point $y \in C$ by

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I\left(\sum_{j=1}^{m} k_j ,\ i_m + \sum_{j=1}^{m-1} 2^{K(m,j)}(i_j-1) \right) = \{ y\}$$

where $K(m,j) = \sum_{n=0}^{m-j-1} k_{m-n}$.

From above correspondences, we can define an one-to-one map h from X onto C by

$$\{h(x)\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} I\left(\sum_{j=1}^{m} k_j ,\ i_m + \sum_{j=1}^{m-1} 2^{K(m,j)}(i_j-1) \right)$$

for all $x \in X$ with $\{x\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{i_1,\ldots,i_m}$.

For each $\varepsilon > 0$, there exists an $m_o \geqslant 1$ such that $3^{k_1+\cdots+k_{m_o}} > \varepsilon^{-1}$. Take $0 < \delta \leqslant \min(d'(X_{i_1,\ldots,i_{m_o}} , X_{i'_1,\ldots,i'_{m_o}}) ;\ (i_1,\ldots,i_{m_o}) \neq (i'_1,\ldots,i'_{m_o}))$. Therefore $d'(x,y) < \delta$ implies that $h(x)$ and $h(y)$

are in the same Cantor subinterval of rank m_o , and so $d(\ h(x),\ h(y)\ ) < \varepsilon$. Thus h is a homeomorphism.

References

1. N. Aoki, Stochastic stability and specification of zero-dimensional automorhisms, (to appear)

2. R. Bowen, ω-limit sets for Axiom A diffeomorphisms, J. Diff. Eq. 18 (1975), 333-339.

3. M. Denker, C. Grillenberger, and K. Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces, Lecture Notes in Math. 527 Springer-Verlag, Berlin-Heidlberg-New York. 1976.

4. L. Pontrjagin, Topological Groups, Gordon and Breach Science Publ. Inc. 1966.

5. M. Sears, Expansive self-homeomorphisms of the Cantor Set, Math. Systems Theory 6 (1972), 129-132.