数理解析研究所講究録
447巻 1981年 32-43

On symplectic Euler factors of genus two

九大 教養部　　伊吹山 知義

$SL_2(\mathbb{R})$ と $SU(2)$ の保型形式の間の Hecke algebra modules としての同型写像が Eichler [1] 以来研究されてきた。(Shimizu [13], Jacquet-Langlands [10], Hijikata, Saito 等) 現在では、これらは $GL_2(\mathbb{Q}_A)$ と $D_A^\times$ (D は $\mathbb{Q}$ 上の4元数環、添字 A はアデール化をあらわす。) の保型表現の間の対応という形で述べられている。さて、この問題の拡張として、$Sp(2,\mathbb{R})$ (行列の size 4) の通常の (よくわかる離散群に関する) Siegel cusp forms と $Sp(2)=\{g\in M_2(\mathbb{H});\ g{}^t\bar{g}=1_2\}$ ($\mathbb{H}$: Hamilton quaternions) の保型形式 (つまり適当な球函数) の間の簡潔な同型を捜すことを目標にしたい。なおこの問題は Ihara [9] により、1964年頃提出された。より一般的には、Langlands により、後に、L-groups に関する functoriality という形で問題が提出されている。(cf. [12]) さて、Ihara [9] では、もし同型があれば weight (定義は後述) が、

$k = \nu + 3$ の関係にあるべきことが主張され、また、$Sp(2)$ への $\Gamma_0(d)$ からの lift も与えられている。しかし、L函数の一致しそうな保型形式（ないしは離散群）の候補については何も知られていなかった。ここでは、両者のL函数の Euler 3-factors の一致する実例を述べ、また、離散群をはっきり指定して、同型対応の予想を述べる。（なお以上の歴史のより詳しい解説は [5] を参照されたい）さて、おおざっぱに言って、古典的に綺麗な対応は、両方の群の（$\mathbb{Q}$-formの）、local completion が minimal parahoric subgroups になるような離散群に関する保型形式間で得られるであろうというのが予想の主旨である。実際、$\mathbb{Q}_p$上の reductive algebraic group では、minimal parahoric は共役を除いて1つしかないのであるから、審美的観点から言えば望ましい姿であるし、また、次元公式（[3]、[4]）もこの予想を支持しているように思われる。（実際には、explicit な次元公式は、未計算な群が少し残っているが、Hashimoto [3] によって、解析的困難はすべて解決されている。詳しくは、この報告集の橋本氏自身の記事を参照されたい。また、次元の main term（最高次の項）は、群の index で書けるのが自明であり、これの「一致」が例を計算しはじめた動機であった。）なお minimal でない parahoric についても非常にもっともらしい予想が

ある。

§1. Parahoric subgroups と new forms

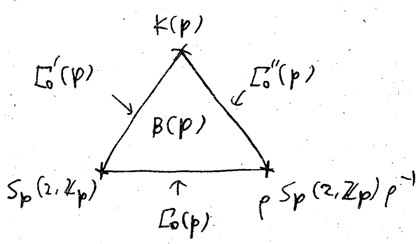
New form の概念を正確に定義するために、parahoric subgroups について簡単に復習する。

1) $Sp(2,\mathbb{R})$ の場合

$Sp(2,\mathbb{Q}_p)$ の部分群 $B(p)$ を次で定義する。

$$B(p) = \left\{ g \in Sp(2,\mathbb{Z}_p)\,;\ g \equiv \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \bmod p \right\}$$

$B(p)$ は $Sp(2,\mathbb{Q}_p)$ の Iwahori subgroup (minimal parahoric) であり、$B(p)$ を含む parahoric subgroups は、$B(p)$ を入れて 7 つあって、次の絵で与えられる。



但し $\rho = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & p & & \\ p & & & \end{pmatrix}$

各頂点は maximal compact を表わし、2つの頂点に対応する群の共通部分は、そのはさむ辺に対応する群 etc. より詳しくは、

$$S_1 = B(p)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}B(p),\quad S_2 = B(p)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}B(p),\quad S_0 = B(p)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}B(p)$$

とおくとき、$\Gamma_0(p) = B(p) \cup S_1$, $\Gamma_0'(p) = B(p) \cup S_2$, $\Gamma_0''(p) = B(p) \cup S_0$

$K(p) = B(p) \cup S_0 \cup S_2 \cup S_0S_2$ と書ける。これらは勿論皆より具体的に書ける。たとえば、

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z}_p) \ ; \ C \equiv 0 \bmod p \right\},$$

$$K(p) = \left\{ g \in Sp(2, \mathbb{Q}_p) \ ; \ g = \begin{pmatrix} * & * & p^{-1}* & * \\ p* & * & * & * \\ p* & p* & * & p* \\ p* & * & * & * \end{pmatrix}, * \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

である。ちなみに、$\rho^{-1}\Gamma_0'(p)\rho = \Gamma_0''(p)$ であり、また、$K(p)$ は $Sp(2, \mathbb{Z}_p)$ とは共役でない。

さて、P を上のような parahoric とする時、以下では $Sp(2, \mathbb{Q}_A)$ 内で $Sp(2, \mathbb{R}) \cdot \prod_{q \neq p} Sp(2, \mathbb{Z}_q) \cdot P$ を考えて、これと $Sp(2, \mathbb{Q})$ との共通部分もまた P と書くことにする。(S_i も $B(p)$ を global にとって、global な double coset と思うことにする。) $A_k(P)$, $S_k(P)$ でそれぞれ、genus 2 の Siegel 上半空間の P に関する weight k の正則保型形式及び尖点形式の空間をあらわす。さて、New form の空間 $S_k^0(B(p))$ を、$S_k(\Gamma_0(p)) + S_k(\Gamma_0'(p)) + S_k(\Gamma_0''(p))$ の、Peterson metric に関する $S_k(B(p))$ 内での直交補空間として定義する。実は、

$$S_k^0(B(p)) = \{ f \in S_k(B(p)) \ ; \ S_i f = -f, \ i = 0, 1, 2 \}$$

であり、f に対応する local admissible rep. は special である。(但し、S_i は Hecke algebra の元とみなして作用させている。)

2) $Sp(2)$ の場合.

D_p を $\mathbb{Q}_p$ 上の division quaternion algebra として,

$$G_p^* = \left\{ g \in M_2(D_p)\ ;\ g\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}{}^t\bar{g} = n(g)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ n(g) \in \mathbb{Q}_p^\times \right\}$$

とおく。$\mathfrak{O}_p$ を D_p の極大整数環, π を $\mathfrak{O}_p$ の素元とする。

$$U_0(p) = \begin{pmatrix}\mathfrak{O}_p & \mathfrak{O}_p\\ \pi\mathfrak{O}_p & \mathfrak{O}_p\end{pmatrix}^\times \cap G_p^* \quad \text{とおくと, これは } G_p^* \text{ の}$$

minimal parahoric であり. $U_0(p)$ を含む parahoric は次で与えられる。

$U_1(p)$
$\uparrow$
$\leftarrow U_0(p)$
$\downarrow$
$U_2(p)$

$$U_1(p) = G_p^* \cap GL_2(\mathfrak{O}_p)$$

$$U_2(p) = G_p^* \cap \begin{pmatrix}\mathfrak{O}_p, & \pi^{-1}\mathfrak{O}_p\\ \pi\mathfrak{O}_p, & \mathfrak{O}_p\end{pmatrix}^\times$$

($U_1(p)$, $U_2(p)$ は それぞれ principal genus, 及び non principal genus の max. lattice を fix する max. compact)。次に

$$S_1' = U_0(p)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}U_0(p), \quad S_0' = U_0(p)\begin{pmatrix}0, & \pi^{-1}\\ \pi, & 0\end{pmatrix}U_0(p)$$

とすれば. $U_1(p) = U_0(p) \cup S_1'$, $U_2(p) = U_0(p) \cup S_0'$ である。

次に D を判別式素数 p の $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数環として

$$G = \left\{ g \in M_2(D)\ ;\ g\,{}^t\bar{g} = n(g)1_2 \right\} \quad \text{とおく。}$$

$G_{\mathbb{R}}$ の Young diagram に対応する表現を (ρ_ν, V) とする。ρ_ν の表現空間 V は, たとえば次であたえられる。

(Ihara [9])

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{H}^2 \text{上の函数} f \text{で、} \mathbb{H}^2 \cong \mathbb{R}^8 \text{と同一視した時、} 2\nu \text{次} \\ \text{斉次多項式で、} f(ax, ay) = N(a)^\nu f(x, y) \text{ for } \forall a \in \mathbb{H}^\times \\ , (x, y) \in \mathbb{H}^2, \text{ かつ } \Delta f = 0 \text{ なるもの} \end{array} \right\}$$

ここで Δ は Laplacian, $(\rho_\nu(g) f)(x, y) = f((x, y) g)$。

さて G_A の open compact subgp $\mathcal{U}$ に関する重さ ν の保型形式とは、$f : G_A \to V$ なる函数で $f(uxa) = \rho_\nu(u) f(a)$ for all $a \in G$, $u \in \mathcal{U}$, $x \in G_A$ なるもの全体である。

$G_A \supset G_{\mathbb{R}} \cdot \prod_{q \neq p} (GL_2(\mathcal{O}_q) \cap G_q) \cdot U_i(p)$ $(i = 0, 1, 2)$ を考え、これをやはり $U_i(p)$ であらわす。New forms は、

$$\mathfrak{M}_\nu^0 (U_0(p)) = (\mathfrak{M}_\nu(U_1(p)) + \mathfrak{M}_\nu(U_2(p)))^\perp$$
$$= \{ f \in \mathfrak{M}_\nu (U_0(p)) \ ; \ s_1' f = s_0' f = -f \}$$

で定義される。やはり local には special rep. である。

§2. level 2 の graded rings

実例を調べるのには、具体的に尖点形式を与えておくことが必要である。ところで、$Sp(2, \mathbb{Z})$ の level 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ については、その次元も保型形式のなす graded ring も、Igusa [8] により完全に具体的に知られている。ここでは、$B(2)$, $\Gamma_0(2)$ について graded rings を計算してみよう。

$m \in \mathbb{Z}^4$ に対して $m = \binom{m'}{m''}$, $m' \in \mathbb{Z}^2$, $m'' \in \mathbb{Z}^2$ とかく。

2 次 Siegel 上半空間上の正則函数 $\theta_m(\tau)$ を、

$$\theta_m(\tau) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^2} e\left[\frac{1}{2}{}^t\left(p+\frac{m'}{2}\right)\tau\left(p+\frac{m'}{2}\right) + {}^t\left(p+\frac{m'}{2}\right)\frac{m''}{2}\right]$$

で定義する。これは theta constant と呼ばれている。更に

$$X = (\theta_{0000}^4 + \theta_{0010}^4 + \theta_{0001}^4 + \theta_{0011}^4)/4$$

$$Y = (\theta_{0000}\theta_{0010}\theta_{0001}\theta_{0011})^2$$

$$Z = (\theta_{0100}^4 - \theta_{0110}^4)^2/16384$$

$$\left(= (\psi_4 + 3Y - 4X^2)/12288,\ \psi_4 \text{ は weight 4 の Eisenstein} \right)$$

$$T = (\theta_{0100}\theta_{0110})^4/256$$

$$R = (X^2 - Y - 1024Z - 64T)/64$$

$$K = (\theta_{0100}\theta_{0110}\theta_{1000}\theta_{1001}\theta_{1100}\theta_{1111})^2/4096$$

$$\theta = \prod_m \theta_m \quad (m \text{ は } 10 \text{ 个の even characteristics を渉る})$$

$$\chi_{11} = (\theta_{1000}^{12} - \theta_{1001}^{12} - \theta_{1100}^{12} + \theta_{1111}^{12})\theta$$

$$\chi_{19} = \chi_{11}\{8YZ - (X^2 - Y - 1024Z - 96T)T - 8XK\}$$

とおく。

<u>Prop.</u> $\bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k(B(2))$ は $\mathbb{C}$ 上 X, Y, Z, K, T, χ_{11} で生成され

その relation は次の2つである。

$$4K^2 + XKT = (YZ - 4TR)T$$

$$\chi_{11}^2 = 4096YKZ(X^4 - 2048X^2Z + 1048576Z^2 - 64X^2T$$
$$+65536TZ - 2X^2Y + Y^2 - 2048YZ + 12288TR + 64YT$$
$$-4096XK)$$

また、cusp forms からなる ideal は、K, YZ, TR, χ_{11} で生成される。

Prop. $\bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k(\Gamma_0(2))$ は X, Y, Z, K, χ_{19} で生成される。
このうち、X, Y, Z, K は $\mathbb{C}$ 上代数的独立である。
cusp form のなす ideal は K, YZ, χ_{19} ではられる。

§3. 実例と予想

$p=2$ で実例を与え、$p=$一般 (prime) の予想を述べる。

$p=2$ の時、weight の小さい所で次元を書くと

k	6	8	10	12
$S_k(B(2))$	1	3	6	12
$S_k(\Gamma_0(2))$	1	2	4	7
$S_k(\Gamma_0'(2))$	0	1	2	4
$S_k(K(2))$	0	1	1	2
$S_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$	0	0	1	1
new forms	0	0	1	1

ν	3	5	7	9
$\mathfrak{M}_\nu(U_0(2))$	0	1	1	2
$\mathfrak{M}_\nu(U_1(2))$	0	0	0	0
$\mathfrak{M}_\nu(U_2(2))$	0	1	0	1
newforms	0	0	1	1

さて $\mathbb{H}$ 上の real valued function $x_i = x_i(x)$ を、$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ ($i^2=j^2=-1$, $ij=-ji=k$) で定義する。更に $(x,y)\in \mathbb{H}^2$ に対して

$$f_7(x,y) = (N(y)-N(x))\,(N(y)^2-3N(x)N(y)+N(x)^2)\prod_{i=1}^{4}(\bar{y}x)_i,$$

$$f_9(x,y) = (N(y)-N(x))\,(153N(x)^4-1122N(x)^3N(y)+2618N(x)^2N(y)^2 -1122N(x)N(y)^3+153N(y)^4-1292\sum_{i=1}^{4}(\bar{y}x)_i^4)\prod_{i=1}^{4}(\bar{y}x)_i$$

とおく。但し N は reduced norm of $\mathbb{H}$.

一方.

$F_{10} = 12XTR - 2XYZ + X^2K + YK + 1024ZK + 96RK,$

$F_{12} = 36YTR + 36864ZTR + 3840TR^2 - 1920RYZ + 12X^2TR$

$\quad - 21Y^2Z - 21504YZ^2 + XYK + 1024XZK - 3840K^2$

$\quad + 13X^2YZ + 7X^3K$ とおく。この時.

<u>Theorem</u>

$S_{10}^{\circ}(B(2)) = \mathbb{C}F_{10}$, $\mathfrak{M}_7^{\circ}(U_0(2)) = \mathbb{C}f_7(x,y)$ であり.

かつ両者の Hecke polynomial の 3-factor $L_3(T, f_7)$, $L_3(T, F_{10})$ は共に

$$T^4 + 18360T^3 + 2970016470T^2 + 3^{17}\cdot 18360T + 3^{34}$$

である。また.

$S_{12}^{\circ}(B(2)) = \mathbb{C}F_{12}$, $\mathfrak{M}_9^{\circ}(U_0(2)) = \mathbb{C}f_9(x,y)$ であり.

$$L_3(T, F_{12}) = L_3(T, f_9)$$
$$= T^4 + 14760T^3 - 9330332490T^2 + 14760\cdot 3^{21}T + 3^{42}$$

である。またこれらの factor は Ramanujan 予想をみたす。

実際には.これらの計算を実行するには.old forms の固有値も皆求める必要があり,そこでもいくつか面白い現象があるが.ここでは略す。さて.これら及び.次元等から類推して.次の予想をあげたい。

[予想]　pを素数とし、$k=\nu+3$とする。この時、

$S_k^0(B(p)) \longrightarrow \mathfrak{M}_\nu^0(U_0(p))$ なる Hecke algebra modules としての同型がある。すなわち、$f \in S_k^0(B(p))$ が common eigen なら f の image もそうで、両者の L 函数は（少くとも p 以外の factor では）一致する。

なお、$K(p)$, $\Gamma_0(p)$ についても類似の予想を述べることができる。たとえば、$Sp(2,\mathbb{Z})$, $\rho Sp(2,\mathbb{Z})\rho^{-1}$ を $B(p)$-double coset の union と思って Hecke operators とみなしたものを T_1, T_2 と書くとき、

$$S_k^0(K(p)) = \{f \in S_k(K(p))\ ;\ T_1 f = T_2 f = 0\}$$

$$S_k^0(\Gamma_0(p)) = \{f \in S_k(\Gamma_0(p))\ ;\ s_0 f = s_2 f = -f\}$$

とおくのが一応自然である。これらは、大ざっぱに言って

$\mathfrak{M}_\nu^0(U_2(p)) = \{f \in \mathfrak{M}_\nu(U_2)\ ;\ s_1' f = -f\}$, $\mathfrak{M}_\nu^0(U_1(p)) = \{f \in \mathfrak{M}_\nu(U_1)\ ;\ s_0' f = -f\}$

と対応しているのではないかと思われる。実際には lift の部分で少し注意が必要だが、いずれにしても、少くとも $K(p)$ に関しては精密な予想が述べられるし、実例もあり、また、最近計算した $S_k(K(p))$ の次元公式からの support もある。また genus が一般の場合も、$B(p)$ は勿論、$K(p)$ の類似も考えて定式化を書くことは一応可能だし、次元公式の main term からの support もある。これらについて詳しいことは、今は

略す。

文献 (詳しくは、同題の英文論文を参照されたい。)

[1] M. Eichler, Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, J. reine angew. Math. 195 (1956)

[2] K. Hashimoto, On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion hermitian forms, J. Fac. Sci. Univ Tokyo Sec IA, 27 (1980)

[3] K. Hashimoto, The dimension formula of Siegel cusp forms of genus two.

[4.] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA, 27 (1980), 同題の(II)… to appear

[5] T. Ibukiyama : 名古屋大学における総合研究集会報告集

[6.] T. Ibukiyama : The graded rings of Siegel modular forms of genus two with level two (プレプリント)

[7.] T. Ibukiyama : On symplectic Euler factors of genus two (プレプリント) ½の要旨は J. Acad. の Proc. 57, Ser. A No. 5 (1981)

[8] J. Igusa : On Siegel modular forms of genus two II. Amer. J. Math. 86 (1964)

[9] Y. Ihara : On certain arithmetical Dirichlet series,

J. Math. Soc. Japan 16 (1964)

[10] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Math. 260, Springer (1972)

[11] N. Kurokawa, Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two, Invent Math. 49 (1978)

[12] R. P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms Lecture Notes in Math. 170, Springer (1970)

[13] H. Shimizu, On zeta functions of quaternion algebras, Ann. Math. 81 (1965)