

Title	二次元圧縮流のImaiの方程式 (流体力学における非定常問題)
Author(s)	桜井, 明; 新井, 勉
Citation	数理解析研究所講究録 (1982), 449: 196-208
Issue Date	1982-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/102932
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

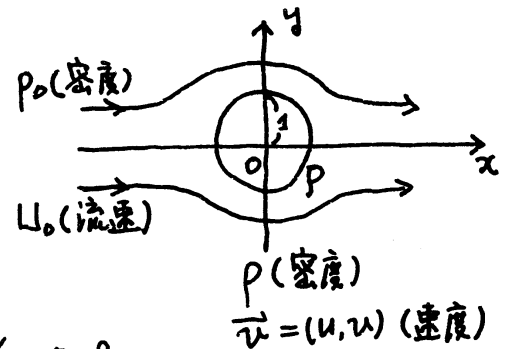
二次元圧縮流の Imai の方程式

東京電機大 理工 桜井 明
新井 勉

第 1. 序

二次元 xy -平面におかれた物体 P の外部を流れる圧縮定常流が満足する方程式 (Imai の方程式) を考える。

まず, 簡単のために, P は原点を中心とする半径 1 の円とする (そうでない場合については後で述べる)。数学的には, 無限遠での流速 U_0 , 密度 ρ_0 を与えられた時, P 上で指定された境界条件を満すような速度 $\vec{v} = (u, v)$, 及び密度 ρ を求めよ,



という問題である。正規化して $\rho/\rho_0 \in \rho$, $U_0 \in \vec{v}$ と書く。さらに, 複素変数 $z = x + iy = r e^{i\theta}$ と, 微分作用素 $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ を導入する。連続の式から流函数 ψ , 渦無し条件からポテンシアル ϕ をつくり, $F = \phi + i\psi$ (複素速度ポテンシアル) とおけば,

基礎方程式は

$$\partial_{\bar{z}} F = \frac{1}{2}(1-\rho)\partial_{\bar{z}}(F+\bar{F}) \quad (1.1)$$

$$q \equiv \partial_{\bar{z}}(F+\bar{F}) = u+iv \text{ (複素速度)} \quad (1.2)$$

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 (|q|^2 - 1)\right]^{1/\gamma-1} \quad (1.3)$$

となる。ここで、 $M = U/c_0$ (Mach数, c_0 : 音速), $\gamma > 1$ (定数) である。更に、速度 q に対し、 D 上での境界条件及び無限遠での条件を次のように課す:

$$\operatorname{Re}(q e^{-i\theta})_{z=e^{i\theta}} = 0, \quad (1.4)$$

$$q \rightarrow 1 \quad \text{as } z \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

本講は、(1.1)~(1.5)を満すような速度 q の存在を証明する事、を目的とする。二次元圧縮定常流に対する数学的研究としては、方程式を、ポテンシアル中に関する二階の偏微分方程式に書きなおした場合に、準線型楕円型方程式論、擬解析関数論などを用いた Bers [1], [2], Schiffman [4] 等の結果があるが、ここでは、より簡単な方法で (1.1)~(1.5) を取扱かう。すなわち、方程式 (1.1)~(1.5) を、適当な Banach 空間の (q に関する単独の) 作用素方程式に書きなおし、「縮小写像の原理」を用いて、解 q の存在を示す事にする。尚、本講は、Sakurai [3]、の議論の発展であり、そこで得られている結果を流用する。定理や命題の証明は、概略だけを述べる。

§2. 空間の定義.

完全流体に対応する複素速度を $q_0 = 1 - \frac{1}{z^2}$ とおき, Q と $q = q_0 + Q$ が (1.1) ~ (1.5) を満足するように求めよう.

q_0 は条件 (1.4), (1.5) を満たしているから, Q は (1.4) 及び $Q \rightarrow 0$ as $z \rightarrow \infty$ を満足せねばならない. そこで, 極座標 $r \geq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対し, 次のような連続関数の空間 X , D を定義する. $0 < \alpha < 1$ なる α を勝手に固定し,

$$\text{定義 } X = \left\{ f \mid f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im\theta}, \right.$$

$f_m(r)$ は複素数値連続関数,

$$\|f\|_X = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sup_{r \geq 1} |f_m(r)| < \infty \left\{ \right.$$

$$D = \left\{ f \in X \mid r^{\alpha} f \in X, \operatorname{Re}(f(1, \theta) e^{-i\theta}) = 0, \right.$$

$$\|f\|_D = \|r^{\alpha} f\|_X \left. \right\}.$$

この時, X は Banach 代数に (i.e. $\|\cdot\|_X$ につき完備なノルム空間で, $\|f \cdot g\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_X$ が成立.), D は実 Banach 空間になることが容易に示される. $f \in D$ ならば $f = O\left(\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right)$ as $r \rightarrow \infty$ である事に注意したい. 空間 D が, これから解 Q をさがすところの空間である.

§3. 空間 D における問題の定式化と存在定理

以下, 定数 γ は固定し, M をパラメータとする. ただし, M, γ は, 関係: $M^2(\gamma-1) < \frac{2}{3}$ を満たすものとする.

方程式 (1.1)~(1.4) E, D 内での Q に関する単独方程式に書きあらわすために, 以下の記号を用いよう.

$$\textcircled{1} \quad g(Q) = g_0 + Q,$$

$$\textcircled{2} \quad p(Q) = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 (|g(Q)|^2 - 1) \right]^{1/\gamma-1},$$

$$\textcircled{3} \quad [(1-p)g](Q) = (1-p(Q))g(Q),$$

$$\textcircled{4} \quad (1-x)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \quad (-1 < x < 1) \text{ と中級数展開し, この係数を用いて } k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| x^n \quad (0 \leq x < 1) \text{ とおく.}$$

$$\textcircled{5} \quad \delta > 0 \text{ と } M^2(\gamma-1) < 2(1-\delta)/3 \text{ なるものとして固定し, } R_M = \sqrt{2(1-\delta)/M^2(\gamma-1) + 1} - 2 (> 0) \text{ とおく.}$$

$$\textcircled{6} \quad \alpha(\|Q\|_D) = (\gamma-1)M^2(\|Q\|_D + 2)^2 - 1 / 2 \text{ とおく.}$$

この時, 次の命題が成立する.

命題 3.1. $Q \in D, \quad \|Q\|_D \leq R_M$

$$\iff [(1-p)g](Q) \in D \text{ であり, かつ}$$

$$\|[(1-p)g](Q)\|_D \leq (\|Q\|_D + 2) k(\alpha(\|Q\|_D))$$

が成立する.

証明は, Sakurai [3] を少し修正すればよい.

次に, $h \in D$ が与えられた時,

$$\alpha \bar{z} F = h \quad (\gamma \geq 1), \quad \alpha \bar{z} (F + \bar{F}) - g_0 \in D, \quad (3.1)$$

を満す F を求める問題を考えよう. このような F が, たと

$$\text{し, } Q = \alpha \bar{z} (F + \bar{F}) - g_0 \quad (3.2)$$

4.

とす。問題 (3.1), (3.2) について, 次の命題が成立する。

命題 3.2. $h \in D$ に対し, (3.2) なる Q が一意的に存在する。
この対応を, $N: D \ni h \mapsto Q \in D$ とかくと, $\|Nh\|_D \leq 2(1 + \frac{2}{1-\alpha}) \|h\|_D$ が成立する。

証明 $h \in D$ に対応する, F 及び Q の表示は, Sakurai [3] によれば,

$$\begin{aligned} F &= z + \frac{1}{z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{m-1} \int_{k_m}^{\bar{z}\bar{z}} h_m(\sqrt{\eta}) \sqrt{\eta}^{-m} d\eta \\ &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} z^{-(m-1)} \int_{\infty}^1 \bar{h}_m(\sqrt{\eta}) \sqrt{\eta}^{-m} d\eta + C \quad (C: \text{実定数}) \\ Q &= h + \frac{z}{\bar{z}} \bar{h} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m-1) \bar{z}^{m-2} \int_{k_m}^{\bar{z}\bar{z}} h_m(\sqrt{\eta}) \sqrt{\eta}^{-m} d\eta \\ &\quad - \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) \bar{z}^{-m} \int_{\infty}^1 h_m(\sqrt{\eta}) \sqrt{\eta}^{-m} d\eta \end{aligned} \quad (3.3)$$

より示される。ここで $k_m = \begin{cases} \infty & m > 1 \\ 1 & m \leq 1 \end{cases}$ である。 Q の一意性は次のように示される。 $h \in D$ に対し, (3.1), (3.2) が $F_i, Q_i (i=1,2)$ について成立するとする。 $F = F_1 - F_2$ とすると, $Q_1 - Q_2 = \overline{\partial_z(F)}$, $\partial_{\bar{z}} F = 0$ である。よって F は analytic であり, $f = \partial_{\bar{z}} F$ とおけば f も analytic, かつ $\bar{f} \in D$ であるから $|zf| \leq \|r f\|_X < \infty$, $\operatorname{Re}(fz)_{z=e^{i\theta}} = 0$ となる。調和関数に対する外部 Dirichlet 問題の解の一意性から, $\operatorname{Re}(fz) = 0 (r \geq 1)$ である。よってより $\operatorname{Im} f \cdot z = \operatorname{const}$ となり $f(z) = \frac{iC}{z}$ (C は実定数) とかけるが, $f = O(\frac{1}{r^{1+\alpha}}) (r \rightarrow \infty)$ となり z はなり

ないから $f \equiv 0$. 従って $Q_1 = Q_2$ である。■

命題 3.2 より, 問題 (1.1)~(1.5) は, 空間 D に於て, 作用素

$$\text{方程式: } Q = N\left(\frac{1}{2}[(1-p)q](Q)\right) \quad (3.4)$$

と定式化される。(すなわち, (3.4) の解 Q に対し, $q = q_0 + Q$ は (1.1)~(1.5) の解となる)。よって, 問題は, D において, 作用素 $N\left(\frac{1}{2}[(1-p)q]\right)$ の不動点 Q を求める事に帰着される。これについて:

定理 ある $M_0 \in]0, 1[$ が存在し, $0 \leq M \leq M_0$ なる M に対し, 方程式 (3.4) は, 空間 D 内に解 Q をもつ。

定理の証明は, 以下の命題 3.3, 3.4 を示す事によつて為される。

命題 3.3. 次のような $l_0 \in]0, 1[$ が存在する。

$l \in]0, l_0[\implies$ ある $M_0(l) \in]0, 1[$ があつて, $M \in [0, M_0(l)[$ ならば, 作用素 $N\left(\frac{1}{2}(1-p)q\right)$ は, D 内の半径 lR_M の閉球 $B_{lR_M} = \{f \in D \mid \|f\|_D \leq lR_M\}$ 上に, その自身の中へうつす。

証明 $Q \in D$ と, $\|Q\|_D \leq lR_M (< R_M)$ なるものとするならば, 命題 3.1, 3.2 より, $\|N\left(\frac{1}{2}[(1-p)q](Q)\right)\|_D \leq \left(1 + \frac{2}{1-\delta}\right)k(\alpha(\|Q\|_D)) \times (\|Q\|_D + 2)$ が成立する。 $\alpha \leq 1-\delta$ であること, 及び $0 \leq \alpha \leq 1-\delta$ に対し $k(\alpha) \leq C_1 \alpha$ (C_1 は定数) とできる事, に注

意すれば, (以下 C_i ($i=1,2,\dots$) は, l, M によらぬ定数),

$$\begin{aligned} & \|N(\frac{1}{2}(1-p)q(Q))\|_D \\ & \leq C_2 M^2 ((\|Q\|_D + 2)^2 - 1) (\|Q\|_D + 2) \\ & \leq C_2 M^2 (l^3 R_M^3 + 6l^2 R_M^2 + 11l R_M + 6) \\ & \leq C_3 \frac{l^3}{M} + C_4 l^2 + C_5 l M + C_6 M^2 \quad (*) \end{aligned}$$

とできる。ただし, $(k_1/M) - k_2 \leq R_M \leq k_1/M$ なる定数 k_1, k_2 が存在する事を使つた。今 $C_7 > 0$ を一固定し, $l_0 \in]0, 1[$ と, $(C_3 + C_7)l^3 \leq k_1$ が任意の $l \in]0, l_0[$ に対して成立するようにえらぶ。すると, $l \in]0, l_0[$ に対し,

$$\begin{aligned} & l(k_1/M - k_2) - (*) \\ & \geq \frac{C_7}{M} l^3 - C_4 l^2 - (C_5 M + k_2)l - C_6 M^2 \end{aligned}$$

となる。こゝで $l \in]0, l_0[$ を固定し, M を小さくせば, 右辺 ≥ 0 とできる。 $l(k_1/M - k_2) \leq l R_M$ であるから, $\|N(\frac{1}{2}(1-p)q(Q))\|_D \leq l R_M$ となる。 ■

命題 3.4. ある $l \in]0, 1[$ と, $M_1(l) \in]0, 1[$ が存在し, $M \in]0, M_1(l)[$ に対し, 作用素 $N(\frac{1}{2}(1-p)q)$ は, B_{lR_M} から, その自身の中への縮小写像となる。すなわち, 定数 $L \in]0, 1[$ が存在し, 不等式: $\|N(\frac{1}{2}(1-p)q)(Q_1) - N(\frac{1}{2}(1-p)q)(Q_2)\|_D \leq L \|Q_1 - Q_2\|_D$ が, 任意の $Q_1, Q_2 \in B_{lR_M}$ に対して成立する。

証明 ℓ, M は命題 3.3 で述べたものとする。また、命題 3.2 で定義した作用素 N は、(3.3) から分るように、係数体を實に限れば、線型作用素となつてゐる事に注意する。 $Q_1, Q_2 \in D, \|Q_i\|_D \leq \ell R_M, \varepsilon <$

$$\Delta = (1 - \rho(Q_1))q(Q_1) - (1 - \rho(Q_2))q(Q_2)$$

とする。 $A_{\ell, M} = \ell R_M + 2, \beta_{\ell, M} = \frac{\delta - 1}{2} M^2 (A_{\ell, M}^2 - 1) < 1 - \delta$ とおく。簡単な計算で、 $\| |q(Q_i)|^2 - 1 \|_X \leq A_{\ell, M}^2 - 1, \|q(Q_i)\|_X \leq A_{\ell, M}$ が示せる。この時 $|\frac{\delta - 1}{2} M^2 (|q(Q_i)|^2 - 1)| \leq \beta_{\ell, M} < 1 - \delta$ であるから

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\delta - 1}{2} M^2 \right)^n \Delta(n)$$

と展開できる。ここで

$$\Delta(n) = (|q_1|^2 - 1)^n q_1 - (|q_2|^2 - 1)^n q_2$$

$$q_i = q(Q_i)$$

である。 $\Delta(n)$ を計算すると、

$$\Delta(n) = (|q_1|^2 - 1)^n (Q_1 - Q_2) + [(Q_1 - Q_2) \bar{q}_1 + (\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2) q_2]$$

$$\times \left[\sum_{j=0}^{n-1} (|q_1|^2 - 1)^{n-1-j} (|q_2|^2 - 1)^j \right] q_2$$

となる。このより、(X が Banach algebra である事を用い、)

$$\| \gamma^{1+d} \Delta(n) \|_X \leq \| |q_1|^2 - 1 \|_X^n \| Q_1 - Q_2 \|_D$$

$$+ 2 \| Q_1 - Q_2 \|_D (\|q_1\|_X + \|q_2\|_X) \|q_2\|_X$$

$$\times \sum_{j=0}^{n-1} \| |q_1|^2 - 1 \|_X^{n-1-j} \| |q_2|^2 - 1 \|_X^j$$

$$\begin{aligned} &\leq \|Q_1 - Q_2\|_D \left\{ (A_{e,M}^2 - 1)^n + 2A_{e,M}^2 \sum_{j=0}^{n-1} (A_{e,M}^2 - 1)^{n-1-j} (A_{e,M}^2 - 1)^j \right\} \\ &= \|Q_1 - Q_2\|_D \left\{ (A_{e,M}^2 - 1)^n + 2n A_{e,M}^2 (A_{e,M}^2 - 1)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

となる。故に

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_D &\leq \|Q_1 - Q_2\|_D \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \left(\frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^n (A_{e,M}^2 - 1)^n \right. \\ &\quad \left. + A_{e,M}^2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \left(\frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^n 2n (A_{e,M}^2 - 1)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

$$= \|Q_1 - Q_2\|_D \left\{ K(\beta_{e,M}) + A_{e,M}^2 K'(\beta_{e,M}) \left(\frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right\} \quad (3.5)$$

なる評価をうる。

ここで、正定数 C_1, C_2 が存在して、 $K(\beta_{e,M}) \leq C_1 \beta_{e,M}$,
 $K'(\beta_{e,M}) \leq C_2$ とできる事に注意すれば、命題 3.3 の議論
と同様にして、 ℓ を小さくとり、それに依りて M を小さくす
ることにより、上式の $\{ \}$ は、いくらでも小さくできる。
 N は、有界線型作用素であつたから、 M を十分小さくとるこ
とにより、 $N(\frac{1}{2}(1-\rho)q)$ が B_{eR_H} からそれ自身への縮小
写像である事が示された。 ■

この命題 3.4 によつて、方程式 (3.4) は、閉球 B_{eR_H} 内
に唯一の解をもつ事になり、定理の結論が得られた。ところで
上で構成した、(1.1)~(1.5) の解は $0 < d < 1$ に対し $q-1 = O(\frac{1}{\gamma+d})$
であるが、証明から分るやうに、 d を 1 に近づけるに依りて、
 M を小さくとらねばならぬ事に注意されたい。

§4. 解の微分可能性

§3 の定理は, 解の微分可能性については, 何も保証していない。ここでは, 次の定理を示そう。

定理 M が小さい時, (1.1)~(1.5) の微分可能な解が存在する。

§3 の X, D の代りに, 次のような関数空間 X', D' を考える。

$$X' = \left\{ f \in X \mid \|f\|_{X'} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+|m|) \sup_{r \geq 1} |f_m(r)| \right\}$$

$$D' = \left\{ f \in X' \mid f \in D, r^{1+\alpha} f \in X' \right\}.$$

この空間内で, §3 と同じ議論をするのである。まず, $\delta > 0$ が存在して, $M^2(r-1) < 2(1-\delta)/\eta$ が成立しているとしよ

う。 $R_M' = \sqrt{2(1-\delta)/(r-1)M^2 + 9} - 4 (> 0),$

$$\alpha'(\|Q\|_{D'}) = \frac{1}{2}(r-1)M^2((\|Q\|_{D'} + 4)^2 - 9)$$

とおく。 $\|Q\|_{D'} \leq R_M'$ ならば $\alpha'(\|Q\|_{D'}) < 1-\delta$ である。

X' が, やはり Banach algebra になる事に注意すれば, 次の命題が得られる。(D' も実 Banach 空間である)。

命題 4.1. $\|Q\|_{D'} \leq R_M'$

$$\Rightarrow \|(1-p)q(Q)\|_{D'} \leq K(\alpha'(\|Q\|_{D'}))(\|Q\|_{D'} + 4)$$

次に, $h \in D'$ に対し, 問題 (3.1), (3.2) を考えると, (3.1) の D を D' に変えた時, 下の命題を証明できる。

命題 4.2. $h \in D'$ に対し, (3.1)なる $Q \in D'$ が一意的に対応し, Q は公式 (3.3) で与えられる. この対応を N とかくと, $\|N h\|_{D'} \leq 2(2 + \frac{2}{1-\alpha}) \|h\|_{D'}$ が成立する.

これから, 問題は, やはり, D' 内において, 方程式 (3.4) を解く事に帰着されるが, この時, M が小さければ, $N(\frac{1}{2}(1-p)q)$ が, D' 内の閉球 B_{2R_M} を, その自身の中につつま縮小写像である事を示しうる. 従って, 方程式 (3.4) は, D' 内に解をもつ事になる. この解の可微分性を調べよう. 解 Q は, 公式 (3.3) で $h = (1-p)q(Q)$ とおいた表示をもつ. とこで, $h \in D'$ である事から, 公式 (3.3) の右辺の後半の二項は, 変数 r, θ につき連続的微分可能である事が示される. これら二項を合せて $g(r, \theta)$ とかこう. すると, 解 q は, (3.3) より,

$$Q - \frac{1}{2}(1-p)q(Q) - \frac{1}{2} \frac{r}{\epsilon} (1-p) \overline{q(Q)} = g(r, \theta) \quad (4.1)$$

を満す. (4.1) の左辺を $T(Q)$ とかけば, T は, D' の球 $\|Q\|_{D'} \leq 2R_M$ で定義された作用素となる.

命題 4.3. M が小さければ, T は, 1対1の作用素であり, ある定数 $L > 0$ が存在して, $|T^{-1}g_1(r, \theta) - T^{-1}g_2(r, \theta)| \leq L \times |g_1(r, \theta) - g_2(r, \theta)|$ が成立する.

$T(Q_1) = T(Q_2)$ とすると, ($\|Q\|_{D'} \leq 2R_M'$ に対し),

$$|Q_1 - Q_2| \leq |(1-p)g(Q_1) - (1-p)g(Q_2)|$$

となるが, 命題 3.4. の証明の方法を用いれば, (または平均値の定理を用いて),

$$\leq C(l, M) |Q_1 - Q_2|$$

とできる。ここで $C(l, M)$ は, l と M を小さくとればいくらでも小さくできる量である。 $C(l, M) < 1$ とすれば, 上式から $Q_1 = Q_2$ が従う。また

$$\begin{aligned} |TQ_1 - TQ_2| &\geq |Q_1 - Q_2| - |(1-p)g(Q_1) - (1-p)g(Q_2)| \\ &\geq (1 - C(l, M)) |Q_1 - Q_2| \end{aligned}$$

となるから, $C(l, M) < 1$ とするならば,

$$|T^{-1}q_1 - T^{-1}q_2| \leq L |q_1 - q_2| \quad (L = \frac{1}{1 - C(l, M)})$$

という。 ■

さて, (4.1) の両辺に T を施せば $Q(r, \theta) = T^{-1}g(r, \theta)$ となる。 g は C^1 級だから絶対連続であり, 命題 4.3 により Q も絶対連続となる。よって Q は, 殆んど至る所で可微分である。

5. D の形がより一般の場合.

$z = x + iy$ 平面におかれた物体 D は, その外部が (周もこめず), 等角写像;

$$f(z) = \gamma(z) = \bar{z} + i\eta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = b_{-1}\zeta + b_0 + b_1\zeta^{-1} + \dots \quad (b_1 = a e^{i\beta}) \\ dz/d\zeta \neq 0, \quad dz/d\zeta \in X(\zeta\text{-平面での}). \end{array} \right.$$

よって, $\zeta = \xi + i\eta$ 平面の単位円の外部 $|\zeta| \geq 1$ について
 さしやるものとする (従って ζ は, かなり滑らかなものでなく
 ても構わない)。この写像によつて, z -平面での Imai の方
 程式は, ζ -平面においては,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\bar{\zeta}} F = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^2 \left(|\partial_{\bar{\zeta}}(F+\bar{F})|^2 - \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \right) \right]^{\frac{\gamma-1}{2}} \right\} \\ \quad \times \partial_{\bar{\zeta}}(F+\bar{F}), \\ q \equiv \partial_{\bar{\zeta}}(F+\bar{F}) \longrightarrow b_{-1} \quad \text{as } \zeta \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re}(q e^{-i\theta})_{\zeta=e^{i\theta}} = 0 \end{array} \right.$$

となる。仮定から $dz/d\zeta$, $d\zeta/dz$ とともに有界である。この方
 程式に対しても, $q_0 = a(e^{i\beta} - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta^2})$, $q = q_0 + Q$ とお
 き, 前と同じ議論をする事ができる。勿論, 評価や計算は,
 複雑になるが, M を更に小さくする事によつて, §3, §4 と
 同様の結果が得られる。

文献 [1], L. Bers: *Mathematical Aspects of Subsonic
 and Transonic Gas Dynamics*, Wiley (1958)

[2] L. Bers: *Comm. Pure Appl. Math.* vol.7 (1954)

[3] A. Sakurai: *Jor. Phy. Soc. Japan.* vol.38 (1975)

[4] M. Schiffman: *Jor. Rat. Mech. Anal.* vol.1 (1952)