

反応吸収系の Marangoni 不安定に対する表面変形の効果
— 気相側物質移動抵抗の影響 —

和歌山高専 舟田 敏雄

坂田 光雄

§ 1. はじめに

気液反応吸収系において、ガスの吸収速度が異常に増大する原因は、表面張力勾配 (Marangoni 効果) による界面攪乱の発生によるものと考えられている^{1~3)}。表面張力勾配に起因する安定問題の理論的解明は、Pearson⁴⁾ や Sternling, Scriven⁵⁾ を初めとして、数多く取り組まれて来ているが、反応を伴う系での解析は少なく、液液系⁶⁾ と気液系^{7~9)} についての報告があるに過ぎない。又、接触界面が変形する場合には、表面張力波や重力波などの効果が安定条件に影響する事が知られている^{10~12)} が、未だ十分に検討されてはいない様に思われる。

筆者らは、先に今石・篠縄の解析⁹⁾ を拡張し、擬1次反応系に対する表面変形の効果を吟味した¹³⁾。その結果、①方程式中の対流項が重要な役割を果たす“対流不安定”と境界条

件に現われる表面変形の効果による“表面変位不安定”の2つの機構に分類でき、②後者の機構は、低波数域で顕著であり、Crispation数、Weber数、反応パラメータで記述される事。③固体壁上でのガス濃度条件が異なる2つの場合を解析し、臨界Marangoni数は、濃度一定の条件よりもフラックスなしの条件の場合の方が大きな値となる事、などが示された。

本報告では、より実際的な条件の1つとして、気相側物質移動抵抗(Biot数)を考慮して解析を進める。又、これに伴い、表面張力勾配のガス濃度依存性が陽に現われ、都合2つのパラメータが追加される。従って、先ず平滑表面の場合を調べ、次いで変位表面について議論する。

§2. 基礎方程式と問題の定式化

厚さ δ の液層が固体壁上に静止しているとし、座標系をFig. 1のように取る。液層は、表面からガスAを吸収し、内部で $A \xrightarrow{k} nP$ なる擬1次不可逆反応をしている。溶質ガスの濃度を

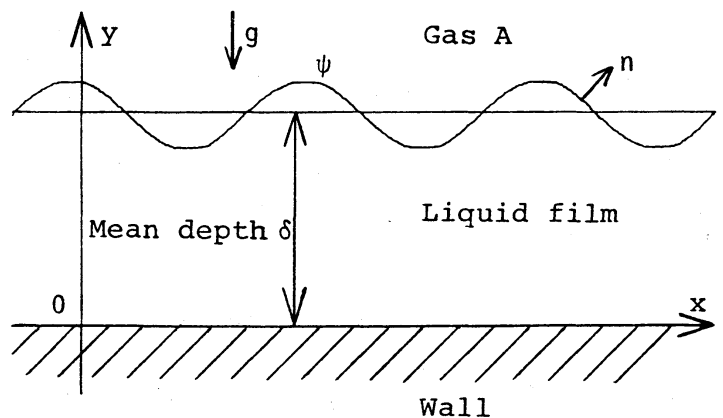


Fig.1

C_A , 生成物のそれを C_P で表わすと、反応速度 r は、各々

$$r_A = k C_A, \quad r_P = -n k C_A \quad (k; \text{反応速度定数})$$

となる。この時、液層内温度 T は一様であり、密度 ρ , 粘性係数 μ , 拡散係数 D_A, D_P などの物性値は一定とする。この系の基礎方程式は、次の連続の式、運動方程式及び反応を伴う拡散方程式で構成される。

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)) \quad (1)$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 U + \rho g \quad \left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla \right) \quad (2)$$

$$\frac{DC_A}{Dt} = D_A \nabla^2 C_A - k C_A \quad (3)$$

$$\frac{DC_P}{Dt} = D_P \nabla^2 C_P + n k C_A \quad (4)$$

但し、 U は流速ベクトル (u, v, w)、 P は圧力、 g は重力加速度 ($0, -g, 0$) である。

この問題の境界条件について、以下の仮定を導入する。

(I) カス吸収の気相側物質移動係数 k_G により、気液界面において、 A 成分の移動速度は、

$$n \cdot D_A \nabla C_A = k_G (\bar{C}_{A\infty} - C_A)$$

($\bar{C}_{A\infty}$; 界面から充分離れた気相側での濃度, n ; 界面の外向き法線ベクトル) で与えられる。(II) 反応生成物は不揮発性

で、気相への放散はない。Ⅳ)気液表面張力の (C_A, C_P, T) の変化を

$$d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_A} \right) dC_A + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \right) dC_P$$

とする。Ⅳ)液層底部の固体壁で、A, P両成分の濃度の代表的な条件として

$$\text{Case (i)} \quad C_A = C_P = 0$$

$$\text{Case (ii)} \quad \partial C_A / \partial y = C_P = 0$$

を用いる¹³⁾。

この系は、 $[u, P, C_A, C_P, y]$ で記述されており、界面が平滑な静止定常状態 $[0, \bar{P}, \bar{C}_A, \bar{C}_P, 0]$ では、 y へのみ依存するものとして、(2)~(4)式及び仮定により、次のように表わされる。

$$\bar{P} / \rho g \delta = \bar{P}_A / \rho g \delta + 1 - \eta \quad (5)$$

$$(\bar{P}_A; \text{気相側ガス圧力, } \eta = y / \delta)$$

Case (i)

$$\bar{C}_A / \bar{C}_{A0} = \sinh \gamma \eta / \sinh \gamma / \theta \quad (6-a)$$

$$\bar{C}_P / \bar{C}_{Pi} = \beta (\gamma \eta \coth \gamma - \sinh \gamma \eta / \sinh \gamma) / \theta \quad (7-a)$$

$$\theta = \gamma \coth \gamma / B + 1 \quad (8-a)$$

$$\beta = \theta / (\gamma \coth \gamma - 1) \quad (9-a)$$

Case (ii)

$$\bar{C}_A / \bar{C}_{A\infty} = \cosh \gamma \eta / \cosh \gamma / \theta \quad (6-b)$$

$$\bar{C}_P / \bar{C}_{Pi} = \beta (\gamma \eta \tanh \gamma + (1 - \cosh \gamma \eta) / \cosh \gamma) / \theta \quad (7-b)$$

$$\theta = \gamma \tanh \gamma / B + 1 \quad (8-b)$$

$$\beta = \theta / (\gamma \tanh \gamma - 1 + 1 / \cosh \gamma) \quad (9-b)$$

但し、 $\gamma (= \delta \sqrt{k / D_A})$ は反応パラメータ、 \bar{C}_{Pi} は界面における生成物濃度である。仮定IIの物質移動の効果は、Biot数 ($B = k_f \delta / D_A$) として θ に含まれており、 $B \rightarrow \infty$ で $\theta = 1$ となる。又、 $\beta (= n \bar{C}_{A\infty} D_A / (\bar{C}_{Pi} D_p))$ は、生成物濃度を規格化する為に定義されている。Cases (i), (ii) の濃度分布は、遅い反応 ($\gamma < 1$) の場合に特徴的な違いを示し、 $\gamma \gg 1$ では両者が一致する。

線形安定理論の手法により、攪乱状態 $[u', p', C_A', C_P', \psi]$ を表式化するにあたり、無次元表現

$$\left. \begin{aligned} & (x/\delta, y/\delta, z/\delta, D_p t / \delta^2) \\ & [u' \delta / D_p, p' / \rho g \delta, C_A / \bar{C}_{A\infty}, C_P / \bar{C}_{Pi}, \psi / \delta] \end{aligned} \right\} (10)$$

及び無次元数

$$M_R = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \right) \frac{\bar{C}_{Pi} \delta}{\mu D_p} \quad \text{生成物の Marangoni 数}$$

$$M_A = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_A} \right) \frac{\bar{C}_{A\infty} \delta}{\mu D_A} \quad \text{溶質カスの Marangoni 数}$$

$$B = \frac{k_G \delta}{D_A} \quad \text{Biot 数}$$

$$L = \frac{D_A}{D_P} \quad \text{拡散係数の比}$$

$$N_c = \frac{\mu D_P}{\sigma \delta} \quad \text{Crispation 数}$$

$$N_G = \frac{\rho g \delta^2}{\sigma} \quad \text{Weber 数}$$

$$S_c = \frac{\mu}{\rho D_P} \quad \text{Schmidt 数}$$

を導入する。更に、(1), (2)式より u' , v' , P' を消去して、系を $[v', C_A', C_P', \psi]$ で表わし (以下、無次元表現に同じ記号を用いる)、解の形を

$$[v', C_A', C_P', \psi] = [f(\eta), g(\eta), h(\eta), s] e^{\phi} \quad (11)$$

$$(\phi = i\alpha_1 x + i\alpha_3 z + \lambda t)$$

(α_1, α_3 ; 各方向成分の波数, λ ; 複素定数) とおくと、攪乱の方程式及び境界条件は次のようになる。

$$(\lambda \mathcal{L} - S_c \mathcal{L}^2) f = 0 \quad (12)$$

$$(\lambda - L(\mathcal{L} - \gamma^2)) g = -f D \bar{C}_A \quad (13)$$

$$(\lambda - \mathcal{L}) h = \beta \gamma^2 g - f D \bar{C}_P \quad (14)$$

$$(\mathcal{L} = D^2 - \alpha^2, D = d/d\eta, \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_3^2)$$

B. C. at $y=1$ (変形の振幅は微小として整理している)

$$(\mathcal{L} + 2\alpha^2)f = \alpha^2(M_R h + LMA(g + D\bar{C}_A \cdot S)) \quad (15)$$

$$(\lambda/S_c - \mathcal{L} + 2\alpha^2)Df = -(\alpha^4 + N_G \alpha^2)S/N_c \quad (16)$$

$$Dg + Bg + (D^2\bar{C}_A + B D\bar{C}_A)S = 0 \quad (17)$$

$$Dh + D^2\bar{C}_P \cdot S = 0, \quad f = \lambda S \quad (18)$$

B. C. at $y=0$

$$f = Df = h = 0 \quad (19)$$

$$g = 0 \quad \text{Case (i)}, \quad Dg = 0 \quad \text{Case (ii)} \quad (20)$$

仮定(I)により、(17)式に B を含む項、(15)式に表面張力勾配のか
ス濃度依存項が現われる事に注意されたい。前報¹³⁾において
は、 $B \rightarrow \infty$ の為、結果的に表面張力勾配は生成物にのみ依存
していた。

(12)~(20)式を解くと、安定性の解析は M_R の固有値問題とな
る。しかしながら、パラメータ数も多く複雑な為、定常モー
ドの場合 ($M_R(\alpha, \gamma, L, B, MA, N_c, N_G)$) を計算する。

3. 計算結果と考察(1) — 平滑表面の場合 —

この時固有値は $M_R(\alpha, \gamma, L, B, MA)$ となり、 $B \rightarrow \infty$
で更に $M_R(\alpha, \gamma, L)$ となる。従って、前報の結果を要
約した後、Biot 数及び溶質カスの Marangoni 数の影響に
ついて調べる。

§ 3. 1. Cases (i), (ii) に対する γ , L の効果

前報¹³⁾の結果を臨界 Marangoni 数 (M_{RC}) - γ 図に描くと Fig. 2 となる (Case (i) は今石・藤縄⁹⁾による)。これより、Case (ii) の方が大きな M_{RC} を与えており、 $\gamma < 5$ ではかすの固体壁条件に起因する M_{RC} の値の違いは顕著である。しかし、速い反応 (化学工学の分野では $\gamma \geq 3$ とされている) に対しては、違いがみられない。 L は対流による溶質かすの移動量の目安 ((13)式参照) と考えられ、かすの物質移動が著大な程 M_{RC} は小さくなっており、更に M_{RC} は γ について極小値を持つ。又、Case (ii) では、 $\gamma \rightarrow 0$ で L の値には関係せず、1点 ($M_{RC} = 130.91$) に収束する。この事は、(6)式の \bar{C}_A が

$$\bar{C}_A \sim \gamma \quad \text{Case (i)}, \quad \bar{C}_A \sim 1 \quad \text{Case (ii)}$$

となるので、(i) では対流項が残るが、(ii) ではそれが消失する者である。一方、 $L \rightarrow \infty$ の場合にも対流項は消えるが、(i) は $\gamma \rightarrow 0$ で $M_R \approx 109$ であって、(ii) の値とは異なる。

尚、 M_R の固有値問題としての扱いでは、(i), (ii) いずれの場合にも反応項の存在が本質的な役割を持つので、 $\gamma \rightarrow 0$ の極限においても無反応系 (物理吸収系) とは違う M_{RC} を持つ事が示されており^{6,9)}、逆の $\gamma \rightarrow \infty$ で熱対流の結果⁴⁾ (温度場の境界条件が C_p のそれに相当している場合) に対応する事に注意したい。

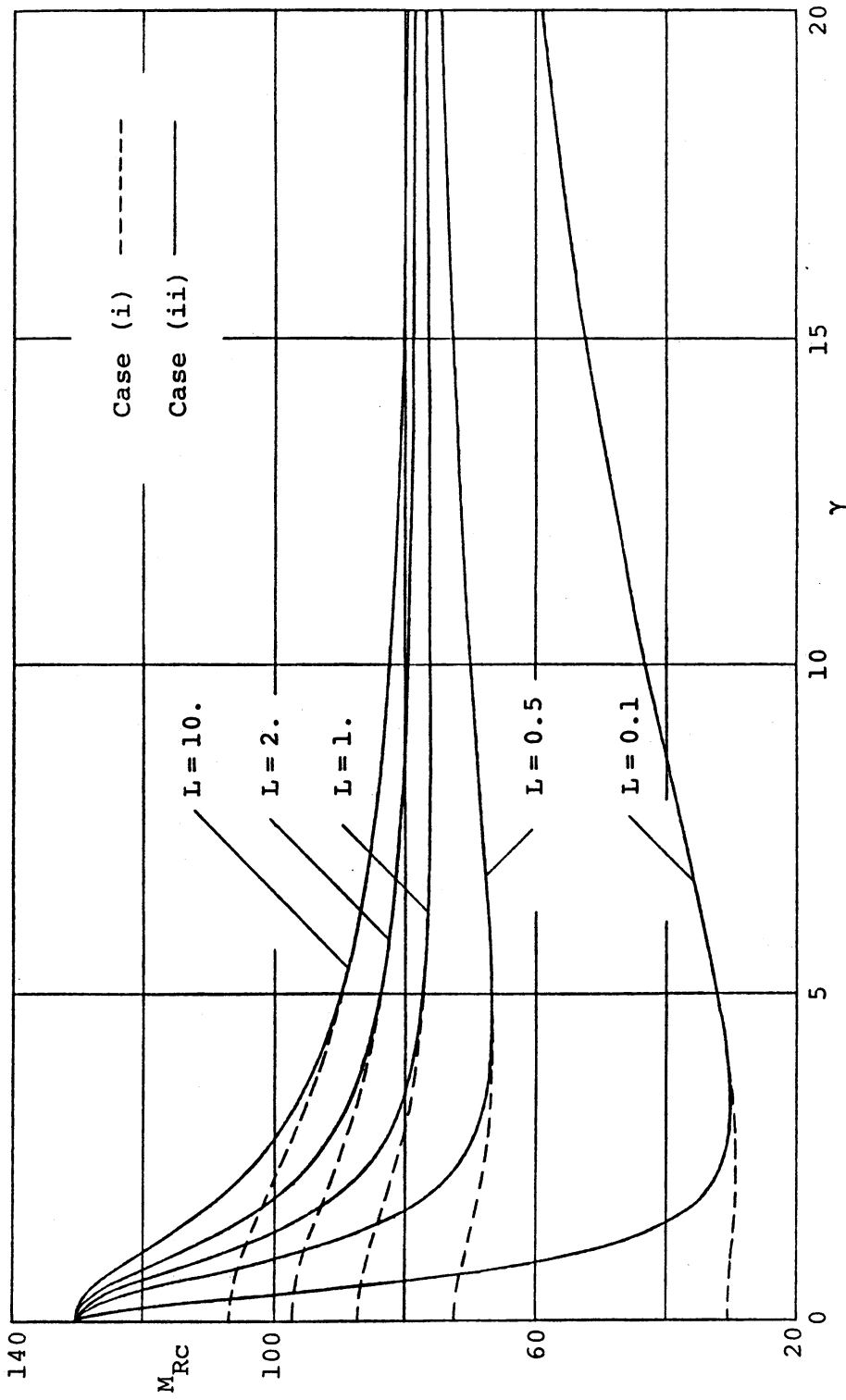


Fig.2

§ 3. 2. Biot数とガスMarangoni数

境界条件(15)式に示されるように 対流を引き起こす表面張力勾配は、 C_A , C_p 双方の効果によって発生する。(17)式を用いて、この右辺を整理すると

$$M_R h_{(1)} + L M_A g_{(1)} = M_R h_{(1)} - \frac{L M_A}{B} (Dg)_1 \quad (21)$$

と表わされる。この左辺で、 $g_{(1)}$, $h_{(1)}$ は同符号となるから、 $M_A < 0$ のとき、 C_A により勾配が緩和される為、 M_R は大きくなければならない。一方、 $M_A > 0$ では C_A による表面張力勾配が手伝って、 M_R が小さくとも対流を維持できる。又、Biot数は、 g , h に含まれてはいるが、(21)式右辺の表現から大体の効果を見積る事ができ、 B が小さいと溶質ガスによる影響は大きい。従って、溶質ガスの効果は、複合パラメータ $L M_A / B$ を用いてほぼ推論できる。これらの様子は、Figs. 3~6 に示されている。尚 $\gamma \rightarrow \infty$ では、 $g_{(1)} \rightarrow 0$ である事に留意されたい。

更に、中立安定曲線の波数 α に関する漸近形を求めると、

$\alpha \gg 1$ では

$$M_R \sim 8\alpha^3 \frac{\theta}{\beta\gamma^2} K \quad (\alpha \gg \gamma) \text{ Cases (i), (ii)} \quad (22)$$

$$K = 1 - \frac{B}{2\alpha} (\theta - 1) \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{L} \frac{2\alpha + B}{\alpha + B} \right)$$

$$M_R \sim 8\alpha^2 \quad (\gamma \gg \alpha \gg 1) \text{ Cases (i), (ii)} \quad (23)$$

(β , θ は各場合で異なる. (8), (9)式参照) 又. $\alpha \ll 1$ について. $\gamma \sim 0$ のとき

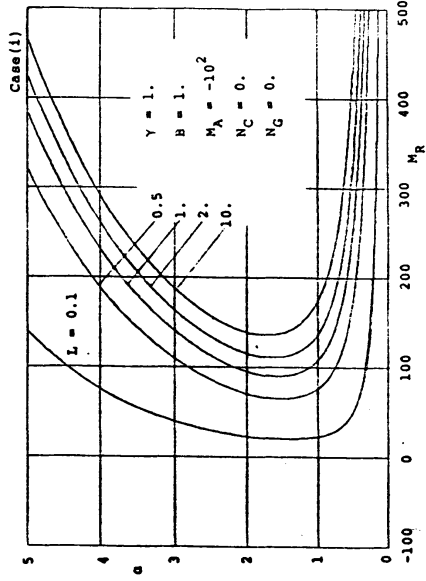
$$M_R \sim \frac{3360}{\alpha^2} \frac{L}{53 + 33L - 42/(1 + 1/B)} \quad \text{Case (i) (24-a)}$$

$$M_R \sim \frac{120}{\alpha^2} \quad \text{Case (ii)} \quad (24-b)$$

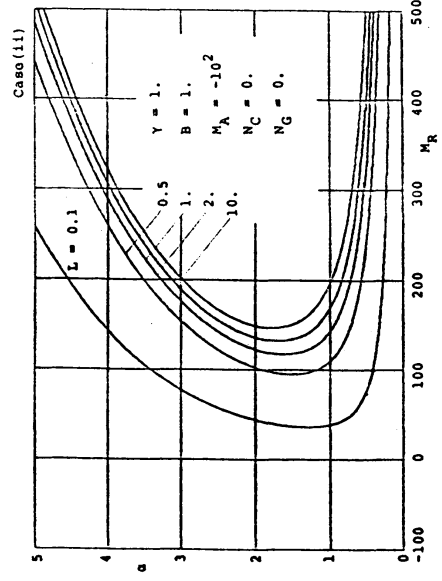
$\gamma \rightarrow \infty$ では

$$M_R \sim \frac{80}{\alpha^2} \quad \text{Cases (i), (ii)} \quad (25)$$

を得る。9, 尤は同程度のオーダーであるから、MAの効果は、定性的には中立曲線のM軸方向への平行移動を意味するが、漸近解では高次のオーダーとなる。 $\alpha \gg 1$ では、 γ が有限のとき $\theta(\alpha^3)$ から始まり、 $\gamma \rightarrow \infty$ の解(Pearson⁴⁾に一致する)とは異なる構造を持っている。又、Case (ii)の係数 θ/β の方が(ii)よりも大きい。 $\alpha \ll 1$ については、いずれも $\theta(\alpha^{-2})$ であり、(24)式はFig. 2における $\gamma \sim 0$ の状況と対応している。尚、(25)式は、Smith¹¹⁾の解と一致する。Bの影響は、(22)式の $\theta(\alpha^2)$ の項に現われるが、主にはLによって傾向が変わる。 $\alpha \ll 1$ では、Bが小さいと(24-a)の係数は小さくなる。

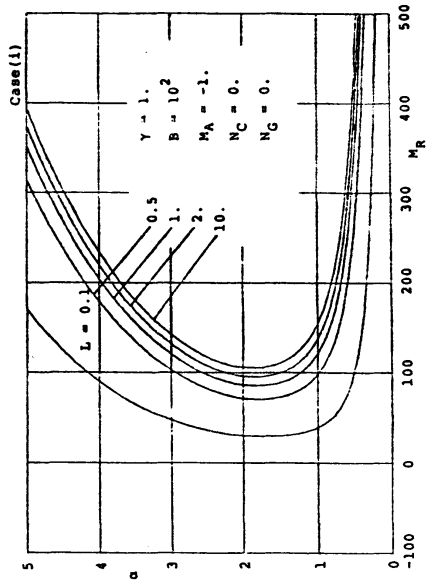


(a)

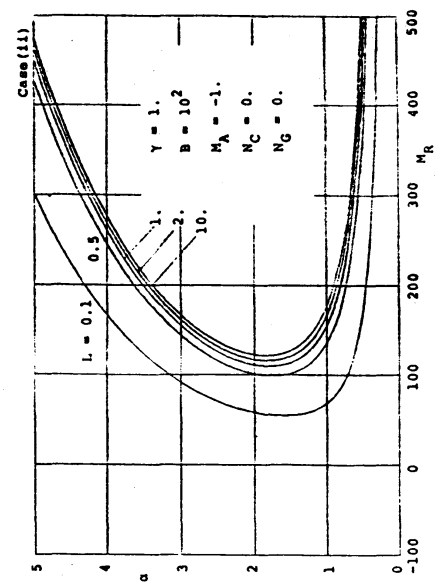


(b)

Fig. 4

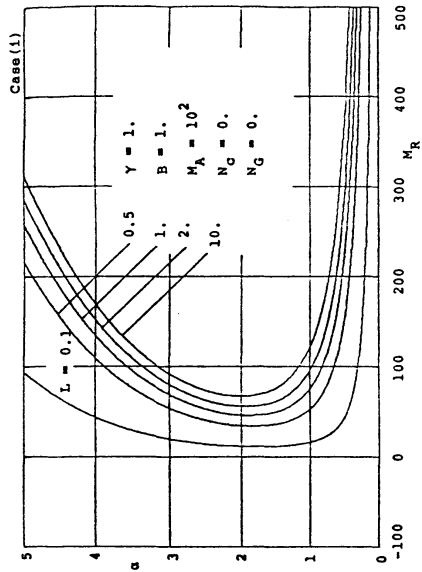


(a)

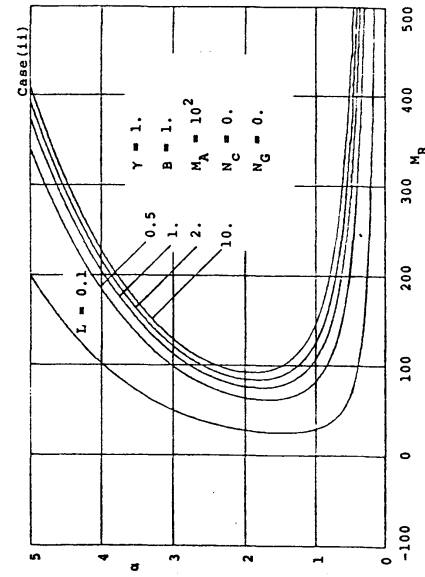


(b)

Fig. 3

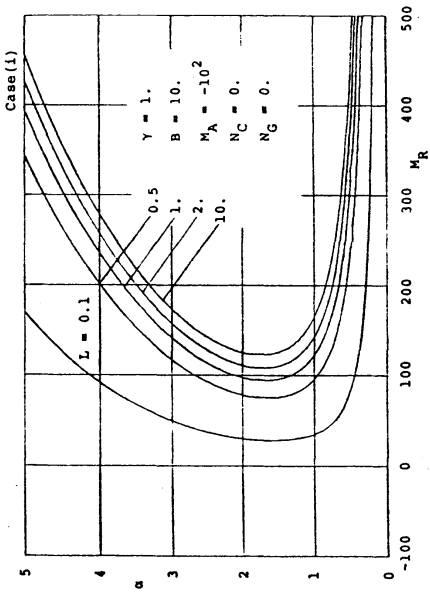


(a)

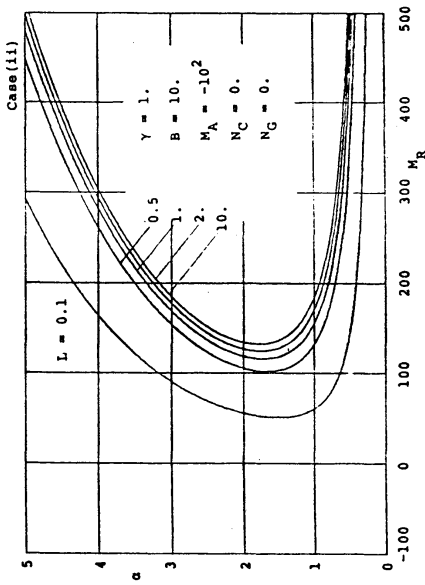


(b)

Fig. 6



(a)



(b)

Fig. 5

§4. 計算結果と考察(2) — 表面変形の効果 —

§4. 1. 表面変形効果の特徴と $\alpha \rightarrow 0$ の漸近解
表面変形と対流とを比較すると.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{f_e} &\sim -\frac{\delta Nc \alpha^3}{\sqrt{G + \alpha^2}} e^{-2\alpha + 1} & (\alpha \gg 1) \\ \frac{\delta}{f_e} &\sim -\frac{\delta l}{2} \frac{Nc}{\sqrt{G + \alpha^2}} \frac{1}{\alpha^2} & (\alpha \ll 1) \end{aligned} \right\} (26)$$

(f_e は $f(y)$ の漸近形より求めた極値) となるから、表面変形は、低波数域で顕著に現われる。

(26) 式を考慮し、(13)~(14) 式の対流項を無視して計算すると、 $\alpha \ll 1$ に対する g, h の漸近形が求められる。このとき、境界条件(15)式右辺について

$$MR h_{(1)} + LMA (g_{(1)} + (D\bar{C}_A)_1 \cdot \delta) \quad (27)$$

を調べると、 $g_{(1)}$ と $h_{(1)}$ とは、位相が π および異符号となる。この事は、変形効果があるとき $\alpha \ll 1$ では(14)式が

$$\delta h(y) \sim \frac{d^2 h}{dy^2} \sim -\beta \gamma^2 g(y)$$

となるので、(27) 式を満たす(13)式(同次方程式)の解は定符号関数である事及び条件 $h_{(1)} = 0$ を用いて説明される。更に、溶質カスの効果は $g_{(1)}$ と \bar{C}_A の変化によるものから成っており、

両者は又、異符号である。Case (i) では後者が、(ii)では前者
 が大きく寄与する為、各々の場合で影響が異なる(30-a,b)参照。

以上を特徴とする $\alpha \ll 1$ の漸近解は、次式に整理される。

$$M_R \sim \frac{2}{3} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{c}} E(\gamma, B) - \frac{LMA}{B} Q(\gamma, B) \quad (28)$$

Case (i)

$$E = \frac{(\gamma \coth \gamma - 1)(\cosh \gamma / B + \sinh \gamma / \gamma)}{\cosh \gamma - \gamma / \sinh \gamma + \gamma \sinh \gamma / B} \quad (29-a)$$

$$Q = \frac{E}{(\cosh \gamma / B + \sinh \gamma / \gamma)^2} \quad (30-a)$$

$$\left(\begin{array}{l} E \sim (\gamma - 1) / \gamma, \quad Q \sim 0 \quad (\gamma \gg 1) \\ E \sim \frac{1+B}{3+2B}, \quad Q \sim \frac{B^2}{(3+2B)(1+B)} \quad (\gamma \sim 0) \end{array} \right.$$

Case (ii)

$$E = \frac{(\gamma \tanh \gamma - 1 + 1/\cosh \gamma)(\sinh \gamma / B + \cosh \gamma / \gamma)}{\sinh \gamma + \gamma / \cosh \gamma - \tanh \gamma + (\gamma \cosh \gamma - \gamma) / B} \quad (29-b)$$

$$Q = - \frac{E}{(\sinh \gamma / B + \cosh \gamma / \gamma)^2} \quad (30-b)$$

$$\left(\begin{array}{l} E \sim \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{1 - 2e^{-\gamma}}, \quad Q \sim 0 \quad (\gamma \gg 1) \\ E \sim 1/2 \quad (B > 0), \quad E \sim 1 \quad (B = 0), \quad Q \sim 0 \quad (\gamma \sim 0) \end{array} \right.$$

E (Fig. 7) は、遅い反応のとき先の結果¹³⁾からズレて、Bが小さいとCase (i) では小さくなり、(ii)では大きくなって極値を持つ。一方、Q (Fig. 8) は、遅い反応でのみ現われ、(i)の場合 $\gamma = 0$ で最大値を取り、Bが無限大のときの値が最も大きい。(iii)のQは、負値でピークを持ち、その近傍でのみカス効果が発著となる。

§4.2. 表面張力波の影響

$Nc = 0.1$, $Nq = 0$ の結果を $\alpha - Mr$ 図に示す。Fig. 9では溶質カスの効果は小さく、 Mr_c は(28)式で決定されるが、先の結果¹³⁾のパターン ($Mr_c = Mr, \alpha = 0 = 0$) に近い。Fig. 10では著しい変化がみられ、(i)は安定に、(ii)は不安定になる。又、 $B = 10$ (Fig. 11) では、Fig. 10と同様の傾向を示すが、溶質カスの影響は小さくなっている。Fig. 12は、 $MA > 0$ の場合で、 LMA が大きいと $\alpha = 1.8 \sim 2$ における極値が Mr_c となる。この安定曲線は極めて特異なパターンであり、 γ の値により、 Mr_c は、極値 $\leftrightarrow (Mr, \alpha = 0) \leftrightarrow 0$ という3つの構造を示す (Figs. 13, 14)。

尚、報告されている実験では、 $MA < 0$ であり、影響は小さいとされているが、遅い反応域でBとカップルして現われる特殊な機構であるだけに、更に検討する余地が残されているよう思われる。

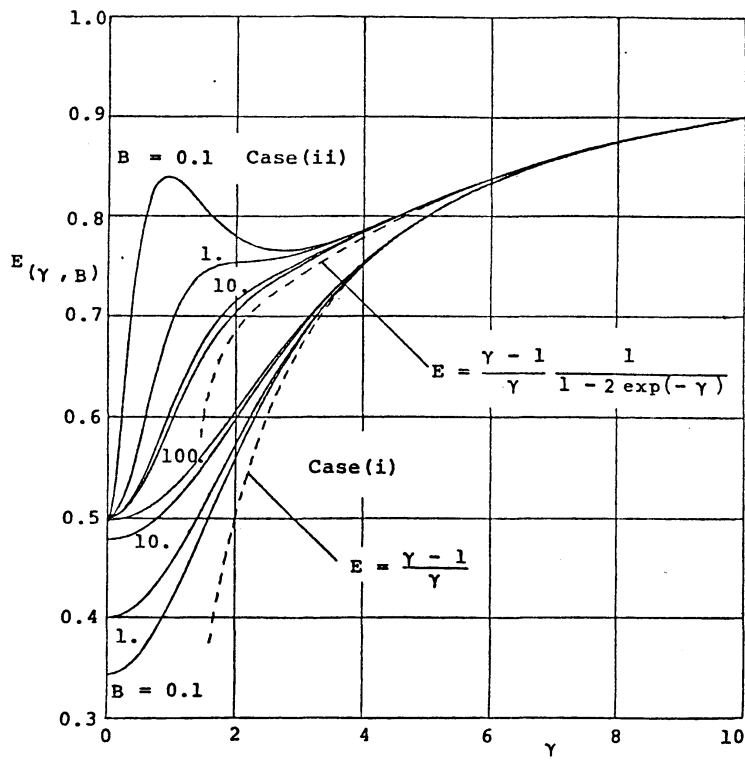


Fig.7

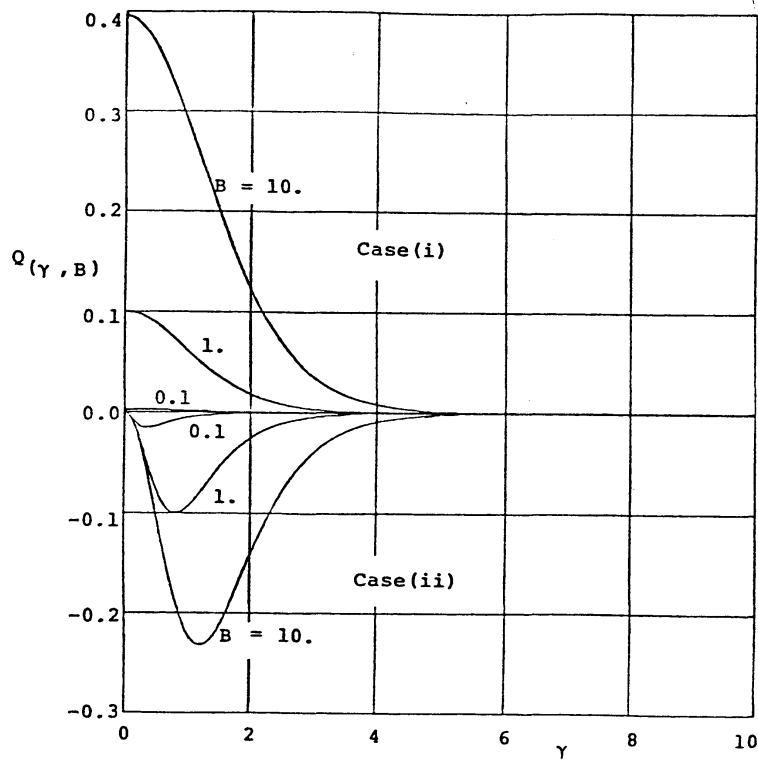
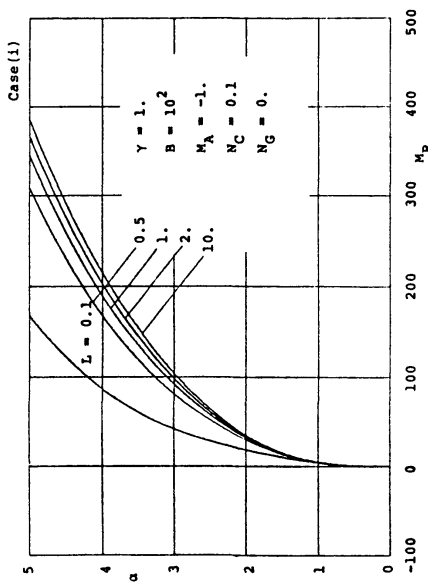
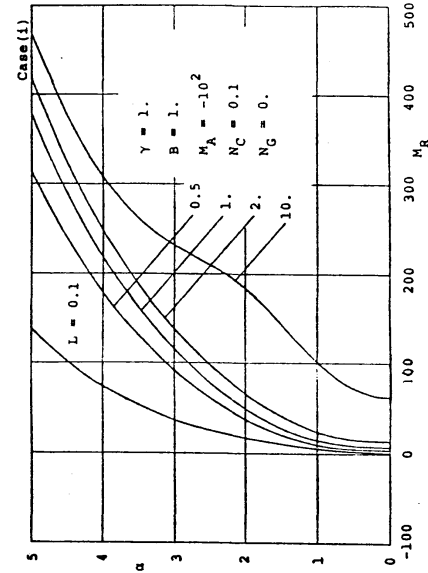
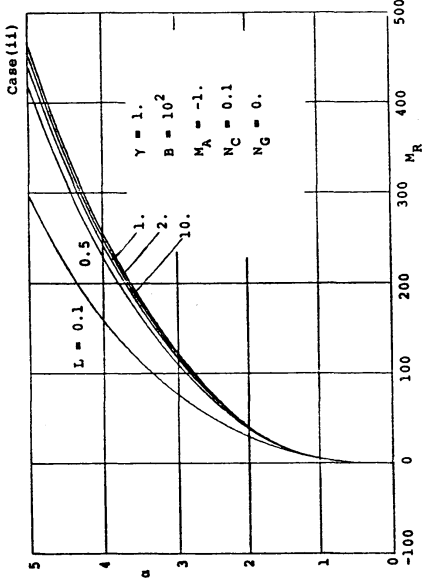
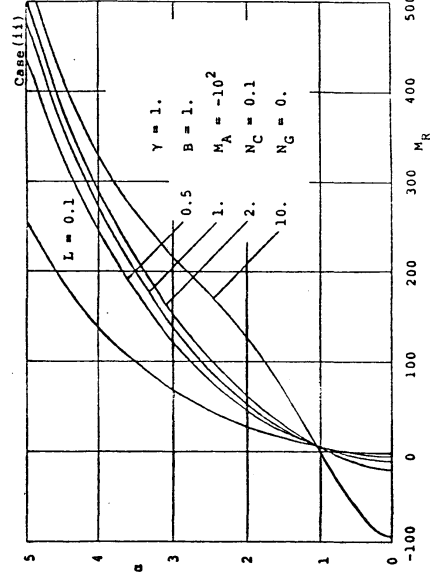


Fig.8



(a)

(a)

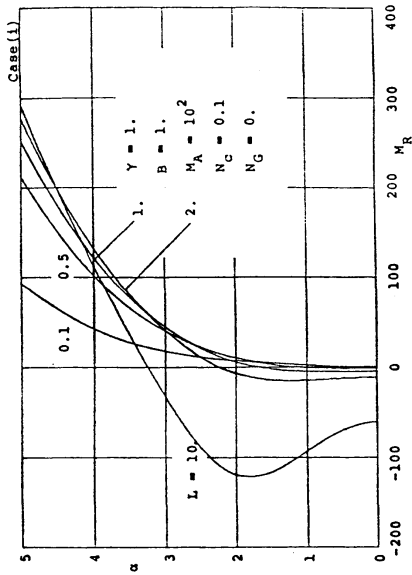


(b)

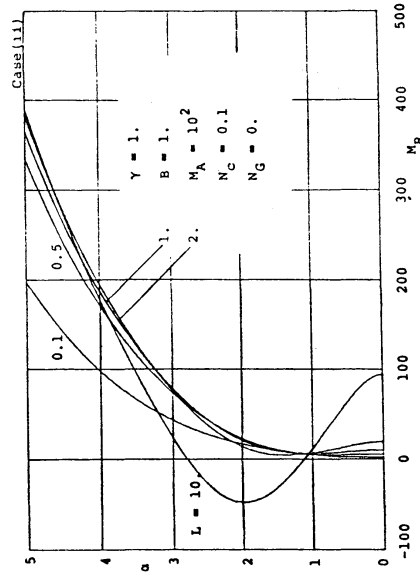
(b)

Fig. 10

Fig. 9

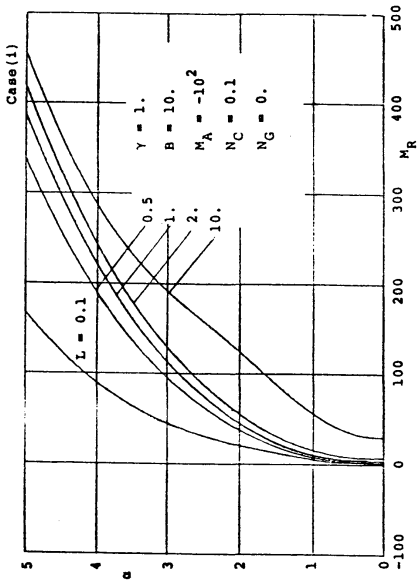


(a)

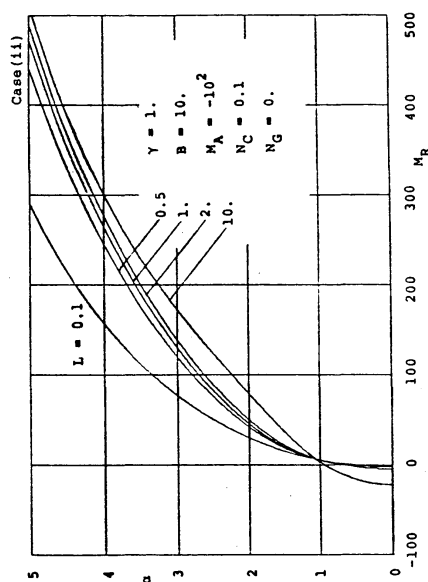


(b)

Fig.12

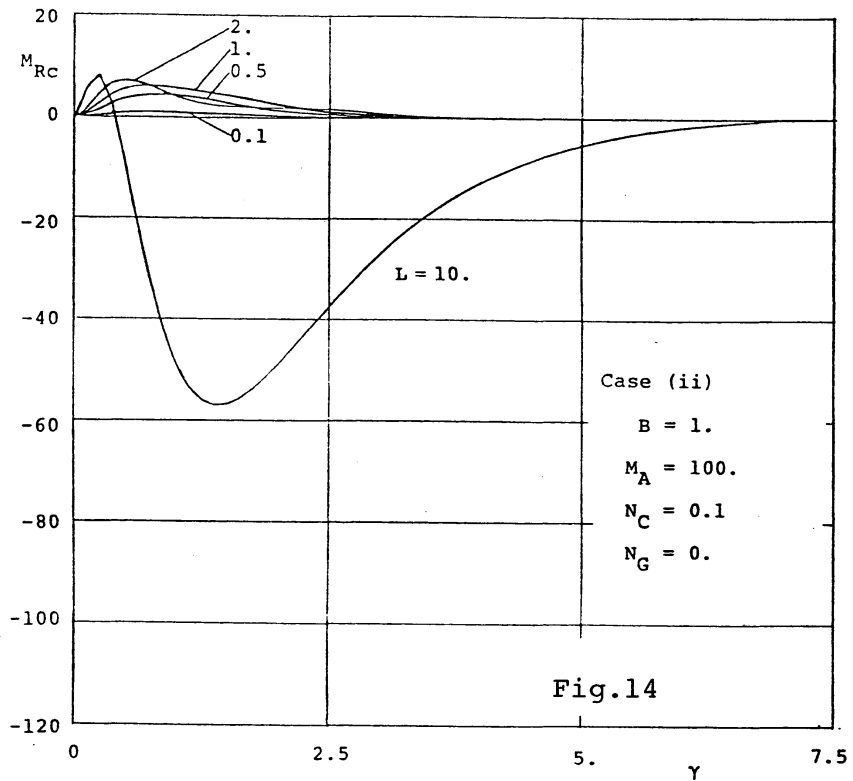
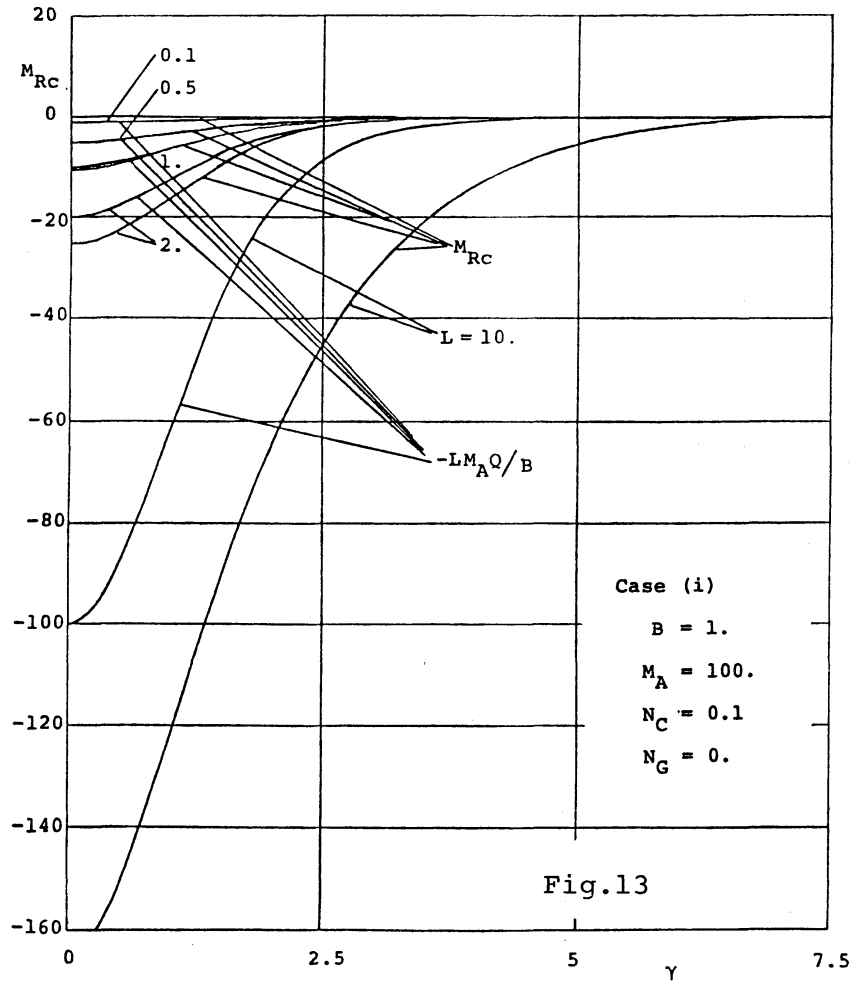


(a)



(b)

Fig.11

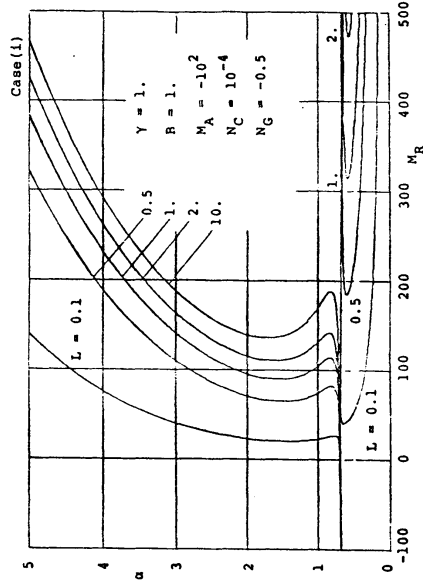


§4.3. 重力波 ($N_G \neq 0$) と表面張力波

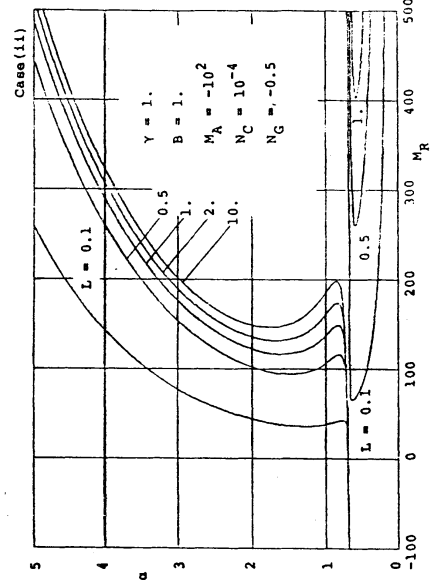
$N_G > 0$ のとき、 N_G/N_c が小さいと M_{rc} は (28) 式で与えられ、この値が大きくなると平滑表面の結果 (§3.2.) とほぼ一致する (Fig. 15)。又、 $N_G < 0$ (天井に付着した液層) では、 $M_{rc} \rightarrow -\infty$ となる (Fig. 16) が、詳しい議論は省略する。

§5. まとめ

先の解析¹³⁾を踏まえ、溶質ガスの気相側物質移動抵抗の影響 (Biot数) を考慮し、(a) 平滑表面、(b) 表面変形がある場合について、溶質ガスの固体壁条件の異なる2つ (Cases (i), (ii)) に対して検討した。その結果、(a) の場合、① 溶質ガスによる表面張力勾配の効果は、遅い反応でのみ現われ、溶質ガスの Marangoni 数 Ma が負の時、生成物による表面張力勾配の効果 を緩和し、正ならばその効果を強める。又、 Ma の影響は、複合パラメータ LMa/B によって推定される。(b) の場合には、攪乱 g , ν の位相がスレ、表面張力波については、② $Ma < 0$ のとき、生成物の臨界 Marangoni 数 M_{rc} は (28) 式が2項で与えられ、Case (i) では安定化、(ii) では不安定化 ($M_{rc} < 0$) する。③ $Ma > 0$ のとき、 M_{rc} は特異な極値構造によって決まる。④ 低波数域での重力波の効果は、(28) 式が1項で表われ、安定化 (逆転液層では不安定化) 作用を持つ、などが示された。

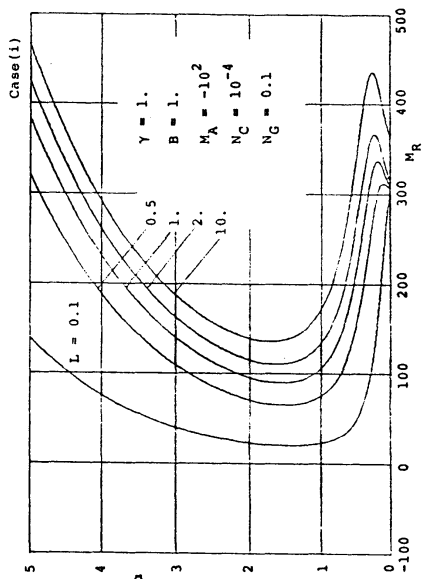


(a)

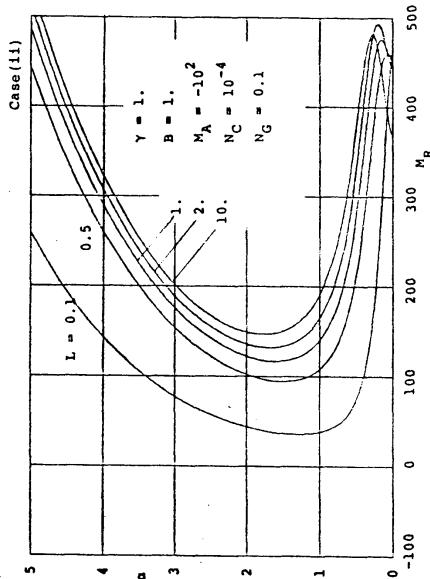


(b)

Fig.16



(a)



(b)

Fig.15

参考文献

- 1) P.L.T.Brian, J.E.Vivian and D.C.Matiatos: AIChE J. 13 (1967) 28.
- 2) 疋田晴夫, 浅井 悟, 日昔吉紀, 石原立憲: 化学工学 32 (1968) 278.
- 3) 疋田晴夫, 浅井 悟, 日昔吉紀: 化学工学 35 (1971) 1021.
- 4) J.R.A.Pearson: J.Fluid Mech. 4 (1958) 489.
- 5) C.V.Sternling and L.E.Scriven: AIChE J. 5 (1959) 514.
- 6) E.Ruckenstein and C.Berbente: Chem.Eng.Sci. 19 (1964) 329.
- 7) Y.T.Shah and A.Z.Szeri: Chem.Eng.Sci. 29 (1974) 2219.
- 8) Y.T.Shah and A.Z.Szeri: Chem.Eng.Sci. 31 (1976) 853.
- 9) 今石宜之, 藤縄勝彦: 化学工学論文集 4 (1978) 490.
- 10) L.E.Scriven and C.V.Sternling: J.Fluid Mech. 19 (1964) 321.
- 11) K.A.Smith: J.Fluid Mech. 24 (1966) 401.
- 12) R.W.Zeren and W.C.Reynolds: J.Fluid Mech. 53 (1972) 305.
- 13) 坂田光雄, 舟田敏雄: 「流体力学における非定常問題」研究会(1979)
教理解析研講究録(未刊)