

## 磁性流体における音波

京大 数理研 後藤 金英

### 1. はじめに

磁性流体は適当な分散媒に磁性体の微粒子(粒径約 $100 \text{ \AA}$ )を分散させて得られる磁性をもった流体である\*。磁化による力を感じる他は通常の一成分系のニュートン流体として振舞うことが知られている。特に、水あるいはケロシンを溶媒とする磁性流体は、電気的には非分極・不導体として取扱われている。

この報告では、一様磁場の存在する場合に静止磁性流体中を伝播する超音波の減衰(特に、その伝播方向依存性)を問題とし、一成分系ニュートン流体としての取扱いが超音波の減衰についても妥当かどうかを考える。

---

\* 磁性流体については、才12回流体力学講演会予講集<sup>1)</sup>に比較的詳しく書いたので、参照されたい。なお、解説としては文献 2, 3, 4, 5 などがある。

## 2. 基礎方程式

電氣的に非分極・不導体である場合, 磁性流体の運動を支配する基礎方程式系は次のように与えられている。<sup>6)</sup>

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad (2-1)$$

運動方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} + \operatorname{grad}(p + p^*) - M \operatorname{grad} H \\ = \eta \Delta u + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u), \end{aligned} \quad (2-2)$$

エネルギー方程式

$$\rho T \frac{d}{dt}(s + s^*) = \kappa \Delta T + \Phi, \quad (2-3)$$

熱力学的状態方程式

$$p = p(\rho, s), \quad T = T(\rho, s) \quad (2-4)$$

磁化の(状態)方程式

$$M = M(\rho, T, H), \quad (2-5)$$

Maxwell 方程式 (ガウス単位系)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} B &= 0, & \operatorname{div} E &= 0, \\ \partial B / \partial t &= -c \operatorname{rot} E, & \epsilon \partial E / \partial t &= c \operatorname{rot} H, \end{aligned} \right\} (2-6)$$

こゝに,

$$p^* = \int_0^H \left\{ M - \rho \left( \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{T, H} \right\} dH, \quad (2-7)$$

$$s^* = \frac{1}{\rho} \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH. \quad (2-8)$$

記号は流体力学における習慣に従って用いているから説明の

必要はないと思うが、 $\mu$  を透磁率として用いたので、粘性率、体積粘性率としてそれぞれ  $\eta$  と  $\zeta$  を使用した。また  $\nu$  は粘性消散関数である。通常の流体力学方程式と異なるところは、 $\alpha = 1$  に運動方程式に  $M \text{grad } H$  の項が含まれることであり、 $\alpha = 1$  には、圧力・エントロピーに磁性流体であることの効果がつけ加えられることである。この定式化では、熱力学的状態方程式と同様に、磁化の状態方程式も既知であるとする。

音波の伝播状態として静止一様状態をとり、音波の伝播方向を  $x$  軸とするデカルト座標系をとる。静止一様状態の物理量（定数、速度は 0）のそれぞれに、 $x, t$  のみに依存する微小変動  $f_n$  を加えて上の基礎方程式系に代入し、変動に関して 2 次の量を無視すると、変動に関する次の一次同次式が得られる。

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^7 (a_{nk} \frac{\partial f_k}{\partial x} - d_{nk} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}) = 0. \quad (2-9)$$

$$n = 1, 2, \dots, 7.$$

こゝに、

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \rho', & f_2 &= s', & f_3 &= u', & f_4 &= B_y', \\ f_5 &= B_z', & f_6 &= E_y', & f_7 &= E_z' \end{aligned} \right\} (2-10)$$

で、ガウシユは変動量であることを表す。(2-9) に含まれない  $B_x'$  と  $E_x'$  が定数であることを同時に得られる。係数

$a_{nk}$  と  $d_{nk}$  は静止一様状態で決まる定数であり、付録にまとめて与えてある。

線型波動であるから平面波を考えれば十分であり、

$$f_n(x, t) = F_n \exp(ikx - i\omega t) \quad (2-11)$$

とおいて (2-9) に代入すると、

$$\sum_{n=1}^7 (\lambda \delta_{jn} - a_{jn} - ik d_{jn}) F_n = 0, \quad (2-12)$$

$$\lambda = \omega/k \quad (2-13)$$

とわかるから、 $\lambda$  の固有値方程式が

$$\mathcal{Q} \equiv \det(\lambda \delta_{jn} - a_{jn} - ik d_{jn}) = 0, \quad (2-14)$$

とわかる。ここに、 $\omega$  は実数で角振動数、 $k$  は複素数で、その複素固有値が (2-14) から定ると、 $k (\equiv \beta + i\alpha) = \omega/c$  を解いて  $\alpha$  と  $\beta$  が求められるが、この  $\alpha$  が減衰係数、 $\omega/\beta (\equiv v)$  が位相速度である。

### 3. 減衰係数

平面波 (2-11) は音波に限らず、可能な縦波のすべてのモードを含む。その結果、固有値方程式 (2-14) もその解として音波以外のモードも含むが、 $\lambda/c$  をパラメータとして整理すると、音波を都合よくとり出せる。整理の結果 (2-14) は

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \frac{\epsilon \lambda^2}{c^2} \mathcal{Q}_1 + \left(\frac{\epsilon \lambda^2}{c^2}\right)^2 \mathcal{Q}_2, \quad (3-1)$$

となる。  $Q_0, Q_1, Q_2$  は光速度  $c$  および誘電率  $\epsilon$  に独立な行列式である。音波の場合は、  $\lambda^2/c^2$  を 1 に比べて無視することから (2-14) は

$$Q_0 = 0 \quad (3-2)$$

に帰着される\*。こゝに、

$$Q_0 \equiv \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} & 0 & 0 \\ ikd_{21} & \lambda + ikd_{22} & -a_{23} & \lambda A_{26} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda + ikd_{33} & A_{34} & 0 \\ A_{61} & A_{62} & 0 & A_{64} & -1/\mu \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu & -B_{\perp}^2/\mu \end{vmatrix} \quad (3-3)$$

である。  $A_{26}, A_{34}, A_{61}, A_{62}, A_{64}$  は同じ添字をもつ  $a_{jn}$  に対応する定数で付録 2 に与えてある。こゝで次のことが注目される。一様磁場の大きき  $B (=|B|)$  は、  $Q_0$  の各要素に含まれるが、一様磁場の偏りは含まれないで、  $Q_0$  の才 5 行才 5 列に  $B_{\perp}^2 (\equiv B_y^2 + B_z^2)$  の形で含まれるだけである。音波の伝播方向 ( $x$  軸) と  $B$  のなす角を  $\theta$  とすると  $B_{\perp} = B \sin \theta$  である。

\*  $\lambda = O(c)$  として、1 に比べて  $O(1/c)$  を無視する近似で (2-14) を解くと、  $\lambda = \pm c/\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $\pm c/\sqrt{\epsilon\mu} \{1 - \mu B_{\perp}^2 (A_{64} - A_{26} A_{62})\}^{1/2}$  が得られる<sup>7)</sup>。

(3-2) は  $d_{jn}$  を含む消散項を擾動として取扱うと比較的容易に解ける。  $d_{jn}$  を無視した場合の解を  $\lambda = \lambda^{(0)}$ , 擾動解を  $\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}$  とおくと

$$\lambda^{(1)}/\lambda^{(0)} \approx \alpha v/\omega \quad (3-4)$$

であり,  $\alpha v/\omega$  は音波の減衰の実験から  $10^{-2}$  程度であることがわかっているから,  $d_{jn}$  を含む項を擾動として解くことは, 理論と実験に矛盾のない限り, 妥当である。

$d_{jn}$  を含む項をすべて無視すると (3-2) の解は

$$\lambda = \pm \sqrt{N_0/D_0} \quad (3-5)$$

と, 意味のない解  $\lambda = 0$  とある<sup>?)</sup>。こゝに

$$N_0 = a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32}$$

$$- \{ (a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32})(A_{64} - A_{26}A_{62}) + (a_{23}A_{62} + a_{13}A_{61})(A_{34} + a_{32}A_{26}) \} \mu B_1^2, \quad (3-6)$$

$$D_0 = 1 - (A_{64} - A_{26}A_{62})\mu B_1^2, \quad (3-7)$$

である。解 (3-5) の複号は, 前進波と後退波を表している。後退波の場合も扱いは同様であるから, 以下は前進波に限ることとする。

$d_{jn}$  の一次の項まで考慮した (3-2) の解は, 前進波に対して次のように求まる。

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1, \quad (3-8)$$

こゝに,  $\lambda_0 = \sqrt{N_0/D_0}$ 。  $\lambda_1$  は純虚数であること

かわかり,  $\lambda_1 = i\lambda_{1i}$  とおくと

$$\lambda_{1i} = -\frac{k}{2} \left( \frac{N_1}{N_0} a_{13} d_{21} + \frac{N_1 N_2}{D_0 N_0} d_{22} + d_{33} \right), \quad (3-9)$$

こゝに,

$$N_1 = a_{32} - (a_{32} A_{64} + A_{34} A_{62}) \mu B_1^2, \quad (3-10)$$

$$N_2 = a_{23} - (a_{23} A_{64} + a_{13} A_{26} A_{61}) \mu B_1^2$$

である。(3-9) から減衰係数を求めると

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2} \sqrt{\frac{D_0}{N_0}} \frac{1}{N_0^2} (d_{21} a_{13} D_0 N_1 + d_{22} N_1 N_2 + d_{33} D_0 N_0) \quad (3-11)$$

位相速度は (3-5) から

$$v = \sqrt{\frac{N_0}{D_0}} \quad (3-12)$$

とわかる。 $D_0, N_k (k=0, 1, 2)$  はどれも  $\sin^2 \theta$  の一次関数であることを注意しておく。

#### 4. 結果と議論

前節に得られた減衰係数  $\alpha$  (3-11) と位相速度  $v$  (3-12) は次の特徴をもつ。

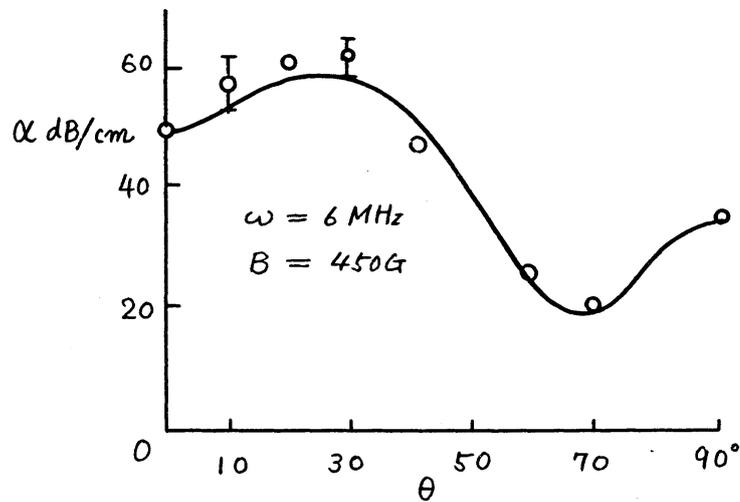
(1) 係数  $a_{jn}, A_{jn}$  が  $\omega$  に独立である限り,  $v$  は  $\omega$  に独立,  $\alpha$  は  $\omega^2$  に比例する。

(2) 音波の伝播方向と磁場のなす角  $\theta$  を 0 から  $\frac{\pi}{2}$  まで変化させると, 減衰係数  $\alpha$  は必ず  $\theta = 0$  と  $\frac{\pi}{2}$  で極値をとるが, 更に一般にこの間の適当な 2 角度で極値をとる。

(3)  $d_{21} = d_{22} = 0$  とおくと,  $\alpha$  の  $\theta$  による変化は単調となる。

(4) 位相速度  $v$  は,  $\theta = 0$  と  $\frac{\pi}{2}$  で極値をとり, この間で単調に変化する。

減衰係数および位相速度について定量的な議論をするには, 熱力学的状態方程式, 磁気的狀態方程式の関数形が具体的に与えられることが先決問題である\*。そこで, こゝでは (3-11) の係数の数値を適当に選んで, 実験から求められた減衰係数の  $\theta$  依存性を説明し得るか否かを問題にする。幾つかの測定例についてそれぞれの解析式が導かれたが, こゝにはその 1 例を下图に示す。图中的丸印は測定値<sup>8)</sup>であり,



曲線は次のように係数を選んだ場合の (3-11) 式である:

$$\alpha = 51 \left( \frac{1+5x}{1-0.5x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1-2.14x+1.19x^2}{(1-0.5x)^2}, \quad x = \sin^2 \theta.$$

\* この関係のデータは非常に乏しい。

係数の選定には更に改良の余地があるから、測定値と理論曲線の一致はほぼ完全である。残る問題は、いろいろな場合の測定値を説明する理論式の係数が、状態方程式を通して相互に矛盾なく決まるかどうかであるが、前述のようにこの問題の解決はデータ待ちの状態にある。いくつかの理論曲線から逆に状態方程式のあり得べき情報を推論できないか試みたが、係数が多過ぎて実りある結果には到達しなかった。

理論結果の特徴(3)に述べたように  $d_{21} = d_{22} = 0$  とすると  $\alpha$  は  $\theta$  の変化に対し  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  で単調に変化するから、明らかに実験結果と矛盾する。このことは、磁性流体の音波の減衰では、熱拡散率に重要なことの意味している。

最後に、水中の音波の減衰は体積粘性で説明される。通常の水の体積粘性率は  $10^\circ\text{C}$  で  $0.06$  poise である。今回比較に用いた測定値の実験は水ベースの磁性流体について行ったものであるが、減衰係数は純水に比べて約3桁も大きい。減衰係数の値そのものはいずれの場合も小さいが、この差が(3-11)の  $d_{33}$  の項(体積粘性率の項)によるものか、 $d_{21}$  或は  $d_{22}$  の項(熱拡散率の項)によるものかは、非常に興味ある問題であり、問題の進展の仕方によっては、最初に述べたように一成分系ニュートン流体の仮定にま

で抵触する危険性もないわけではないが、現在のところ解答はない。

この報告は、この春開かれた $T=0$ 回磁性流体国際会議(米国, Florida, Orlando)で発表した論文(D. Y. Chung, W. E. Isler と共著)の一部である。<sup>9)</sup> 今回の研究会では、磁性流体の力学の紹介も兼ねて報告したが、講究録には長文になるのでその部分を割愛した。興味をお持ちの方は文献1を参照して頂ければ幸いである。

#### 付録 1.

(2-9)の係数 $a_{nk}$ ,  $a_{nk}$ は次のようである。添字 $\rho$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $H$ はそれぞれによる偏微分を表す。

$$a_{13} = \rho,$$

$$a_{23} = \rho N \{ m \mu_T (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) B^2 - S_\rho^* - S_T^* T_\rho \},$$

$$a_{26} = -c m \mu \mu_T N B_z,$$

$$a_{27} = c m \mu \mu_T N B_y,$$

$$a_{31} = \frac{1}{\rho} (\rho_\rho + \rho_\rho^* + \rho_T^* T_\rho) + m \rho \mu_\rho (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) B^2,$$

$$a_{32} = \frac{1}{\rho} (\rho_S + \rho_T^* T_S) + m \rho \mu_T \mu_\rho T_S B^2,$$

$$a_{34} = -m \mu \mu_\rho \rho B_y,$$

$$a_{35} = -m \mu \mu_\rho \rho B_z,$$

$$a_{47} = -c, \quad a_{56} = c,$$

$$a_{61} = -4\pi\rho\mu\tau c \epsilon^{-1} (\mu\rho + \mu_T T\rho) B_z,$$

$$a_{62} = -4\pi\rho\mu\tau c \epsilon^{-1} \mu_T T_s B_z,$$

$$a_{64} = -4\pi\rho\tau c \epsilon^{-1} \mu_H B_y B_z / B,$$

$$a_{65} = 4\pi\rho\tau c \epsilon^{-1} \{ \mu^2 + \mu_H (B_x^2 + B_y^2) / B \},$$

$$a_{71} = 4\pi\rho\mu\tau c \epsilon^{-1} (\mu\rho + \mu_T T\rho) B_y,$$

$$a_{72} = 4\pi\rho\mu\tau c \epsilon^{-1} \mu_T T_s B_y,$$

$$a_{74} = -4\pi\rho\tau c \epsilon^{-1} \{ \mu^2 + \mu_H (B_x^2 + B_z^2) / B \},$$

$$a_{75} = 4\pi\rho\tau c \epsilon^{-1} \mu_H B_y B_z / B,$$

$$d_{21} = \kappa N T\rho / (\rho T),$$

$$d_{22} = \kappa N T_s / (\rho T),$$

$$d_{33} = (s + \frac{4}{3}\zeta) / \rho,$$

$$m = \{ 4\pi\rho\mu (\mu^2 + \mu_H B) \}^{-1},$$

$$N = \{ 1 + T_s (S_T^* - m\mu_T^2 B^2) \}^{-1}.$$

付録 2.

$$A_{26} = m\mu\mu_T N, \quad A_{34} = m\mu\mu\rho\rho,$$

$$A_{61} = 4\pi\rho\mu\tau (\mu\rho + \mu_T T\rho),$$

$$A_{62} = 4\pi\rho\mu\tau\mu_T T_s, \quad A_{64} = 4\pi\rho\tau\mu_H / B.$$

## 文献

- 1) 後藤金英：才12回流体力学講演会講演集
- 2) S.E. Khalafalla : Chem. Tech. (1975) 540.
- 3) M.I. Shliomis : Sov. Phys. Usp. 17 (1974) 153.
- 4) 下飯坂潤三, 中塚勝人：表面 13 (1975) 103.
- 5) R.E. Rosensweig : Adv. Electronics and Electron Phys.  
48 (1979) 103.
- 6) I.E. Tarapov : Magn. Hidro. 1 (1972) 3, translated in  
Magnetohydrodynamics (1972) 1.
- 7) I.E. Tarapov : Appl. Math. Mech. 37(1973) 770.
- 8) D.Y. Chung and W.E. Isler : J. Appl. Phys 49 (1978) 1812.
- 9) K. Gotoh, W.E. Isler and D.Y. Chung : IEEE Trans. Magn.  
Magn.-16 (1980) 211.