数理解析研究所講究録
444巻 1981年 142-163

有限群の不変式と Simple Algebras

阪市大 理　宮田 武彦

最近, simple algebras と rational fields とは Bloch の定理[ ]を介して, 関係があることが知られてきた. この動きを,小さな動きではあるが,報告したい. §1～§3 は Rosset [28], Formanek [12], [13], Snider [30] の独断的要約である. Endo and Miyata [11] を §4 で抄出し,これを利用して §5 で Snider [30] の計算が成功した理由を推測する. [30] の simple algebras の splitting fields についての結果は少し拡張できるので,合せて述べる.

§1. ROSSET

k は可換体とする. 有理関数体 $k(t_1, t_2, \cdots, t_\ell)$ の k を含む部分体を k 上 unirational な体と言う. unirational で有理関数体(すなわち, rational)でない拡大体が問題になる. k が閉体でない,例えば, Galois 群が $C_p \times C_p$ (C_p は位数 p の巡回群)に同

型な拡大体を持つ場合は，簡単に unirational で rational でないものが作れる[6]，[31]．k が閉体のときは代数幾何的方法で同様な例の存在は示された[9]．Rosset は[28]で閉体上でも，近年 Amitsur 達が発展させている simple algebras の理論と，K_2 の性質を利用して，純代数的に *non-rational unirational fields* が構成できると主張した．

<u>k は以下常に無限体とする</u>．

$X_1, \cdots, X_m$ $(m \geq 2)$ は $n \times n$ generic matrices，すなわち，$X_s = (x_{ij}^s)$，x_{ij}^s は sn^2 個の k 上たがいに commute する不定元とする．$X_1, \cdots, X_m$ は多項式環 $k[x_{ij}^s]$ 上の $n \times n$ matrices の作る行列環 $M_n(k[x_{ij}^s])$ の元と視る．$X_1, \cdots, X_m$ で生成された部分環を <u>ring of generic matrices</u> と言い，$k[X_1, \cdots, X_m]$ と書くことにする．この環は零因子をもたず，中心元の逆元を附加すると，division ring になる．これを <u>generic division ring</u> と言い，$k(X_1, \cdots, X_m)$ または $UD(k, n, m)$ と書く．$k(X_1, \cdots, X_m)$ は中心 F 上次元 n^2 の division ring であり，Brauer 群 Br(F) での位数は丁度 n である．また，F は k 上 unirational であることは知られている（generic division rings の一般的性質は Jacobson [16]，Procesi [23]，Rowen [34] 等の教科書を見てください）．

Rosset は，k は閉体，char $k \nmid n$ であり，$q^3 | n$ となる素数 q が存在するとき，F は k 上 rational でないと主張した．彼の議論は

次のようである．Bloch [5] によれば，

<u>定理1</u>.（Bloch）. 体 k は，$\mathrm{char}\, k \nmid n$，かつ1の原始 n 乗根を含めば，the nth norm residue map

$$R_{n,k} : K_2(k)/nK_2(k) \longrightarrow Br_n(k) = \{ u \in Br(k) \mid u^n = 1 \}$$

が定義できる（Milnor [19]）．$t_1, \cdots, t_\ell$ は k 上のたがいに commute する不定元とし，

$$R_{n,k(t_1,\cdots,t_\ell)} : K_2(k(t_1,\cdots,t_\ell))/nK_2(t_1,\cdots,t_\ell) \longrightarrow Br_n(k(t_1,\cdots,t_\ell))$$

を考える．すると，

$$\ker(R_{n,k}) \cong \ker(R_{n,k(t_1,\cdots,t_\ell)})$$
$$\mathrm{coker}(R_{n,k}) \cong \mathrm{coker}(R_{n,k(t_1,\cdots,t_\ell)}).$$

さて，k は定理1の条件を満しさらに閉体とする．$k(X_1,\cdots,X_m)$ の中心 F は k 上 rational であると仮定する．Amitsur [2] によれば $k(X_1,\cdots,X_m)$ は crossed product ではなく，$R_{n,k}$ の作り方から，$R_{n,k}$ の像は cyclic algebras で生成されるから，"$R_{n,k}$ は surjection でない．" 一方，$R_{n,k}$ は $Br(k)=\langle 1\rangle$ だから surjection となり Bloch の定理に反する．従って F は k 上 rational でない．

この議論には残念ながら gap がある．一般に，有限次の斜体 K は crossed product でなくとも，<u>常に</u> crossed product algebra に similar，すなわち，$M_s(K)$ は crossed product となる整数 s が存在する．従って，$k(X_1,\cdots,X_m)$ は $\mathrm{Im}(R_{n,F})$ に入らないとは結論できない．

generic division algebra の重要性の一つは，$k(X_1, \cdots, X_m)$ が持つ性質は center 上次元 n^2 の simple algebra で center が k を含むものに遺伝することにある．例えば，

定理 2 (Amitsur). (1). $k(X_1, \cdots, X_m)$ は crossed product with group Γ $\Longrightarrow$ center 上次元 n^2 の simple algebra は center が k を含めば crossed product with group Γ.

(2). $k(X_1, \cdots, X_m)$ は cyclic algebras の積に similar $\Longrightarrow$ center 上次元 n^2 の simple algebra は center が k を含めば cyclic algebras の積に similar である．

Rosset の議論が成り立つためには，cyclic algebras の積に similar でない simple algebra (center には適当な制限を加えて) の存在を示さなければならない．これに関しては何も手掛りは無いようである．

逆に，$k(X_1, \cdots, X_m)$ の center が k 上 rational のときは，Bloch の定理を利用して，simple algebras につき種々の結果を引き出そうと考えることは自然である．

有理関数体の部分体 $k \subset F \subset k(t_1, \cdots, t_\ell)$ が F 上の不定元 $u_1, \cdots, u_p$ を選び $F(u_1, \cdots, u_p) = k(t_1, \cdots, t_\ell)$ と書けるとき F は k 上 stably-rational であると言う．

定理 3 (Snider). k は，代数閉体，代数体，有限体上の一変数関数体のどれかで，char $k \nmid n$ であり，1 の原始 n 乗根を含むとす

る．$k(X_1,\cdots,X_m)$ の center は k 上 stably-rational とすると，center 上次元 n^2 の simple algebra は center が k を含めば，cyclic algebras の積に similar である．

Bloch の定理を二度使うと $k(X_1,\cdots,X_m)$ は必要な性質を持つことがわかり，specialization により定理は言える．k に関する条件は，$R_{n,k}$; $K_2(k)/nK_2(k) \longrightarrow Br_n(k)$ が surjection であることを保証している．

k が定理 3 の条件を満しているとき，$k(X_1,\cdots,X_m)$ の center が常に k 上 stably-rational ならば，simple algebras は，中心が k を含みさえすれば，abelian splitting field を持つことになる．これは信じ難い．

§2. FORMANEK

$D=UD(k,n,m)=k(X_1,\cdots,X_m)$ は generic division ring，D の center を F とする．$D_2=k(X_1,X_2)\subset D$ とする．D_2 の center F_2 は F の部分体であり，Procesi に依れば F は F_2 上に次元 $(m-2)n^2$ の有理関数体である[22]．F_2 が k 上 rational なら，F もそうである．しかし，F_2 が non-rational でも F が k 上 non-rational とは結論できない．

D_2, F_2 を考えよう．$D_2=k(X_1,X_2)\subseteq M_n(k(x_{ij}^1, x_{ij}^2))$ である．K は $k(x_{ij}^1, x_{ij}^2)$ の代数閉包とする．$k(x_{ij}^1)$ の代数閉包 K_1 は K

の部分体とみなせる。$M_n(K_1)$ の元 T を選び TX_1T^{-1} を対角行列にできる。TX_1T^{-1} の対角元と TX_2T^{-1} の entries は k 上に代数的独立である。この § では次の notations を使う。

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

ここで $x_1, \cdots, x_n, y_{11}, \cdots, y_{nn}$ は k 上 commute する不定元,

$$L = k(x_1, \cdots, x_n, y_{11}, \cdots, y_{nn})$$

$$R = k[X, Y]$$

$$D = k(X, Y)$$

$$F = \text{center of } D.$$

写像 $X_1 \longrightarrow X$, $X_2 \longrightarrow Y$ は，明らかに $R_2 = k[X_1, X_2]$, $D_2 = k(X_1, X_2)$, $F_2 = \text{center of } D_2$ から，それぞれ，R, D, F の上への同型になっている。

さて，$D^* = D - \{0\}$ の $x_1, \cdots, x_n, y_{11}, \cdots, y_{nn}$ で生成された multiplicative subgroup を

$$B = \langle x_1, \cdots, x_n, y_{11}, \cdots, y_{nn} \rangle$$

とおく。これは free abelian group である。n 文字の対称群 S_n を

$$\sigma x_i = x_{\sigma(i)}, \qquad \sigma(y_{ij}) = y_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

で作用させる。rank n の free abelian group $U = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$ に S_n を $\sigma u_i = u_{\sigma(i)}$ で作用させたものと，S_n が trivial に作

用する rank 1 の free abelian group $V = \langle v \rangle$ を用意する.
S_n-準同型 α, β を次のように定義する：

$$\alpha : B \longrightarrow U ; \quad \alpha(x_i) = 1, \quad \alpha(y_{ij}) = u_i u_j^{-1},$$

$$\beta : U \longrightarrow V ; \quad \beta(u_i) = v.$$

$A = \mathrm{ker}(\alpha)$ とおく.

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} U \xrightarrow{\beta} V \longrightarrow 1$$

は S_n-modulas の完全列である. A は rank n^2+1 の free abelian group であり, A で生成された L の部分体 $k(A)$ は, k 上次元 n^2+1 の有理体である. A は $x_1, \cdots, x_n$ と,

$$y_{i_1 i_2} y_{i_2 i_3} \cdots y_{i_g i_1} \quad (g \geqq 1)$$

なる形の元で生成されている. S_n は A に作用するから, $k(A)$ にも k-同型として作用する.

<u>定理1</u> (Formanek). F (= center of D) $= k(A)^{S_n}$. 但し, $n \leqq 4$.

$n=2$ のときは Procesi が F は k 上 rational であることを示した[22]. $n=3, 4$ の場合は Formanek が計算により同様のことを示した[12],[13]. $n=3$ の時は, S_3 は dihedral group だから計算は簡単である (§5も参照). $n=4$ の時は, 抽象代数が生れる以前の代数を思はせるような, 実に巧妙な計算で証明されている. S_4 が多くの normal subgroups を含む事実を full に利用しているので, とうてい S_5 ($n=5$) の場合には計算は拡張できない. 一般的意見では $n \geqq 5$ の場合は, F は rational でない

であろうと予想されている。

以下で，これらの結果を $n\times n$ matrices の不変式の言葉に翻訳しよう。

関数 $\phi:[M_n(k)]^m\longrightarrow k$ が，k 上の $n\times n$ matrices m 個の組の <u>polynomial invariant</u> とは，

(1) $\phi(A_1,\cdots,A_m)$ は $A_1,\cdots,A_m$ の entries の多項式，

(2) 任意の $P\in GL(n,k)$ に対して，

$$\phi(PA_1P^{-1},\cdots,PA_mP^{-1})=\phi(A_1,\cdots,A_m)$$

を満すことである。ϕ が $A_1,\cdots,A_m$ の entries の有理関数であれば，ϕ は m 組の <u>rational invariant</u> と呼ばれる。rational invariant は polynomial invariants の商に書ける。

ring of generic matrices $k[X_1,\cdots,X_m]$ の central element は $a\cdot I$ (a は $X_1,\cdots,X_m$ の entries の多項式，I は単位行列) と書け，a は m 組の polynomial invariant になっている。$a\cdot I$ は a と同一視することにする。char $k=0$ のときは m 組の rational invariants 全体は $k(X_1,\cdots,X_m)$ の中心と一致することが知られている。この事実は最近 M. Artin により予想され，Procesi [24]，Razmylov [27] で独立に証明された。

<u>定理 3</u> (Formanek). char $k=0$ とする。$n\leqq 4$ なら，m 組の matrices の rational invariants の作る体は k 上有理関数体である。

§3. SNIDER

generic division ring は simple algebras の種々の性質の"視先"になり得るが，このような division ring は他の構成法もある．

G は有限群とし，G の free presentation

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

を考える．ここで，F は有限生成 free group である．R の commutator を R' とすると，$\overline{R} = R/R'$ は finite rank の free abelian group であり，$\overline{F} = F/R'$ は torsion group となり，

$$1 \longrightarrow \overline{R} \longrightarrow \overline{F} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

は exact である．$\overline{R}$ は G の relation module と呼ばれ，Gruenberg 等により研究されている．これに関して我々に必要な事実は後に述べる命題4のみである．

k は体とする．torsion free group Γ の group ring $k[\Gamma]$ は零因子を持たないと予想されているが，まだ一般には証明されていない．しかし，上の $\overline{F}$ は abelian by finite だから，$k[\overline{F}]$ は零因子を持たないことが知られている[35]．$k[\overline{F}]$ は中心上有限生成であり，中心元の逆元を附加すると，division ring になる．これを $Qk[\overline{F}]$ と書くことにする．

$B = (K, G, f)$ は crossed product with group G で，B の中心は k を含むとする．すなわち，G は K に k-同型として作用（忠実とはかぎらない）しており，f は K^* に値をもつ G の

2-cocycle とする. $g \in G$ に対し, Bの元X_gが対応しており,

$$B = \sum K X_g, \quad \{X_g\} \text{ は } K \text{ 上一次独立},$$

$$X_g^{-1} t X_g = t^g, \quad t \in K,$$

$$X_g X_h = f(g, h) X_{gh}$$

となるものである. このときK^*とX_g $(g \in G)$で生成された multiplicative subgroup をEとすると,

$$1 \longrightarrow K^* \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

は exact である($E \longrightarrow G$ は $X_g \longrightarrow g$ で定義する). Fは free group だから,

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \bar{R} \arrow[r] & \bar{F} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & K^* \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

が可換図型となる準同型 $\phi : \bar{F} \longrightarrow E$ が存在する. 従って, ϕは一意的に準同型 $\phi : k[\bar{F}] \longrightarrow B$ に拡張できる. このことは後に述べる定理1の証明に重要な働きをする.

$Qk[\bar{F}]$は crossed product with group G になっているので, generic crossed product with group G と言う. Gが cyclic でなければ, Gは$\bar{R}$に忠実に作用する. 今後は, Gは cyclic group でないとする. このとき, $Qk[\bar{F}]$は$Qk[\bar{R}]$を極大可換体として含み, $Qk[\bar{R}]^G$は$Qk[\bar{F}]$の中心になる.

遺伝性に関しては, 次の定理がある.

定理1 (Snider). generic crossed product $Qk[\bar{F}]$ with group G が cyclic algebras の積に similar ならば, crossed product algebra with group G で中心が k を含むものは, cyclic algebras の積に similar である.

この定理と Bloch の定理を組み合わせると,

定理2 (Snider). k は代数閉体,代数体,または有限体上の一変数関数体とする. $n=|G|$ としたとき, char $k \nmid n$, かつ1の原始 n 乗根を含むとする. $Qk[\bar{R}]^G$, すなわち, $Qk[\bar{F}]$ の中心が k 上 stably-rational ならば, crossed product algebra with group G は中心が k を含めば cyclic algebras の積に similar である.

Snider は計算により, char $k \nmid n$ $(n=|G|)$ の条件のもとに, $G=C_2\times C_2$, D_m (m は odd) のとき, $Qk[\bar{R}]^G$ は k 上 rational であることを示した.

Albert [1] によれば ([26] も参照), 中心上16次元の division algebra は Galois群が $C_2\times C_2$ となる maximal subfield を含むから,

定理3 (Snider). D は中心上16次元の division ring とする. D の標数は2でなく, 中心が $\sqrt[4]{1}$ を含めば, D は cyclic algebras の積に similar である.

この定理は Formanek の結果 (§2の定理1) からも得られる.

$\bar{R}$ の G-加群としての構造を知るには Schreier system を利用する方法があるが([30] を参照), ここでは別の見方をする. $\mathbb{Z}G$ の augmentation ideal を I とする;

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は exact. これに $I \otimes_{\mathbb{Z}}$ を作用させると,

$$0 \longrightarrow I \otimes_{\mathbb{Z}} I \longrightarrow I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

は exact であり, $I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$ は $\mathbb{Z}G$-free module である.

命題 4 [14]. 適当な整数 s, t が存在して,

$$\bar{R} \oplus \mathbb{Z}G^{s} \cong (I \otimes_{\mathbb{Z}} I) \oplus \mathbb{Z}G^{t}.$$

G の任意の部分群 H に対して, $H^1(H, I \otimes_{\mathbb{Z}} I) = 0$ になっていることに注意する.

§4. ENDO and MIYATA

§3,4によれば,次の問題を考えねばならない;

G は有限群, M は $\mathbb{Z}G$-lattice, すなわち, 有限生成かつ torsion free な $\mathbb{Z}G$-module. k は可換体とするとき, $Qk[M]^G$ はいつ k 上 rational か. 弱くして, いつ k 上 stably-rational か.

§4の結果によると, $M = I \otimes_{\mathbb{Z}} I$ (I は $\mathbb{Z}G$ の augmentation ideal) の場合が特に重要である. まず次の定理に注意する. finite G-set S を abel 化したもの, すなわち, S を基とする free abel 群に G の作用を linearity で拡張したものを $\mathbb{Z}S$ と書く. $\mathbb{Z}S$ に

同型な $\mathbb{Z}G$-lattice を permutation ($\mathbb{Z}G$-) module と呼ぶことにする．

<u>定理1</u> (Swan). G は有限群 M は $\mathbb{Z}G$-lattice とする．G が体 L に忠実に作用しているとき，次は同値である．

(1) $\mathbb{Q}L[M]^G$ は L^G 上 stably rational,

(2) $0 \to L \to \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}T \to 0$ exact

となる (finite) G-sets S, T が存在する．

証明は [31], [10], [32] 等を見よ．

Swan は定理1を使って，$G = C_{47}$ (位数47の cyclic group) のとき，$k = \mathbb{Q}$ なら $\mathbb{Q}k[M]^G$ は $\mathbb{Q}$ 上 non-rational であることを示している [31].

定理1の (2) $\Rightarrow$ (1) の証明に，また別の状況にも有用な Hilbert の定理90の言い換えがある．

<u>定理2</u> (Hilbert). G, L は定理1と同じとする．L 上の有理関数体 $K = L(t_1, \cdots, t_\ell)$ に G は，

$$g(t_i) = \sum_{j=1} a_{ij}(g)\, t_j, \quad a_{ij}(g) \in L, \quad 0 < i \leq \ell,$$

で作用しているとする．すると，K^G は L^G 上 rational である．

Endo and Miyata [11] に従って $\mathbb{Z}G$-lattices の分類論を少々述べる ([8], [33] も参照).

$\mathbb{Z}G$-lattices の同型類に direct products で和を入れた

semi-group を $T'(G)$ とする．$T'(G)$ に同値関係 $M \equiv N$ を完全列

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0 \end{array} \quad (S, T \text{ は } G\text{-sets})$$

の存在で定義して，

$$T(G) = T'(G)/(\equiv)$$

とおく．$[M]$ が $T(G)$ の零元になる必要十分条件は完全列

$$0 \to M \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0 \quad (S, T \text{ は } G\text{-sets})$$

の存在である．

$\equiv$ が実際同値関係になることは定理１で保証されるが，初等的に証明するには，次の二つの命題が基本的である．また，これらは分類論一般にも重要な働きをする．

<u>命題３</u>、M は任意の $\mathbb{Z}G$-lattice とする．次の完全列が存在する．

(1) $\quad 0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow M \longrightarrow 0$

S は G-set, $H^1(H, L) = 0$ for $\forall H \leqq G$.

(2) $\quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow L' \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0$

T は G-set. $H^1(H, L') = 0$ for $\forall H \leqq G$.

<u>命題４</u>. M は $H^1(H, M) = 0$ for $\forall H \leqq G$ を満し，L は permutation module の直和因子とすると，

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(L, M) = 0.$$

命題３によれば，$T(G)$ の各元は $H^1(H, M) = 0$ for $\forall H \leqq G$ を

満たす $\mathbb{Z}G$-lattice Mで代表されている．

$\mathbb{Z}G$-lattice M に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$ には自然に $\mathbb{Z}G$-lattice の構造が入る．これを M の <u>dual</u> と言い M^* と書く．$(\mathbb{Z}S)^* \cong \mathbb{Z}S$ である．

<u>定理5</u> (1)．$T(G)$: group $\Leftrightarrow$ G の各Sylow群は巡回群

$\Leftrightarrow$ $[I^*]$ は $T(G)$ で逆元をもつ

$\Leftrightarrow$ $[I \otimes_{\mathbb{Z}} I]$ は $T(G)$ で逆元をもつ．

（ $T(G)$ が群になる場合は $[(I\otimes_{\mathbb{Z}} I)^*] = -[I^*]$ である）．

(2) $T(G)$ は有限群 $\Leftrightarrow$ $[I^*]=0$，すなわち，完全列

$$0 \to \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}T \to I \to 0 \quad (S,T \text{ は } G\text{-sets})$$

が存在する．

$\Leftrightarrow$ $[I\otimes_{\mathbb{Z}} I]=0$，すなわち，

$$(I\otimes_{\mathbb{Z}} I)\oplus \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}T$$

となる G-sets S, T が存在する．

<u>定理5′</u>．$T(G)$ は有限群とする．

(1) $G=\langle s,t \mid s^m=t^{2^n}=1,\ m \text{ odd},\ t^{-1}st=s^r,\ r^2\equiv 1 \pmod{m}\rangle$

(2) $\mathfrak{M}$ を $\mathbb{Z}G$ の $\mathbb{Q}G$ での maximal order とすると，

$$cl(\mathfrak{M}) \cong T(G).$$

注意：G は任意の有限群とする．自然な準同型 $cl(\mathbb{Z}G)\to T(G)$ は，

$$\begin{tikzcd} cl(\mathbb{Z}G) \arrow[rr] \arrow[dr] & & T(G) \\ & cl(\mathfrak{M}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

と分解している．

ここで，$Cl(\mathbb{Z}G)$, $Cl(\mathfrak{M})$ はそれぞれ，$\mathbb{Z}G$, $\mathfrak{M}$ の locally free class group である．

定理5'によれば，$T(S_3)=0$ が得られる．定理1と対称式の基本定理により，M を任意の $\mathbb{Z}S_3$-lattice とすると，$Qk[M]^{S_3}$ は任意の体 k 上で stably rational であることが判る．

<u>定理6</u> (1) $H^1(H,M)=H^{-1}(H,M)=0$ for $\forall H \leqq G$ を満す $\mathbb{Z}G$-lattice M は permutation module の直和因子である．

(2) G の 2-Sylow 群は dihedral group（$C_2\times C_2$ も含む）または巡回群．odd prime p に対しては，p-Sylow 群は巡回群．

(3) $[(I\otimes_{\mathbb{Z}} I)^*]$ は $T(G)$ で逆元をもつ．

以上の条件 (1),(2),(3) は同値である．

2,3の群につき $T(G)$ は計算されている．

(A) $G=C_2\times C_2$ ： $T(G)=\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$．生成元は $[I^*]$ である（[7]，[17]．[ ]ではもっと一般の結果が示されているが，$T(G)$の計算だけなら，もっと簡単な方法がある）．

(B) $G=D_4$，位数8の dihedral group ； $T(G)\cong\mathbb{Z}_+^{11}$．

(C) G は位数8の quaternion group ； $T(G)\cong\mathbb{Z}_+^{6}$．

(D)．$G=C_2\times C_2\times C_2$，$C_2\times C_4$，$C_p\times C_p$（$p$ は odd prime）のときは $T(G)$ は有限生成でない．

(B)，(C)，(D)については Cistov [7] を参照．(D)からも判るように，ほとんどの場合 $T(G)$ は有限生成でない．

§5. 計算

(1) $G=\langle s,t \mid s^m=t^{2^n}=1,\ m=\mathrm{odd},\ t^{-1}st=s^r,\ r^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}.\ m)\rangle$

$M = I\otimes_{\mathbb{Z}} I$

k は char $k \nmid |G|$ で, 1 の $|G|$-乗根を含むとする,

$Qk[M]^G$ は k 上 stably rational であることを示そう.

§4の結果によれば完全列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0 \quad (S,T : G\text{-sets})$$

が存在する. 実は, この sequenceは split して $M\oplus\mathbb{Z}T \cong \mathbb{Z}S$ となっている. §4の定理1, 2に依れば, Gの faithful な k上の表現空間Vで $k(V)^G$ (Vの symmetric tensor algebra を$k[V]$, $k[V]$の商体を $k(V)$ とする) が k上 stably rational となるものの存在を示せば, $Qk[M]^G$ は stably rational となる.

V の construction ; $\langle s\rangle$をkに $s\cdot 1=\zeta_m\cdot 1$ (ζ_m は 1 の原始 m 乗根) で作用させ, $V_0=k[G/\langle t^{2^{n-1}}\rangle]\otimes_{k\langle s\rangle}k$ を kG-module とみる. $\langle t\rangle$ をkに $t\cdot 1=\zeta_{2^n}\cdot 1$で作用させて, $V_1=k$ を $G\longrightarrow G/\langle s\rangle=\langle t\rangle$ を通して Gの表現とみる. $V=V_0\oplus V_1$ とおくと必要な条件

を満していることが判る.

(2) $G = C_2 \times C_2 = \langle\alpha\rangle \times \langle\beta\rangle$.

$\pi(G) = \mathbb{Z}_+$ であり $[I^*]$ が生成元. $H^{-1}(G, I \otimes_{\mathbb{Z}} I) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を利用すると, $[I \otimes_{\mathbb{Z}} I] = [I^*]$. k は char $k \neq 2$ なる体とする. $Qk[I \otimes_{\mathbb{Z}} I]^G$ が stably rational を言うためには, $Qk[I^*]^G$ がそうであることを示せばよい(実は k 上 rational).

$1, \alpha, \beta$ に対応する不定元を t_1, t_2, t_3 とする,

$$\alpha(t_1) = t_2 \qquad \beta(t_1) = t_3$$

$$\alpha(t_2) = t_1 \qquad \beta(t_2) = \frac{1}{t_1 t_2 t_3}$$

$$\alpha(t_3) = \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \qquad \beta(t_3) = t_1$$

このとき $k(t_1, t_2, t_3)^G$ を計算する.

$u_1 = t_1 t_3$, $u_2 = t_2 t_3$ とおくと,

$$\alpha(u_1) = \frac{1}{u_1} \qquad \beta(u_1) = u_1$$

$$\alpha(u_2) = \frac{1}{u_2} \qquad \beta(u_2) = \frac{1}{u_2}$$

$$\alpha(t_3) = \frac{t_3}{u_1 u_2} \qquad \beta(t_3) = \frac{u_3}{t_3}$$

$v = (1+u_1)^{-1}(1+u_2)^{-1} t_3$ とおくと,

$$\alpha(v) = u_1 u_2 (1+u_1)^{-1}(1+u_2)^{-1} \cdot \frac{t_3}{u_1 u_2} = v$$

$$\beta(v) = \frac{u_1 u_2}{(1+u_1)^2(1+u_2)^2} \cdot \frac{1}{v}.$$

$Qk[I^*] = k(t_1, t_2, t_3) = k(u_1, u_2, v)$ に注意する。

$$k(u_1, u_2)^{\langle\alpha\rangle} = k\left(\left(\frac{1-u_1}{1+u_1}\right)^2, \left(\frac{1-u_1}{1+u_1}\right)\cdot\left(\frac{1-u_2}{1+u_2}\right)\right).$$

$X = \left(\frac{1-u_1}{1+u_1}\right)^2$, $Y = \left(\frac{1-u_1}{1+u_1}\right)\left(\frac{1-u_2}{1+u_2}\right)$ とおく。

$\beta(X) = X$, $\beta(Y) = -Y$ である。

$Z = 1 + \frac{Y}{X}$ とおく,

$\alpha(Z) = Z$, $\beta(Z)Z = 1 - \frac{Y^2}{X^2} = \frac{u_2}{(1+u_2)^2}$ だから,

$w = Z^{-1}v$ とおくと,

$$\alpha(w) = w,\quad \beta(w) = \frac{u_1}{2(1+u_1)^2}\cdot\frac{1}{w} = \frac{1}{4}(1-X)\cdot\frac{1}{w}$$

さて,
$$\begin{aligned} Qk[I^*]^G &= k(u_1, u_2, w)^{\langle\alpha\rangle\times\langle\beta\rangle} \\ &= k(X, Y, w)^{\langle\beta\rangle} \\ &= \{k(X, w)(Y)\}^{\langle\beta\rangle} \end{aligned}$$

$\gamma = w - \frac{1}{4}(1-X)\cdot\frac{1}{w}$ とおくと, $\beta(\gamma) = -\gamma$ だから, γY は $\langle\beta\rangle$-invariant. 従って,

$$Qk[I^*]^G = k\left(X,\ w + \frac{1}{4}(1-X)\cdot\frac{1}{w},\ \gamma Y\right)$$

$Qk[I^*]^G$ は k 上 rational である。

注意1： $Qk[I^* \oplus I^*]^G$ は rational かどうか知らない。

注意2： crossed product algebra with group G で, G は非可換 simple group とする。このような algebra で cyclic algebras の積に similar となるものは未だ知られていないようである.

REFERENCES

[1] A.A. ALBERT : Structure of algebra, AMS. Colloq. Pub. 24

[2] S.A. AMITSUR : On central division algebras, Israel J. Math. 12(1972), 408 - 420

[3] ___________ : The generic division rings, Ibid. 18(1978), 241 - 247

[4] ___________ and D.SALTMAN : Generic abelian crossed products and p-algebras, JJ. Algebra 51(1978), 76 - 87

[5] S. BLOCH : Torsion algebraic cycles, K_2 and Brauer groups of function fields, Bull. AMS. 80(1974), 941 - 945

[6] C. CHEVALLEY : On algebraic group varieties, J. Math. Soc. Japan 6(1954), 303 - 324

[7] A.L. CISTOV : On the number of generators of a semigroup of classes of algebraic tori relative to stable equivalence, Soviet Math. Dokl. 19(1978), 1267 - 1270

[8] J.J. COLLIOT-THELENE et J.J. SANSUC : La equivqlence sur les tores, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 10(1977), 175 - 230

[9] P. DELIGNE : Varietes unirationnelles non rationelles, Seminaire Bourbaki, Expose 402, in LNM. 317(1973)

[10] S.ENDO and T. MIYATA : Invariants of finite abelian groups, J. Math. Soc. Japan 25(1973), 7 - 26

[11] ___________________ : On a classification of the function fields of algebraic tori, Nagoya Math. J. 56(1974), 85 - 104

[12] E. FORMANEK : The center of the ring of 3x3 generic matrices, Lin. Mult. Alg. 7(1979), 203 - 212

[13] __________ : The center of 4x4 generic matrices, J.ALgebra 62(1980), 304 - 319

[14[K.W. GRUENBERG : Relation modules of finite matrices,CBMS series 25(1976)

[15] I.N. HERSTEIN : Notes from a ring conference, Ibid. 9 (1971)

[16] N.JACOBSON : PI-algebras, an introduction, LNM 441(1975)

[17] D.E. Kunjavokii : On tori with a biquadratic splitting field, Math. USSR. Izv. 12(1978), 536 - 542

[18] H.W. LENSTRA, JR. : Rational functions invariant under a finite abelian group, Inv. Math. 25(1974), 299 - 325

[19] J. MILNOR : Introduction to algebraic K-theory, Ann. Math. Studies 72(1971)

[20] 宮田武彦:有限群の整数表現とコホモロジー.マセマティクス 7

[21] __________ : Invariants of certain groups, Nagoya Math. J. 41(1971), 69 - 73

[22] C. PROCESI : Noncommutative affine rings, Atti Accad. Naz. Lincei 8(1967) 239-255

[23] __________ : Rings with polynomial identities, Marcel Dekker, 1973

[24] __________ : The invariant theory of nxn matrices, Adv. in Math. 19 (1977), 306 - 381

[25] __________ : Trace identities and standard diagrams, in Ring Theory, Proc. of the 1978 Antwerp Conference, Marcel Dekker, 1980

[26] M.L. RACINE : A simple proof of a theorem of Albert, Proc. AMS 43 (1974), 487 - 488

[27] Ju.P. RAZMYLOV : Trace identities of full matrix algebra over a field of char. zero, Izv. Akad. Nauk USSR 8(1974), 727 - 760

[28] S. ROSSET :Generic matrices, K_2, and unirational fields, Bull. AMS. 81(1975), 707 - 708

[29] ________ : Abelian splitting fields of division algebras of prime degree, Comment. Math. Helvetici 59(1977), 519 - 523

[30] L. SNIDER : Is the Brauer group generated by cyclic algebras ? in Ring Theory, Waterloo, 1978, 279 - 301, LNM 734 (1979)

[31] R.G. SWAN : Invariant rational functions and a problem of Steenrod, Inv. Math. 7(1969), 148 - 158

[32] V.E. VOSKRESENSKII : Fields invariants of abelian groups, Russian Math. Surveys 28(1973), 79 - 105

[33] ________________ : Birational properties of linear algebraic groups, Math. USSR-Izv. 4(1970), 1 - 17

[34] L.H. ROWEN : Polynomial identities in ring theory, Academic Press, 1980