数理解析研究所講究録
449巻 1982年 196-208

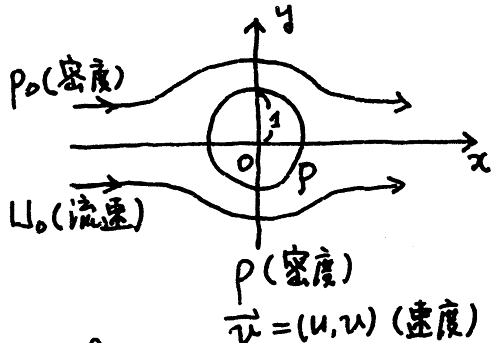
二次元圧縮流のImaiの方程式

東京電機大 理工　桜井 明
新井 勉

§1. 序

二次元 xy − 平面におかれた物体 P の外部を流れる圧縮定常流が満足する方程式（Imaiの方程式）を考える。

まず，簡単のために，P は原点を中心とする半径1の円とする（そうでない場合については後で述べる）。数学的には，無限遠での流速 U_0，密度 ρ_0，を与えられた時，P 上で指定された境界条件を満すような速度 $\vec{v} = (u, v)$，及び密度 ρ を求めよ，という問題である。



正規化して ρ/ρ_0 を ρ，$\vec{v}/U_0$ を $\vec{v}$ と書こう。さらに，複素変数 $z = x + iy = re^{i\theta}$ と，微分作用素 $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$，$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ を導入する。連続の式から流れ関数 ψ，渦無しの条件からポテンシアル ϕ をつくり，$F = \phi + i\psi$（複素速度ポテンシアル）とおけば，

基礎方程式は

$$\partial_{\bar{z}} F = \frac{1}{2}(1-\rho)\partial_{\bar{z}}(F+\bar{F}) \tag{1.1}$$

$$q \equiv \partial_{\bar{z}}(F+\bar{F}) = u + iv \ (\text{複素速度}) \tag{1.2}$$

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2}M^2(|q|^2-1)\right]^{1/\gamma-1} \tag{1.3}$$

となる。ここで，$M = U_0/c_0$（Mach数，c_0：音速），$\gamma > 1$（定数）である。更に，速度qに対し，D上での境界条件及び無限遠での条件を次のように課す：

$$\mathrm{Re}(q e^{-i\theta})_{z=e^{i\theta}} = 0, \tag{1.4}$$

$$q \longrightarrow 1 \quad \text{as } z \longrightarrow \infty. \tag{1.5}$$

本講は，(1.1)～(1.5)を満すような速度qの存在を証明する事，を目的とする。二次元圧縮定常流に対する数学的な研究としては，方程式を，ポテンシアルϕに関する二階の偏微分方程式に書きなおした場合に，準線型楕円型方程式論，擬解析関数論などを用いた Bers [1], [2], Shiffman [4] 等の結果があるが，ここでは，より簡単な方法で(1.1)～(1.5)を取扱かう。すなわち，方程式(1.1)～(1.5)を，適当なBanach空間の（qに関する単独の）作用素方程式に書きなおし，「縮小写像の原理」を用いて，解qの存在を示す事にする。尚，本講は，Sakurai [3]，の議論の発展であり，そこで得られている結果を流用する。定理や命題の証明は，概略だけを述べる。

§2. 空間の定義

完全流体に対応する複素速度を $q_0 = 1 - \frac{1}{z^2}$ とおき，Q を，$q = q_0 + Q$ が (1.1)～(1.5) を満足するように求めよう。q_0 は条件 (1.4), (1.5) を満しているから，Q は (1.4) 及び $Q \to 0$ as $z \to \infty$ を満足せねばならない。そこで，極座標 $r \geqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ に対し，次のような連続関数の空間 X, D を定義する。 $0 < \alpha < 1$ なる α を勝手に固定し，

定義
$$X = \{ f \mid f(r,\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im\theta},$$
$f_m(r)$ は複素数値連続関数,
$$\|f\|_X = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sup_{r \geqq 1} |f_m(r)| < \infty \}$$
$$D = \{ f \in X \mid r^{1+\alpha} f \in X,\ Re(f(1,\theta) e^{-i\theta}) = 0,$$
$$\|f\|_D = \|rf\|_X \}.$$

この時，X は Banach 代数に (i.e. $\| \ \|_X$ につき完備なノルム空間で，$\|f \cdot g\|_X \leqq \|f\|_X \|g\|_X$ が成立.), D は実 Banach 空間になることが容易に示される。$f \in D$ ならば $f = O(\frac{1}{r^{1+\alpha}})$ as $r \to \infty$ である事に注意されたい。空間 D が，これから解 Q をさがすところの空間である。

§3. 空間 D における問題の定式化と存在定理

以下，定数 γ は固定し，M をパラメーターとする。ただし，M, γ は，関係： $M^2(\gamma - 1) < 2/3$ を満すものとする。

方程式(1.1)〜(1.4)を，D内でのQに関する単独方程式に書きあらわすために，以下の記号を用いよう。

① $q(Q) = q_0 + Q$,

② $\rho(Q) = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 (|q(Q)|^2 - 1)\right]^{1/\gamma-1}$,

③ $[(1-\rho)q](Q) = (1-\rho(Q))q(Q)$,

④ $(1-x)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \ (-1<x<1)$ と巾級数展開し，この係数を用いて $K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| x^n \ (0 \leqq x < 1)$ とおく。

⑤ $\delta > 0$ を $M^2(\gamma-1) < 2(1-\delta)/3$ なるものとして固定し，$R_M = \sqrt{2(1-\delta)/M^2(\gamma-1) + 1} - 2 \ (>0)$ とおく。

⑥ $\alpha(\|Q\|_D) = (\gamma-1)M^2((\|Q\|_D+2)^2-1)/2$ とおく。

この時，次の命題が成立する。

命題3.1. $Q \in D$, $\|Q\|_D \leqq R_M$

$\Longrightarrow$ $[(1-\rho)q](Q) \in D$ であり，かつ

$$\|[(1-\rho)q](Q)\|_D \leqq (\|Q\|_D + 2)\, K(\alpha(\|Q\|_D))$$

が成立する。

証明は，Sakurai [3] を少し修正すればよい。

次に，$h \in D$ が与えられた時，

$$\partial_{\bar z} F = h \ (\nu \geqq 1), \quad \partial_{\bar z}(F + \bar F) - q_0 \in D, \qquad (3.1)$$

を満す F を求める問題を考えよう。このような F があったとして，

$$Q = \partial_{\bar z}(F + \bar F) - q_0 \qquad (3.2)$$

とおく。 問題(3.1), (3.2)について，次の命題が成立する。

<u>命題3.2.</u> $h\in D$に対し，(3.2)なるQが一意的に存在する。この対応を，$N: D\ni h\longmapsto Q\in D$ とかくと，$\|Nh\|_D\leqq 2(1+\frac{2}{1-\alpha})\|h\|_D$ が成立する。

<u>証明</u> $h\in D$に対応する，F及びQの表示は，Sakurai[3]によれば，

$$F=z+\frac{1}{z}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}z^{m-1}\int_{k_m}^{z\bar z}h_m(\sqrt{\eta})\sqrt{\eta}^{-m}d\eta$$
$$+\sum_{m=2}^{\infty}z^{-(m-1)}\int_{\infty}^{1}\overline{h_m}(\sqrt{\eta})\sqrt{\eta}^{-m}d\eta+C\quad(C:\text{実定数})$$
$$Q=h+\frac{z}{\bar z}\bar h+\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m-1)\bar z^{m-2}\int_{k_m}^{z\bar z}\overline{h_m}(\sqrt{\eta})\sqrt{\eta}^{-m}d\eta$$
$$-\sum_{m=2}^{\infty}(m-1)\bar z^{-m}\int_{\infty}^{1}h_m(\sqrt{\eta})\sqrt{\eta}^{-m}d\eta \tag{3.3}$$

で与えられる。ここで $k_m=\begin{cases}\infty & m>1\\ 1 & m\leqq 1\end{cases}$ である。Qの一意性は次のように示される。$h\in D$に対し，(3.1), (3.2)がF_i, Q_i $(i=1,2)$について成立するとする。$F=F_1-F_2$とすると，$Q_1-Q_2=\overline{\partial_z(F)}$，$\partial_{\bar z}F=0$である。よって$F$はanalyticであり，$f=\partial_z F$とおけば$f$もanalytic，かつ$\bar f\in D$であるから$|zf|\leqq\|rf\|_X<\infty$，$Re(f\cdot z)_{z=e^{i\theta}}=0$ となる。調和関数に対する外部Dirichlet問題の解の一意性から，$Re(fz)=0$ $(r\geqq1)$である。これより$Im\, f\cdot z=const$となり$f(z)=\frac{iC}{z}$ (Cは実定数)とかけるが，$f=O(\frac{1}{r^{1+\alpha}})$ $(r\to\infty)$ でなくてはなら

ないから $f\equiv 0$。従って $Q_1=Q_2$ である。■

命題3.2より，問題(1.1)〜(1.5)は，空間Dに於て，作用素方程式：

$$Q = N\left(\frac{1}{2}[(1-\rho)q](Q)\right) \tag{3.4}$$

と定式化される。(すなわち，(3.4)の解Qに対し，$q=q_0+Q$ は(1.1)〜(1.5)の解となる)。よって，問題は，Dにおいて，作用素 $N(\frac{1}{2}[(1-\rho)q])$ の不動点を求める事に帰着される。これについて：

<u>定理</u>　ある $M_0\in]0,1[$ が存在し，$0\leqq M\leqq M_0$ なる M に対して，方程式(3.4)は，空間D内に解Qをもつ。

定理の証明は，以下の命題3.3, 3.4を示す事によって為される。

<u>命題3.3.</u>　次のような $l_0\in]0,1[$ が存在する。

$l\in]0,l_0[\implies$ ある $M_0(l)\in]0,1[$ があって，$M\in[0,M_0(l)[$ ならば，作用素：$N(\frac{1}{2}(1-\rho)q)$ は，D内の半径 lR_M の閉球 $B_{lR_M}=\{f\in D\mid \|f\|_D\leqq lR_M\}$ を，それ自身の中へうつす。

<u>証明</u>　$Q\in D$ を，$\|Q\|_D\leqq lR_M$ $(<R_M)$ なるものとすれば，命題3.1, 3.2より，$\|N(\frac{1}{2}[(1-\rho)q](Q))\|_D\leqq(1+\frac{2}{1-\delta})K(\alpha(\|Q\|_D))\times(\|Q\|_D+2)$ が成立する。$\alpha\leq 1-\delta$ であること，及び $0\leqq\alpha\leq 1-\delta$ に対し $K(\alpha)\leqq C_1\alpha$ (C_1 は定数) とできる事，に注

意すれば，（以下 C_i ($i=1,2\cdots$) は，ℓ, M によらない定数），

$$
\begin{aligned}
&\|N(\tfrac{1}{2}(1-\rho)q(Q))\|_D \\
&\leqq C_2 M^2((\|Q\|_D+2)^2-1)(\|Q\|_D+2) \\
&\leqq C_2 M^2(\ell^3 R_M^3 + 6\ell^2 R_M^2 + 11\ell R_M + 6) \\
&\leqq C_3 \frac{\ell^3}{M} + C_4 \ell^2 + C_5 \ell M + C_6 M^2 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

とできる。ただし，$(K_1/M) - K_2 \leqq R_M \leqq K_1/M$ なる正定数 K_1，K_2 が存在する事を使った。今 $C_7 > 0$ を一つ固定し，$\ell_0 \in]0,1[$ を，$(C_3 + C_7)\ell^3 \leqq K_1 \ell$ が任意の $\ell \in]0,\ell_0[$ に対して成立するようにえらぶ。すると，$\ell \in]0,\ell_0[$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&\ell(K_1/M - K_2) - (*) \\
&\geqq \frac{C_7}{M}\ell^3 - C_4\ell^2 - (C_5 M + K_2)\ell - C_6 M^2
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\ell \in]0,\ell_0[$ を固定し，M を小さくとれば，右辺 $\geqq 0$ とできる。$\ell(K_1/M - K_2) \leqq \ell R_M$ であるから，$\|N(\frac{1}{2}(1-\rho)q(Q))\|_D \leqq \ell R_M$ となる。$\blacksquare$

<u>命題3.4.</u> ある $\ell \in]0,1[$ と，$M_1(\ell) \in]0,1[$ が存在し，$M \in [0, M_1(\ell)[$ に対し，作用素 $N(\frac{1}{2}(1-\rho)q)$ は，$B_{\ell R_M}$ から，それ自身の中への縮小写像となる。すなわち，定数 $L \in]0,1[$ が存在し，不等式：$\|N(\frac{1}{2}(1-\rho)q)(Q_1) - N(\frac{1}{2}(1-\rho)q(Q_2))\|_D \leqq L\|Q_1 - Q_2\|_D$ が，任意の $Q_1, Q_2 \in B_{\ell R_M}$ に対して成立する。

<u>証明</u> ℓ, Mは命題3.3で述べたものとする。また，命題3.2で定義した作用素Nは，(3.3)から分るように，係数体を実に限れば，線型作用素となっている事に注意する。Q_1, Q_2 $\in D$, $\|Q_i\|_D \leqq \ell R_M$, とし

$$\Delta = (1-p(Q_1))q(Q_1) - (1-p(Q_2))q(Q_2)$$

とする。$A_{\ell,M} = \ell R_M + 2$, $\beta_{\ell,M} = \frac{\gamma-1}{2}M^2(A_{\ell,M}^2 - 1)\,(<1-\delta)$ とおく。簡単な計算で，$\||q(Q_i)|^2-1\|_X \leqq A_{\ell,M}^2 - 1$, $\|q(Q_i)\|_X \leqq A_{\ell,M}$が示せる。この時$\left|\frac{\gamma-1}{2}M^2(|q(Q_i)|^2-1)\right| \leqq \beta_{\ell,M} < 1-\delta$であるから

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^n \Delta(n)$$

と展開できる。ここで

$$\Delta(n) = (|q_1|^2-1)^n q_1 - (|q_2|^2-1)^n q_2$$

$$q_i = q(Q_i)$$

である。 $\Delta(n)$を計算すると，

$$\Delta(n) = (|q_1|^2-1)^n(Q_1-Q_2) + [(Q_1-Q_2)\bar{q}_1 + (\bar{Q}_1-\bar{Q}_2)q_2] \times \left[\sum_{j=0}^{n-1}(|q_1|^2-1)^{n-1-j}(|q_2|^2-1)^j\right] q_2$$

となる。これより，（Xが Banach algebra である事を用い），

$$\|\gamma^{1+d}\Delta(n)\|_X \leqq \||q_1|^2-1\|_X^n \|Q_1-Q_2\|_D + 2\|Q_1-Q_2\|_D(\|q_1\|_X + \|q_2\|_X)\|q_2\|_X \times \sum_{j=0}^{n-1} \||q_1|^2-1\|_X^{n-1-j} \||q_2|^2-1\|_X^j$$

$$\leqq \|Q_1-Q_2\|_D\left\{(A_{\ell,M}^2-1)^n+2A_{\ell,M}^2\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(A_{\ell,M}^2-1)^{n-1-j}(A_{\ell,M}^2-1)^j\right\}$$

$$=\|Q_1-Q_2\|_D\left\{(A_{\ell,M}^2-1)^n+2n\,A_{\ell,M}^2(A_{\ell,M}^2-1)^{n-1}\right\}$$

となる。故に

$$\|\Delta\|_D\leqq\|Q_1-Q_2\|_D\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\left(\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^n(A_{\ell,M}^2-1)^n\right.$$

$$\left.+A_{\ell,M}^2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\left(\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^n 2n(A_{\ell,M}^2-1)^{n-1}\right\}$$

$$=\|Q_1-Q_2\|_D\left\{K(\beta_{\ell,M})+A_{\ell,M}^2K'(\beta_{\ell,M})\left(\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right\} \quad -(3.5)$$

なる評価をうる。

ここで，正定数 C_1, C_2 が存在して，$K(\beta_{\ell,M})\leqq C_1\beta_{\ell,M}$，$K'(\beta_{\ell,M})\leqq C_2$ とできる事に注意すれば，命題3.3 の議論と同様にして，ℓを小さくとり，それに応じてMを小さくすることによって，上式の{　}は，いくらでも小さくできる。Nは，有界線型作用素であったから，Mを十分小さくとることにより，$N(\frac{1}{2}(1-\rho)q)$ が $B_{\ell R_M}$ からそれ自身への縮小写像である事が示された。■

この命題3.4によって，方程式(3.4)は，閉球$B_{\ell R_M}$内に唯一の解をもつ事になり，定理の結論が得られた。ところで上で構成した，(1.1)〜(1.5)の解は $0<\alpha<1$ に対し $q-1=O(\frac{1}{r^{1+\alpha}})$ であるが，証明から分るように，αを1に近づけるに応じて，Mを小さくとらねばならぬ事に注意されたい。

§4. 解の微分可能性

§3 の定理は，解の微分可能性については，何も保証していない。ここでは，次の定理を示そう。

定理 Mが小さい時，(1.1)〜(1.5) の微分可能な解が存在する。

§3 の X，D の代りに，次のような関数空間 X'，D'を考える。

$$X' = \{ f \in X \mid \|f\|_{X'} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+|m|) \sup_{r \geq 1} |f_m(r)| \}$$

$$D' = \{ f \in X' \mid f \in D,\ r^{1+\alpha} f \in X' \}.$$

この空間内で，§3 と同じ議論をするのである。まず，$\delta > 0$ が存在して，$M^2(\gamma-1) < 2(1-\delta)/7$ が成立しているとしよう。$R_M' = \sqrt{2(1-\delta)/(\gamma-1)M^2 + 9} - 4\ (>0)$，

$$\alpha'(\|Q\|_{D'}) = \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2((\|Q\|_{D'}+4)^2 - 9)$$

とおく。$\|Q\|_{D'} \leqq R_M'$ ならば $\alpha'(\|Q\|_{D'}) < 1-\delta$ である。X'が，やはり Banach algebra になる事に注意すれば，次の命題が得られる。(D'も実 Banach 空間である)。

命題4.1. $\|Q\|_{D'} \leqq R_M'$

$$\Longrightarrow \|(1-p)g(Q)\|_{D'} \leqq K(\alpha'(\|Q\|_{D'}))(\|Q\|_{D'}+4)$$

次に，$h \in D'$に対し，問題(3.1)，(3.2)を考えると，((3.1)の D を D'に変えた時)，下の命題を証明できる。

命題4.2. $h \in D'$ に対し，(3.1)なる $Q \in D'$ が一意的に対応し，Q は公式(3.3)で与えられる。この対応を N とかくと，$\| N h \|_{D'} \leqq 2(2+\frac{2}{1-\alpha})\| h \|_{D'}$ が成立する。

これから，問題は，やはり，D' 内において，方程式(3.4)を解く事に帰着されるが，この時，§3と同様にして，M が小さければ，$N(\frac{1}{2}(1-\rho)q)$ が，D' 内の閉球 $B_{\ell R_M'}$ を，それ自身の中にうつす縮小写像である事を示しうる。従って，方程式(3.4)は，D' 内に解をもつ事になる。この解の可微分性を調べよう。解 Q は，公式(3.3)で $h=(1-\rho)q(Q)$ とおいた表示をもつ。ところで，$h \in D'$ である事から，公式(3.3)の右辺の後半の二項は，変数 r，θ につき連続的微分可能である事が示される。これら二項を合せて $g(r,\theta)$ とかこう。すると，解 q は，(3.3)より，

$$Q - \frac{1}{2}(1-\rho)q(Q) - \frac{1}{2}\frac{z}{\bar{z}}(1-\rho)\overline{q(Q)} = g(r,\theta) \quad (4.1)$$

を満す。(4.1)の左辺を $T(Q)$ とかけば，T は D' の球 $\|Q\|_{D'} \leqq \ell R_M'$ で定義された作用素となる。

命題4.3. M が小さければ，T は，1対1の作用素であり，ある定数 $L>0$ が存在して，$|T^{-1}g_1(r,\theta)-T^{-1}g_2(r,\theta)| \leqq L \times |g_1(r,\theta)-g_2(r,\theta)|$ が成立する。

$T(Q_1)=T(Q_2)$ とすると，($\|Q_i\|_{D'}\leqq \ell R_M'$ に対し)，

$$|Q_1-Q_2|\leqq \quad |(1-\rho)g(Q_1)-(1-\rho)g(Q_2)|$$

となるが，命題3.4.の証明の方法を用いれば，(または平均値の定理を用いて)，

$$\leqq C(\ell,M)\,|Q_1-Q_2|$$

とできる。ここで $C(\ell,M)$ は，ℓ と M を小さくとればいくらでも小さくできる量である。$C(\ell,M)<1$ とすれば，上式から $Q_1=Q_2$ が従う．また

$$|TQ_1-TQ_2|\geqq |Q_1-Q_2|-|(1-\rho)g(Q_1)-(1-\rho)g(Q_2)|$$
$$\geqq (1-C(\ell,M))\,|Q_1-Q_2|$$

となるから，$C(\ell,M)<1$ とするなら

$$|T^{-1}g_1-T^{-1}g_2|\leqq L\,|g_1-g_2| \quad \left(L=\frac{1}{1-C(\ell,M)}\right)$$

をうる。■

さて，(4.1)の両辺に T を施こせば $Q(r,\theta)=T^{-1}g(r,\theta)$ となる．g は C^1 級だったから絶対連続であり，命題4.3により Q も絶対連続となる。よって Q は，殆んど至る所で可微分である。

§5. D の形がより一般的な場合

$z=x+iy$ 平面におかれた物体 D は，その外部が(周もこめて)，等角写像；

$$\zeta=\zeta(z)=\xi+i\eta$$

$$
\begin{cases}
z = b_{-1}\zeta + b_0 + b_1\zeta^{-1} + \cdots \quad (b_1 = a e^{-i\beta}) \\
dz/d\zeta \neq 0, \quad dz/d\zeta \in X \text{（}\zeta\text{－平面での）}.
\end{cases}
$$

によって，$\zeta=\xi+i\eta$ 平面の単位円の外部 $|\zeta|\geq 1$ にうつされるものとする（従って P は，かなり滑らかなものでなくてはならない）。この写像によって，z－平面での Imai の方程式は，ζ－平面においては，

$$
\begin{cases}
\partial_{\bar\zeta} F = \dfrac{1}{2}\left\{1-\left[1-\dfrac{\gamma-1}{2}M^2\left|\dfrac{d\zeta}{dz}\right|^2\left(|\partial_{\zeta}(F+\bar F)|^2-\left|\dfrac{dz}{d\zeta}\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\right\} \\
\qquad\qquad \times\, \partial_{\bar\zeta}(F+\bar F), \\
q \equiv \partial_{\zeta}(F+\bar F) \longrightarrow b_{-1} \quad \text{as } \zeta\to\infty \\
\mathrm{Re}(q e^{-i\theta})_{\zeta=e^{i\theta}} = 0
\end{cases}
$$

となる。仮定から $dz/d\zeta$, $d\zeta/dz$ ともに有界である。この方程式に対しても，$q_0 = a\left(e^{i\beta}-\dfrac{e^{-i\beta}}{\zeta^2}\right)$，$q = q_0 + Q$ とおき，前と同じ議論をする事ができる。勿論，評価や計算は，複雑になるが，M を更に小さくとる事によって，§3，§4 と同様の結果が得られる。

文献 [1]. L. Bers : Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, Wiley (1958)

[2] L. Bers : Comm. Pure Appl. Math. vol.7 (1954)

[3] A. Sakurai : Jor. Phy. Soc. Japan. vol.38 (1975)

[4] M. Shiffman : Jor. Rat. Mech. Anal. vol.1 (1952)