数理解析研究所講究録
447巻 1981年 108-116

KdV方程式 と アファインリー代数 $A_1^{(1)}$

京都大学 伊達 悦朗
〃 神保 道夫
〃 柏原 正樹
〃 三輪 哲二

以下は，著者たちの連作 Transformation groups for soliton equations I ～ VII （RIMS プレプリント 356 ～ 362）の 部分的な紹介である。詳しくは，それらを参照されたい。参考文献も，ここには挙げなかった。

§1 KdV 方程式

次の非線型方程式は KdV 方程式と呼ばれる。

$$4u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{1}$$

この方程式は，Korteweg と de Vries により，浅い波を記述する方程式として提出された。注目を浴びるようになったのは， Gardner，Greene，Kruskal，Miura により，逆散乱法を使っての初期値問題の解法が発見されてからである。彼らの論文をきっかけとして，この分野すなわちソリトン理論は，爆発的な進展を見せた。ソリトン理論に

現われる方程式の特徴は，具体的な解が数多く作れるという点にある。では，どのような機構が根拠になって解が作れるのか。実例の構成とともにこの点の解明が研究者の興味の中心であった。

Laxは次の点に着目した。未知函数 $w(x,t)$ に対する次の連立線型系を考える。

$$(\partial_x^2 + u)\, w = \lambda\, w \tag{2}$$

$$\partial_t w = \left(\partial_x^3 + \frac{3}{2} u \partial_x + \frac{3}{4} u_x\right) w \tag{3}$$

方程式(1)は(2)と(3)が同時に解けるための条件である，というのがLaxの発見であった。

Hirotaは新しい未知函数 $\tau(x,t)$ を

$$u(x,t) = 2\partial_x^2 \log \tau(x,t) \tag{4}$$

によって導入すると，(1)が特徴的な形に書き直せる事を示した。我々は $\tau(x,t)$ をKdV方程式の τ 函数と呼ぶ。彼の記法に従えば (1)は

$$(D_x^4 - 4D_t D_x)\,\tau\cdot\tau = 0 \tag{5}$$

となる。ここで，$D_x^4 - 4D_tD_x$ は広田微分と呼ばれる演算で，一般に $x, t, y, \cdots$ の函数 $f(x,t,y,\cdots)$, $g(x,t,y,\cdots)$ と $D_x, D_t, D_y, \cdots$ の多項式 $P(D_x, D_t, D_y, \cdots)$ に対して

$$P(D_x, D_t, D_y, \cdots)\, f\cdot g$$
$$= P(\partial_{x'}, \partial_{t'}, \partial_{y'}, \cdots)\left(f(x+x', t+t', y+y', \cdots)\, g(x+x', t+t', y+y', \cdots)\right)\Big|_{x'=t'=y'=\cdots=0} \qquad (6)$$

と定義される。彼はこの形を使って，任意パラメタ $a_1, \cdots, a_N, p_1, \cdots, p_N$ を含む次の解を得た。これは N ソリトン解と呼ばれる。

$$\tau(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_n\le N} a_{j_1}\cdots a_{j_n} \times \prod_{\substack{j,j'=j_1,\cdots,j_n \\ j<j'}} \frac{(p_j - p_{j'})^2}{(p_j + p_{j'})^2}\, e^{2\sum_{j=j_1,\cdots,j_n}(xp_j + tp_j^3)} \qquad (7)$$

(1)において x を1次，t を3次と数えるのが自然である。$x = x_1$，$t = x_3$，$\partial_x = \partial_1$，$\partial_t = \partial_3$ と書こう。(3)の代わりに，適当に

$$\partial_{2n+1} w = \left(\partial_1^{2n+1} + \frac{2n+1}{2} u \partial_1^{2n-1} + \cdots\right) w \quad (8)$$

をとり，(2)との両立条件を考えると，$(2n+1)$ 次 KdV 方程式と呼ばれる非線型方程式を得る。こうして得られる高次 KdV 方程式の系列を KdV 系列と呼ぶ。(7)において，指数函数の部分を次のように変えると KdV 系列を

一斉に満たす N ソリトンが得られる。

$$\tau(x)=\sum_{n=0}^{N}\ \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_n\leq N} a_{j_1}\cdots a_{j_n}$$

$$\times\prod_{\substack{j,j'=j_1,\cdots,j_n\\ j<j'}}\frac{(p_j-p_{j'})^2}{(p_j+p_{j'})^2}\, e^{2\sum_{j=j_1,\cdots,j_n}(x_1p_j+x_3p_j^3+x_5p_j^5+\cdots)} \tag{9}$$

Sato (M. and Y.) は逆に次の問を立てた。N ソリトン解 (9) はどれだけ多くの広田方程式を満たすか。彼らは次の結果を得た。斉次 m 次の多項式 $P(D)$ のうち $P(D)\tau\cdot\tau=0$ を満たすものの次元は

$$\#\left\{(m_1,\cdots,m_k)\,\middle|\, m_i:\text{正の奇数},\ m_1\leq\cdots\leq m_k,\ \sum_{i=1}^{k}m_i=m\right\}$$
$$-\#\left\{(m_1,\cdots,m_k)\,\middle|\, m_i:\text{正の偶数},\ m_1<\cdots<m_k,\ \sum_{i=1}^{k}m_i=m\right\} \tag{10}$$

次節において，KdV 方程式に対するまたひとつ新しい視点を与える。それは，アファインリー代数 $A_1^{(1)}$ の基本表現を $\mathbb{C}[x_1,x_3,x_5,\cdots]$ 上に実現したものが，KdV 系列の τ 函数である，とまとめられる。Sato の上記の結果はこの言い換えにより，$A_1^{(1)}$ の指標公式の系となる。

§2. $A_1^{(1)}$の基本表現

2行2列の行列 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ を考える。これを$(C_{ij})_{1\le i,j\le 2}$と書こう。アファインリー代数 $A_1^{(1)}$は，次の定義関係式を満たす6個の要素 $e_0, e_1, f_0, f_1, h_0, h_1$ から生成された無限次元リー代数である。

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \quad , \quad [h_i, h_j] = 0$$
$$[h_i, e_j] = C_{ij} e_j \quad , \quad [h_i, f_j] = -C_{ij} f_j$$
$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-C_{ij}} e_j = 0 \quad , \quad (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-C_{ij}} f_j = 0 \tag{11}$$

Λを $\mathbb{C}h_0 \oplus \mathbb{C}h_1$ 上の linear formで

$$\Lambda(h_0) = 1 \quad , \quad \Lambda(h_1) = 0 \tag{12}$$

を満たすものとする。$A_1^{(1)}$の基本表現とは，表現加群が，次の関係を満たすベクトル v から生成されるものをいう。

$$h_i v = \Lambda(h_i) v \quad , \quad e_i v = 0 \quad (i=0,1) \tag{13}$$

Λを highest weight，vを highest weight vector と呼ぶ。この表現加群を $V(\Lambda)$ と書く。

Lepowsky, Wilson は $V(\Lambda)$ が無限変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \cdots]$ によって実現される事を示した。彼らは vertex operator と呼ばれる次の形の無限階微分作用素を考える。

$$X(p) = \exp\left(2\sum_{l:odd} x_l p^l\right) \exp\left(-2\sum_{l:odd} \frac{1}{lp^l}\frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k p^k \qquad (14)$$

X_k $(k\in\mathbb{Z})$, 1, x_l, $\frac{\partial}{\partial x_l}$ $(l:odd)$ の $\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \cdots]$ における作用が，定数1を highest weight vector とする $A_1^{(1)}$ の基本表現を与える，というのが彼らの結果である。

定数1は，KdV 方程式の自明なて函数である。これに $\exp(a_1 X(p_1))$, $\exp(a_2 X(p_2))$, $\cdots$ を順に作用させて何が得られるか見てみよう。operand を明示するため [ ] でかこむ。まず

$$\exp\left(-2\sum_{l:odd}\frac{1}{lp^l}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\left[\exp\left(2\sum_{l:odd} x_l q^l\right)\right]$$

$$= \frac{(p-q)^2}{(p+q)^2}\exp\left(2\sum_{l:odd} x_l q^l\right) \qquad (15)$$

これより

$$\exp(a_1 X(p_1))[1] = 1 + a_1 \exp\left(2\sum_{l:odd} x_l p_1^l\right)$$

$$\exp(a_2 X(p_2))\cdot\exp(a_1 X(p_1))[1] = 1 + \sum_{i=1}^{2} a_i \exp\left(2\sum_{l:odd} x_l p_i^l\right) +$$

$$+ a_1 a_2 \frac{(p_2-p_1)^2}{(p_2+p_1)^2} \exp\left(\sum_{i=1}^{2} 2 \sum_{l:odd} x_l p_i^l\right) \quad (16)$$

などとなる。一般に，$\exp(a_N X(p_N)) \cdots \exp(a_1 X(p_1))[1]$ は，KdV 系列の N ソリトン（9）を与える。従って我々の結果は次の通り。

KdV 系列の τ 函数の全体は，$A_1^{(1)}$ の基本表現を $\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \cdots]$ において実現した際の highest weight vector 1 の軌道になる。

広田方程式は次の形の方程式である。

$$P(\partial_y)\left(\tau(x+y)\,\tau(x-y)\right)\Big|_{y=0} = 0 \quad (17)$$

$x^{(1)} = x+y$，$x^{(2)} = x-y$ とおこう。$A_1^{(1)}$ の highest weight 2Λ に対する表現加群は $\mathbb{C}[x_1^{(1)}, x_3^{(1)}, x_5^{(1)}, \cdots] \otimes \mathbb{C}[x_1^{(2)}, x_3^{(2)}, x_5^{(2)}, \cdots]$ の中に，KdV 系列の τ 函数に対する $\tau(x^{(1)})\tau(x^{(2)})$ の形の要素全体の linear hull として実現される。これを $V(2\Lambda)$ と書こう。

$$\Omega = V(2\Lambda) \cap \mathbb{C}[y_1, y_3, y_5, \cdots] \quad (18)$$

とおく。Ω は，$\tau(x+y)\,\tau(x-y)$ を

$$\sum_{i=1}^{J} F_i(x)\, G_i(y) \quad (F_i(x)\ (i=1,\cdots,J) \text{ は線型独立}) \quad (19)$$

の形に書いた時に現われる $G_i(y)$ の全体の linear hull と一致する。(17) から，$P(\partial_y)$ に対する条件として

$$P(\partial_y)\, G_i(y)\Big|_{y=0} = 0 \qquad (20)$$

よって，Sato の問題は，Ω の斉次 m 次部分の次元を勘定する事に帰着された。

この最後の問題は，Lepowsky－Wilson によって解かれている。$\Omega(m)$，$V(\Lambda)(m)$, $V(2\Lambda)(m)$ をそれぞれ Ω，$V(\Lambda)$，$V(2\Lambda)$ の斉次 m 次部分とし

$$ch_q \Omega = \sum_{m=0}^{\infty} \dim \Omega(m)\, q^m$$
$$ch_q V(\Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \dim V(\Lambda)(m)\, q^m$$
$$ch_q V(2\Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \dim V(2\Lambda)(m)\, q^m \qquad (21)$$

とおく。$ch_q V(\Lambda)$，$ch_q V(2\Lambda)$ は，$V(\Lambda)$, $V(2\Lambda)$ の指標と呼ばれ，次の式で与えられる。(前者は $V(\Lambda) = \mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \cdots]$ 故自明である。)

$$ch_q V(\Lambda) = 1 \Big/ \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{2k-1})$$
$$ch_q V(2\Lambda) = 1 \Big/ \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{4k-2})(1-q^{2k-1}) \qquad (22)$$

彼らによれば

$$ch_q \Omega = ch_q V(2,1) / ch_q V(1) \quad (23)$$

これから Sato の結果 (10)が従う。

(最後に) 近々，数学（岩波書店）に著者たちの論説が出る予定なので，それも参照していただきたい。ここでは，なるべく，disjoint になるように書いた。従って，佐藤先生たちの結果についても，著者たちの結果についてもここに書かれているのは，主要部分のすべてではない事をお断わりしておく。