数理解析研究所講究録
446巻 1981年 56-69

ある種のアフィン面のトポロジーについて

東大 教養　藤田 隆夫

(This article is essentially an abstract of my forthcoming paper "On the topology of non-complete algebraic surfaces".)

対数的小平次元の理論によれば，コンパクトなものに関する古典的な場合と同様に，代数曲面（本稿では特に断らない限り複素数体$\mathbb{C}$上定義されたアフィン曲面とする）は$\bar{\kappa}$の値により4種に分類される；

$\bar{\kappa}=-\infty$ ；　このような曲面に対しては宮西－杉江のruling定理（cf. [MS] & [F1]）が構造研究の手がかりとなる。コンパクトな場合のCastelnuovoの結果に相当する。

$\bar{\kappa}=0$　及び　$\bar{\kappa}=1$ ：　これについては$\mathbb{Q}$－係数因子のZariski分解の理論を用いて川又[Kw] により飯高fibrationの構造に関するくわしい結果が得られている。

$\bar{\kappa}=2$ ：　対数的標準多元環が有限生成，というたぐいの

ことはコンパクトの場合同様にできる（cf.［Kw ］）が，くわしい構造ということになるとお手上げ。

ここでは，$\bar{\kappa} \leqq 1$ の曲面に関する上述の理論を応用して，それらの位相的性質（例えばベッチ数 b_i，基本群 π_1，など）を調べてみることにする。ただし研究の現状は一般理論の構築というのとはちがっており，いくつかのトピックが散発的に（だがお互いに関連しつつ）出現してきている，と形容するのが妥当であろう。

§1.

$\bar{\kappa} = -\infty$ の場合の理論の応用として次の問題を考える。

問．$f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow S$ を dominant な morphism とする。このとき S はどのような曲面であり得るか？

我々は S が smooth で affine の場合を調べる。

まず，次の lemma より $\pi_1(S)$ は有限群。

Lemma．$\varphi : M \longrightarrow N$ が dominant morphism なら，$\pi_1(M)$ の像は $\pi_1(N)$ 内に於て finite index．

上の補題の証明はやさしい。

次に，対数的小平次元の理論（cf.［I ］etc.）によって $\bar{\kappa}(S) \leqq \bar{\kappa}(\mathbb{A}^2) = -\infty$ だから，次の定理が適用できる。

定理（cf.［MS］）．S が smooth affine 曲面で $\bar{\kappa} = -\infty$

ならば，Sのあるコンパクト化$\bar{S}$と，$\bar{S}$からある曲線C上へのmorphism φで，φをSに制限したときの一般ファイバーが$\mathbb{A}^1$であるようなものが存在する。

Fをφの一般ファイバー，$D=\bar{S}-S$（これらは$\bar{S}$上の因子）としたとき，上の条件は $F\cong\mathbb{P}^1$ & $FD=1$ というのと同値になる。

そこで，上のようなfibrationを持つ曲面の基本群がどうなるかを考えることにしよう。

定義。C上の各点xに対し，その上のファイバー$X=\varphi^{-1}(x)$の重複度μ_xを次のように定義する。まず，C上のCartier因子としてのxの引きもどしとしてのXを素因子の和に分解し，$X=\sum_i \mu_i Y_i + \sum_j \mu_j Z_j$，ここで $Y_i \not\subset D$，$Z_j \subset D$，と書く。そして $\mu_x = g.c.d.(\mu_i)$ とする。つまり，φのSへの制限φ_0のx上のファイバーの各素因子の係数の最大公約数がμ_xである。もし $X\subset D$ ならば，$\mu_x=\infty$ と規約する。

φのファイバーFで $F\cong\mathbb{P}^1$，$FD=1$ とならないようなものは有限個しかない。それらを$X_1,\cdots,X_r$とし，S_0を $S-\bigcup_{\rho=1}^{r} X_\rho$，$C_0=\varphi(S_0)$ とする。S_0は明らかにC_0上の$\mathbb{A}^1$-バンドルで，$\pi_1(C_0)\cong\pi_1(S_0)$と自然に同一視できる。点$x_\rho=\varphi(X_\rho)$のまわりを一周するloop

が表わす $\pi_1(C_0)\cong\pi_1(S_0)$ の元を δ_ρ とする。$\pi_1(C)$ は $\pi_1(C_0)$ を関係 $\delta_1=\cdots=\delta_r=1$ で割った剰余群である。特にCが rational なら，$\pi_1(C_0)$ は δ_ρ 達で生成され，それらの間の関係は（適当な標準化の後に）$\delta_1\cdots\delta_r=1$ で与えられる。

S_0 はSの Zariski open subset であるから，$\pi_1(S)$ は同様に $\pi_1(S_0)$ の剰余群として与えられる。

今 φ のファイバーXの一つの素因子YをSから取り除いた曲面を S' とすると，$\pi_1(S)$ は $\pi_1(S')$ の剰余群であって，その核はYのまわりをまわる loop に当たる $\pi_1(S')$ の元で生成される。これは $\pi_1(S_0)\cong\pi_1(C_0)$ の元 δ^{μ_i} の像に他ならない。但し μ_i はXにおけるYの重複度.

こうして X_ρ の各素因子 Y_i に対し $\delta_\rho^{\mu_i}=1$ なる関係が $\pi_1(S)$ では生ずるから，$\pi_1(S_0)\longrightarrow\pi_1(S)$ の核は関係式 $\delta_1^{\mu_1}=\cdots=\delta_r^{\mu_r}=1$ で与えられる。ただし，$\mu_\rho=\mu_{x_\rho}$，$x_\rho=\varphi(X_\rho)$ for $\rho=1,\cdots,r$ である。また $\mu_\rho=\infty$ のときは $\delta_\rho^{\mu_\rho}=1$ は何の関係をも意味しない。

我々が考えているように $\mathbb{A}^2$ で dominate されている場合にはSは rational であり，従って $C\cong\mathbb{P}^1$ である。そこで $\pi_1(S)$ は有限個の元 $\delta_1,\cdots,\delta_r$ で生成され，それらの関係は $\delta_1\cdots\delta_r=\delta_1^{\mu_1}=\cdots=\delta_r^{\mu_r}=1$ によって与えられる。ここ

で S_p 達は φ の特異ファイバー達に対応し，μ_p はその重複度（3ページの def. の意味）に対応する。結果的に $\mu_p=1$ となる特異ファイバーは無視してよいことになるから，以下 $\mu_p \geqq 2$ と仮定しよう。

上のような群が有限になる場合はよく知られていて次の通りである。

1) $r \leqq 1$. このとき $\pi_1(S)=\{1\}$。

2) $r=2$ & $(\mu_1, \mu_2) \neq (\infty, \infty)$。このとき $\pi_1(S)$ は cyclic 。

3) $r=3$ & $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=(2, 2, m)$, $m<\infty$。このとき π_1 は m 次の dihedral 群.

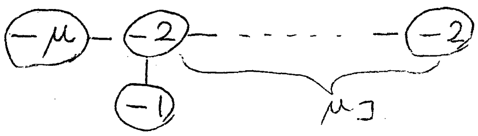
4) $r=3$ & $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=(2, 3, 3)$。$\pi_1$ は4次交代群。

5) $r=3$ & $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=(2, 3, 4)$。4次対称群 S_4。

6) $r=3$ & $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=(2, 3, 5)$。5次交代群 A_5.

上記6つの場合はすべて現実に起こり得る。その理由を略述しよう。他も同様だから5）の場合に即し記す。

まず，$\varphi_S : S \to C$ のすべてのファイバーが（重複度を無視すれば）$\mathbb{A}^1$ になるような曲面を選ぶ。この条件下で重複度 μ のファイバーを構成するには，一般ファイバー ⓪ を順次 blow-up することにより



なる型のファイバーを構成し，(−1) 以外の成分をSから除けばよい。ただしここで (k) は自己交点数kの$\overline{S}$上の$\mathbb{P}^1$を表わす。

次に有限分岐被覆 $p : \hat{C} \to \mathbb{P}^1 = C$ で $\mathrm{Gal}(\hat{C}/C) \cong S_4$, pの分岐跡は3点x_1, x_2, x_3，xの上での分岐orderはそれぞれ2，3，4 となるものをとる。$\hat{S}$をpによるSの引きもどしのnormalization とする。このときx上の$\hat{S}$のファイバーはμ個の$\mathbb{A}^1$（重複度1）のdisjoint union になる。但しμはSのx上のファイバーの重複度でxはx_1, x_2, x_3のいずれか。これより$\hat{S}$のZariski open subset で$\hat{C}$上の$\mathbb{A}^1$バンドルになるものがある。一方Hurwitz の公式により$\hat{C}$の種数が0であることが示される。以上をあわせ$\hat{S}$は$\mathbb{A}^2$を開部分集合として持つことがわかる。

かくて $\mathbb{A}^2 \subset \hat{S} \longrightarrow S$ が目的の morphism を与える。

注．この問題は全く別の観点から［M ］によっても既に取り扱われている。結果もよく似ている。

§2.

$\overline{\kappa} \geq 0$ の場合の研究の出発点としてZariski 分解の理論

を復習する。

定理．Eを完備曲面$\bar{S}$上の（$\mathbb{Q}$-係数）effective divisorとする。そのとき次の条件をみたす有理係数有効因子Nがただ一つ存在する。

i) $H=E-N$ は半正値，即ち$\bar{S}$上の任意の曲線Cに対して $HC\geq 0$．

ii) $X_1, X_2, \cdots, X_r$ をNの素因子とするとき，それらの交点数行列 (X_iX_j) は負定値．

iii) $HX_j=0$ for $j=1,\cdots,r$．

定義．HとNはEで定まるから，それぞれE^+, E^-と書く。$E=E^+ +E^-$ をEのZariski分解と呼ぶ。

開曲面の分類理論に次の川又の結果（cf.[Kw]）は重要。

定理．$\bar{S}$を完備曲面，Dを$\bar{S}$上の有効因子，Dの特異点はnodeしかない，とし，$S=\bar{S}-D$ とおく。Kを$\bar{S}$の標準バンドルとする。$\bar{\kappa}(S)\geq 0$ なる $K+D$ は$\mathbb{Q}$係数effective divisorで表わせるが，そのZariski分解については

1) $\bar{\kappa}(S)=0 \iff (K+D)^+=0$．

2) $\bar{\kappa}(S)=1 \iff (K+D)^+\neq 0$ & $(K+D)^{+\,2}=0$

3) $\bar{\kappa}(S)=2 \iff ((K+D)^+)^2>0$ 。

注意．$K+D$ のZariski分解のあり方は一般には結構複雑になり得る。だが，以下の２条件（一種のminimality）が成立

つ時は，$(K+D)^-$ をDのdual graphから具体的に計算することができる。

イ）$\bar{S}$上の例外曲線Y（即ち $Y^2=-1$, $Y\cong\mathbb{P}^1$）で $Y\not\subset D$ なるものについては $YD\geq 2$.

ロ）$\bar{S}$上の例外曲線Yで $Y\subset D$ となるものに対しては $Y(D-Y)\geq 3$.

ただし詳細は［F2］参照。

$\mathrm{Pic}(\bar{S})$ をDの素因子達で生成される群でわった剰余群を $\mathrm{Pic}(S)$ とおく。実際これはSの完備化のとり方によらない不変量であることが容易に確かめられる。Sがaffineで Spec A なる形のとき，$\mathrm{Pic}(S)=0$ とAがUFDなこととは同値。また，Sがrationalで $b_2(S)=0$ ならば $\mathrm{Pic}(S)$ ~~の~~ がtorsion群となることも簡単にわかる。

ここでは $\mathrm{Pic}(S)$ がtorsion群（従って有限群）となる場合を調べてみよう。

定理．$\bar{\kappa}(S)=1$ ならば $\mathrm{Pic}(S)\neq 0$.

証明のあらすじ。上述の2条件イ），ロ）を満たす場合に帰着させる。この極小の場合には，$K+D$ のZariski分解の有様と川又による飯高fibrationの構造理論とをあわせ考えることによって矛盾が出る（$\mathrm{Pic}(S)=0$ とすると）。詳細略。

注意．$\bar{\kappa}=1$ でも $\mathrm{Pic}(S)$ が有限群となる場合はたくさんある（無限個で簡単には数えきれない）。

定理．$\bar{\kappa}=0$ で $(\bar{S},D)$ が上述の条件イ），ロ）をみたすとする。さらに $\mathrm{Pic}(S)$ が有~~群~~限群と仮定。このとき $(\bar{S},D)$ は次のどれかのタイプ：(*)，$\bigcirc(1,1,1)$，$\bigcirc(4,1)$，$\bigcirc(k+4,-k)$ $H[-1,0,-1]$，$H[k,-k]$，$Y\{3,3,3\}$，$Y\{2,4,4\}$，$Y\{2,3,6\}$．
これらのくわしい構造は次の通り。

(*) $\bar{S}\cong\mathbb{P}^2$，D は非特異3次曲線．

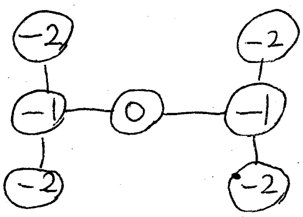
$\bigcirc(1,1,1)$：$\bar{S}\cong\mathbb{P}^2$，D は3本の直線，$S\cong\mathbb{A}^*_1\times\mathbb{A}^*_1$．

$\bigcirc(4,1)$：$\bar{S}\cong\mathbb{P}^2$，$D=C+\ell$，C は非特異2次曲線，ℓ は line。

$\bigcirc(k+4,-k)_{k\geq -1}$：$\bar{S}\cong\Sigma_k\cong\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0))$，$D=Y_1+Y_2$，$Y_1$ は $\bar{S}$ 上の $Y_1^2=-k$ なる唯一の curve，Y_2 は $|Y_1+(k+2)F|$ の smooth member，ただし F は $\Sigma_k\to\mathbb{P}^1$ のファイバー。（従って Y_1 も Y_2 も $\Sigma_k\to\mathbb{P}^1$ の section であって，$Y_1\cdot Y_2=2$ となる）。

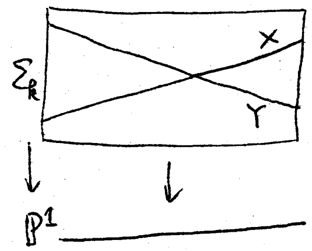
$H[-1,0,-1]$：$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上に bidegree $(2,1)$ の curve C をとる。第2射影を C に制限すると2次の分岐被覆となり，2点で分岐する。これらの点の上で2回ずつ blow-up を行なうと，C の proper transform 及び第2射影の2つのファイバーの proper transforms とで次のような dual graph ができ

る：



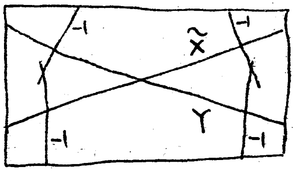
これがこのtypeのD。

$H[k,-k]$, $k>0$：Σ_kから出発して次のようにしてこの型は構成される。Yを$Y^2=-k$なる$\Sigma_k \to \mathbb{P}^1$のsectionとし，別に$|Y+(k+1)F|$のmemberたるcurve Xをとる。Xは$XY=1$をみたす$\Sigma_k \to \mathbb{P}^1$のsectionになっている。

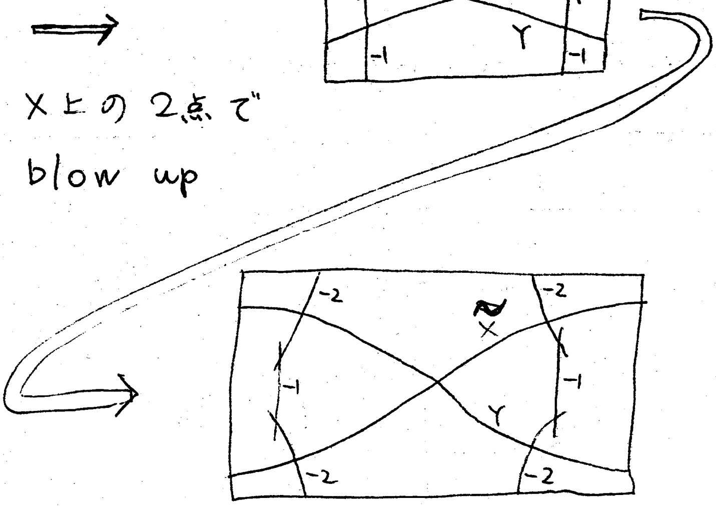


$\Longrightarrow$

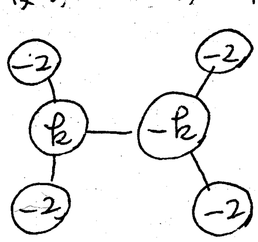
X上の2点でblow up



新な-1曲線の2ヶ所の交点でblow-up

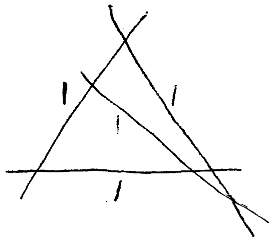


最後の2つの-1曲線を省いて，Dとしてはdual graphが

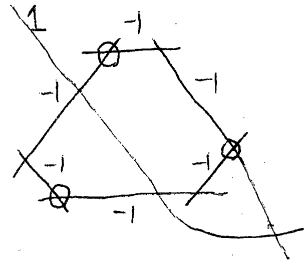


となるものをとる。k，$-k$はそれぞれX及びYのproper transformを表わす（もちろん$\tilde{X}^2=k$）。

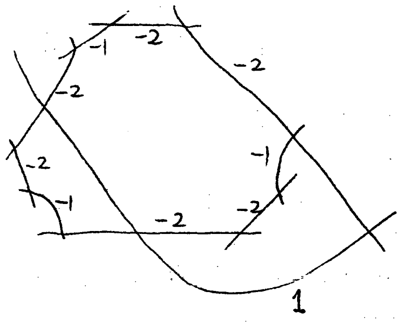
$Y\{3,3,3\}$：上と同様にして構成法を図解しよう。出発は$\mathbb{P}^2$上の4本のlinesからである。



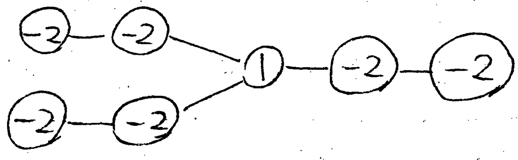
3交点 blow-up



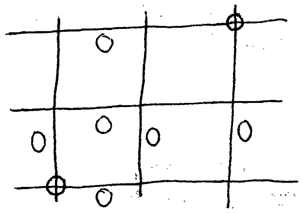
左図○印の 3点 blow up



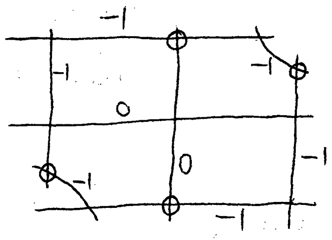
−1 曲線を除き D を得る。dual graph は下の通り。



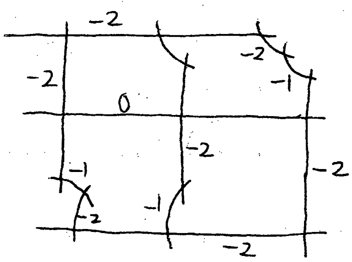
Y{2, 4, 4} : $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の，2つの射影のそれぞれ3本ずつのファイバーから出発する。



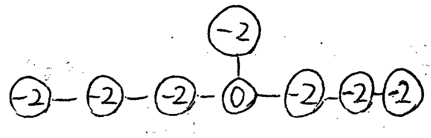
左図○印の 2点 blow up



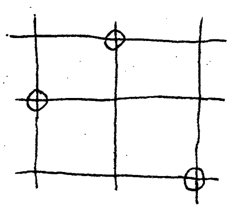
右上図○印の 4点 blow up



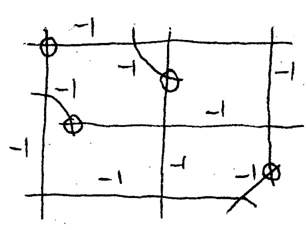
−1 曲線を除き D を得る。dual graph は

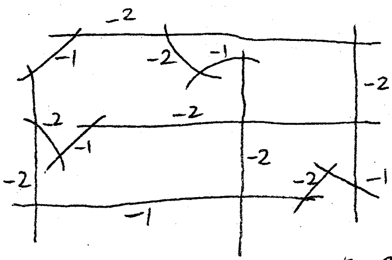


Y{2, 3, 6} : 上と同じ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の田の字形の図形から出発する。



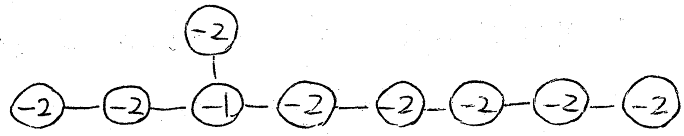
左○印の 3点 blow up





右上図○印の
4点 blow up。

最後に現れた4つの −1 curves を除いてDを得る。その dual graph は



。

注意．極小条件イ)，ロ)が満たされないときは，ある種の標準的操作によってモデルを取り代えて（Sそのものもいくらか変わる）極小な場合にいろんな問題を帰着できる。こうして例えば次が得られる。

系．$\bar{\kappa}(S)=0$ で $\mathrm{Pic}(S)=0$ とするとSは0型。従って特に $b_1(S)>0$．

§3. 応用

定理（上田・鈴木 [U] & [Su]）．$\mathbb{C}^2$ や $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ のコンパクト化はスタンダードなものと双有理同値。

略証。$(\bar{S}, D)$ をSのコンパクト化で $S\simeq\mathbb{C}^2$（双正則）とする。$b_1(S)=b_2(S)=0=H^2(S;\mathbb{Z})$ だから，Sは affine であることは容易にわかる。酒井の定理（cf.[Sa]）によって $\bar{\kappa}(S)=2$ ではあり得ない（注：一般には $\bar{\kappa}$ はSのコン

パクト化による。非代数的な場合も含めるとコンパクト化は互いに双有理同値と限らない。)。また前§の結果によって$\bar{\kappa} = 0$ or 1 でもあり得ない。よって$\bar{\kappa} = -\infty$。そこで宮西－杉江のruling定理が適用でき，容易に結論に至る。

注．同様の論法は$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ のrational compactificationにも適用できる。なお上田〔U〕，鈴木〔Su〕における証明方法はRamanujam のものに似ておりここで示したものとは全く異なる（結果はもっとくわしい）。

$\mathbb{A}^2$の場合と同様に，様々な型の曲面に次のcancellation定理が成立する。

定理．$S \times V \cong X \times V$ となる代数多様体V，Xがあれば$S \cong X$．

例1．$S = \mathbb{A}^2$．証明：$\mathbb{A}^2$は次のcancellation不変量$\bar{\kappa}$，b_1，b_2，b_3，$H^2(S;\mathbb{Z})$ によって特徴づけられる．

例2．SがY型の曲面のとき。証明：Y型曲面は，$\bar{\kappa} = 0$，$b_1 = b_2 = 0$，$b_3 = 0$，及び$H^2(S;\mathbb{Z})$ により特徴づけられる。

同様の方法により，他にもこの性質を持つ代数曲面Sがたくさんみつかるであろう。

参考文献

[F1] T. Fujita; On Zariski problem, Proc. Japan Acad. 55 (1979), 106 – 110.

[F2] T. Fujita; On the topology of non-complete algebraic surfaces, preprint.

[I] S. Iitaka; On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties, Complex Analysis & Algebraic Geometry, pp. 175 – 189, Iwanami, 1977.

[Kw] Y. Kawamata; On the classification ----, pp. 215-232, Lecture Notes in Math. 732, Springer, 1979.

[M] M. Miyanishi; Theory of non-complete alg. surfaces Lecture Notes in Math. 857, Springer

[MS] M. Miyanishi & T. Sugie; Affine surfaces containing cylinderlike open sets, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980), 11 – 42

[Sa] F. Sakai; Kodaira dimensions of complements of divisors, Complex Analysis & Algebraic Geometry, p.p. 239-257 Iwanami, 1977

[Su] M. Suzuki; Compactifications of $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ and $(\mathbb{C}^*)^2$, Tohoku Math. J. 31 (1979) 453 – 468

[U] T. Ueda; ibid., same Journal, same volume, 81 – 90.

[Z] O. Zariski; Ann. of Math. 76 (1962) 560 – 615 // J.