数理解析研究所講究録
450巻 1982年 148-156

K3曲面の退化 I

名大 理　金銅誠之

§0. 2次元 compact 複素多様体が、1) $H^1(X, \mathcal{O}_X)=0$, 2) 標準束 K_X が自明、という2条件を満すとき、X を K3曲面と呼ぶ。K3曲面の退化の研究に関しては、Kulikov ([2],[4]) による、準安定K3曲面の分類がある。これに続く問題として、"K3曲面の周期の理論 (e.g. Burns - Rapoport. Ann. E. N. S. 8 (1975), 235-274.) を、退化曲面にまで拡げられるか。"が考えられる。ここでは、退化曲面の"周期"を扱うのに基本となる、退化曲面の変形について、Friedman の結果 ([1]) を紹介する。

§1. K3曲面の退化.

まず、Kulikov による次の結果がある。

<u>定理(1.1)</u> (Kulikov.) 複素多様体の固有的全射

$$\pi : \mathfrak{X} \to \Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

が次の条件を満すとする。

1.) $\pi : \mathfrak{X} \to \Delta$ は weakly kähler, $\mathfrak{X}$ は3次元複素多様体.

2.) $\pi' : \mathfrak{X}' = \pi^{-1}(\Delta^*) \longrightarrow \Delta^* = \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\} = \Delta \setminus \{0\}$ は滑らかで、$X_t = \pi^{-1}(t)$ $t \in \Delta^*$ は K3曲面.

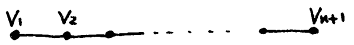
3) $X_0=\pi^{-1}(0)$ は被約、且、正規交叉

4) $K_{\mathfrak{X}}=\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

この時、X_0は次のいずれかになる。(Tは$H^2(X_t)$のモノドロミーとする。)

0) K3曲面. ($\Leftrightarrow T=I$)

I) $X_0=V_1+\cdots+V_{n+1}$. V_1, V_{n+1}は有理曲面. V_jは楕円線織面. ($2\le j\le n$). $D_{j,j+1}=V_j\cap V_{j+1}$は非特異楕円曲線. X_0のdual graphは



(但し. X_0のdual graphとは. 各component V_iを0-単体, double curveを1-単体, triple pointを2-単体とみたものとする。)

II.) $X_0=V_1+\cdots+V_n$, V_iは有理曲面, $1\le i\le n$. $D_{ij}=V_i\cap V_j$は非特異有理曲線. X_0のdual graphは. 球面S^2の三角形分割。

(1.1)の0)~II.)の退化曲面に関して次の事が成り立つ。

(1.2)補題. Xを(1.2)の0)~II.)のいずれかの退化曲面とする。

i) $\omega_X\simeq\mathcal{O}_X$, ω_Xはdualizing sheaf.

ii) $\mathcal{O}_D(X)\simeq\mathcal{O}_D$, DはXのdouble curve

が成り立つ。

(1.3)定義 曲面Xが. (1.1)の0)~II.)のいずれかのtypeであり、(1.2)のi), ii)を満すとき. Xを準安定K3曲面と呼ぶ。

以下ではI型の準安定K3曲面のみを扱う。この中で基本となるものは. 楕円線織面が現われないものである.

すなわち. $X = V_1 \underset{E}{\cup} V_2$. V_iは有理曲面. $E = V_1 \cap V_2$ は楕円曲線なる曲面である。

<u>定義(1.4)</u>. 準安定K3曲面(I型)の中で上の type のものを、I型安定K3曲面と呼ぶ。

安定K3曲面 $X = V_1 \underset{E}{\cup} V_2$ に対して. 補題(1.2)は次の様に書き直せる。

<u>(1.2.)' 補題</u>

i) $E_i \in |-K_{V_i}|$. E_iはEをV_i上の曲線と見なしたものとする。

ii) $\mathcal{N}_{E_1/V_1} \otimes \mathcal{N}_{E_2/V_2} \cong \mathcal{O}_E$.

§2. I型安定K3曲面の変形.

ここでは. I型安定K3曲面しか扱わないが. 同様の事が. I型準安定K3曲面に対しても成り立つことを、注意しておく。

compact複素解析空間の変形に関する一般論として、次の結果がある。

<u>(2.1) 定理</u> (Palamodov [3]) Xを. compact複素解析空間とする. この時、次の事が成り立つ。

1°) X上の coherent sheaf $\mathcal{T}_X^i$ $(i \geq 0)$ が存在し、$\mathcal{T}_X^* = \bigoplus_i \mathcal{T}_X^i$ は、次数つき Lie環の構造を持つ。

2°) スペクトル系列$\{E_r\}$で$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{T}_X^q)$なるものを考える。complex T_X^*を$\{E_r\} \Rightarrow T_X^*$ (極限)として定義する。この時、各T_X^iは有限次元 vector 空間であり、$\mathcal{T}_X^*$の Lie bracket より、T_X^*上に

次数付きLie環の構造が入る。

3°) T_X^1の原点の回りで定義されたholomorphic mapのgerm fが存在し，$f^{-1}(0)$は，Xのversal deformationとなる。

また，$f = f_2 + f_3 + \cdots + f_k + \cdots$を斉次多項式への展開とするとき，

$f_2(x) = \frac{1}{2}[x, x]$，$x \in T_X^1$である。（$[\ ,\ ]$は$T_X^*$のLie bracket.）

<u>(2.2) 注意</u>　$\mathcal{T}_X^0 = \mathrm{Der}(\mathcal{O}_X)$，$T_X^0 = H^0(X, \mathcal{T}_X^0)$である。また，$X$がsmoothの場合，$T_X^1 = H^1(X, \Theta_X)$，$\Theta_X$は接束のsection sheaf，である。

$\mathcal{T}_X^* \Rightarrow T_X^*$より，次の完全系列が存在する。

$$0 \to H^1(X, \mathcal{T}_X^0) \to T_X^1 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{T}_X^1) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{T}_X^0) \longrightarrow T_X^2 \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

ここでは，これ以上$\mathcal{T}_X^*$，T_X^*にはふれないことにする。

Xを安定K3曲面とする。この場合，上の$\mathcal{T}_X$，T_Xは具体的に計算できる：

<u>(2.3) 補題</u>　$X = X_1 \underset{E}{\cup} X_2$をI型安定K3曲面とすると，次が成り立つ。

1°) $\mathcal{T}_X^1 \cong \mathcal{N}_{E_1/X_1} \otimes \mathcal{N}_{E_2/X_2} = \mathcal{O}_E$.

2°) $H^2(\mathcal{T}_X^0) = 0$，従って，完全系列(*)において，$T_X^1 \longrightarrow H^0(\mathcal{T}_X^1)$は全射。

3°) $T_X^2 = H^1(\mathcal{T}_X^1) = H^1(\mathcal{O}_E)$．特に，$\dim T_X^2 = 1$.

4°) $H^1(\mathcal{T}_X^0)$の元は，すべて，unobstructed．i.e. $f|H^1(\mathcal{T}_X^0) \equiv 0$。

退化曲面の変形については次の3段階に分けて調べていく。

Step I. 曲面 X で $X=\bigcup X_i$, X_i は smooth, X_i と X_j は正規交叉しているものを考える。この時、

$$\mathcal{T}_X^0 \otimes \mathcal{T}_X^1 \xrightarrow{[\ ,\ ]} \mathcal{T}_X^1 \text{ は全射である。}$$

Step II. $\mathcal{T}_X^0 \otimes \mathcal{T}_X^1 \longrightarrow \mathcal{T}_X^1$ より、写像 $\varphi: H^1(\mathcal{T}_X^0) \otimes H^0(\mathcal{T}_X^1) \longrightarrow H^1(\mathcal{T}_X^1)$ が引き起こされるが、X が、ある"条件"を満す時、φ は全射となる。

Step III. X を I 型安定 K3 曲面とするとき、上の φ は全射となるが、φ の全射性が、X の versal deformation space を決定する。

Step I は、今の場合、bracket $[\ ,\ ]: \mathcal{T}_X^0 \otimes \mathcal{T}_X^1 \to \mathcal{T}_X^1$ が具体的に計算でき、それによって全射であることが解る。

まず、Step III を述べ、その後で、Step II の ある"条件"についてふれることにする。

Step III. 退化曲面の変形に関する Friedman の結果は次の通りである。

定理 (2.4) (Friedman ([1])) X を I 型安定 K3 曲面とする。

i) $H^1(\mathcal{T}_X^0) \otimes H^0(\mathcal{T}_X^1) \xrightarrow{\varphi} H^1(\mathcal{T}_X^1) = T_X^2$ は全射である。

ii) X の versal deformation space の base space を V とすると、

① $V = V_1 \cup V_2$, V_i は smooth, $\dim V_i = 20$, $i=1,2$ で V_1 と V_2 は transversal に交わっている。

② V_1 は X の local trivial な deformation に対応している。

③ $V_2 \setminus V_1$ の点に対応する曲面は非特異 K3 曲面である。

④ $V_1 \cap V_2$ の点に対応する曲面は I 型安定 K3 曲面である。

⑤ $V_1 \setminus V_2$ の点に対応する曲面は、X と同相であるが、$N_{E_1/X_1} \otimes N_{E_2/X_2} \neq \mathcal{O}_E$ となっている。

証明）ⅰ）に関しては後述。

ⅱ）$V_1 = H^1(\mathcal{J}_X^0) \subset T_X^1$ とする。V_1 は T_X^1 の超曲面であるから、T_X^1 の座標を $(z_1, z_2, \cdots)$ とするとき $V_1 = (z_1 = 0)$ としてよい。補題(2.3)の 2°) により $e \in T_X^1$ で $T_X^1 \ni e \longrightarrow 1 \in H^0(\mathcal{J}_X^1)$ となるものが存在する。更に、$\frac{1}{2}[e, e] = 0$ と出来る。実際、$H^1(\mathcal{J}_X^0) \otimes H^0(\mathcal{J}_X^1) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_X^1)$ の全射性より、適当な $x \in H^1(\mathcal{J}_X^0)$ を選び、e を $e + x$ で置き換えることにより、$H^0(\mathcal{J}_X^1)$ を generate する条件は保ったまま $\frac{1}{2}[e, e] = 0$ と出来る。

今、$W_2 = \{ v \in T_X^1 \mid [v, e] = 0 \}$ とする。$V_1 \cap W_2 = \{ v \in V_1 \mid [v, e] = 0 \}$ である。定理(2.1)で述べた様に、holomorphic map.

$f : T_X^1 \longrightarrow T_X^2$ が存在して、$f^{-1}(0)$ が、X の versal deformation の base space を定めていた。今の場合、$\dim T_X^2 = 1$ に注意する。（補題(2.3)の 3°）。

補題(2.3)の 4° より、$z_1 | f$，すなわち、$f = z_1(\ell + \text{higher order})$，$\ell$ は線形関数、と書ける。

特に、定理(2.1) 3° より、$\frac{1}{2}[v, v] = z_1 \cdot \ell(v)$，$v \in T_X^1$ であった。

$\frac{1}{2}[e, e] = 0$ より、$\ell(e) = 0$ である。$x \in V_1$ に対して、

$[x, e] = \frac{1}{2}[x + e, x + e] = \frac{1}{2} z_1 \cdot \ell(x + e)$ であるが、$H^1(\mathcal{J}_X^0) \otimes H^0(\mathcal{J}_X^1) \to H^1(\mathcal{J}_X^1)$ が全射であったことに注意すると、ℓ は non-trivial な線形関数であることが従う。また次元を比較することにより $W_2 = \mathrm{Ker}\, \ell$

が解る。$V_2=\{x\in T_X^1 \mid z_1^{-1}f(x)=0\}$ とすると、上述の事、及び、$e\in W_2\setminus V_1$ であったことより、$f^{-1}(0)=V_1\cup V_2$, V_2 は原点 $0\in T_X^1$ の回りで smooth, V_1 と V_2 は transversal に交わっていることが従う。

$V_2\setminus V_1$ の点に対応する曲面が非特異K3曲面であることは、smoothing を考えれば、簡単に解る。ここで smoothing の存在を、保証するのが、次の命題である。

<u>(2.5) 命題</u>　X を準安定K3曲面、$\pi:\mathcal{X}\to\Delta$ を X の変形とする。$\theta\in T_X^1$ を、π に対応する class で、θ は $H^0(\mathcal{T}_X^1)$ を生成していると仮定する。このとき、$\mathcal{X}$ は X の近傍で smooth である。

<u>(2.6) 注意</u>　上の証明において、$V_1\cap V_2=\{x\in V_1 \mid [x,e]=0\}$ であった。$[x,e]\in H^1(T_X^1)=H^1(\mathcal{O}_E)$ であるが、$[x,e]=0$ であることと、$N_{E/X_1}\otimes N_{E/X_2}$ が自明束であることとが、ちょうど対応している。

最後に Step II についてふれることにする。

<u>(2.7) 定義</u>　曲面 X で $X=\bigcup X_i$, X_i は smooth, X_i と X_j は正規交叉、しているものを考える。X が次の条件を満すとき、X を cohomologically Kähler な曲面と呼ぶ。

(条件). cohomology class $\omega\in \mathrm{Ker}\left(\oplus H^2(X_i,\mathbb{R})\to\oplus H^2(X_i\cap X_j,\mathbb{R})\right)$ で $\omega|H^2(X_i,\mathbb{R})$ は X_i の Kähler metric より induce される (1,1)-form の cohomology class となっているものが存在する。

X を I 型準安定 K3 曲面とするとき、X が cohomologically Kähler であることは明らかである。

<u>(2.8) 定理</u>　X を準安定 K3 曲面で X は cohomologically Kähler とする。このとき $\varphi: H^1(\mathcal{J}_X^0) \otimes H^0(\mathcal{J}_X^1) \to H^1(\mathcal{J}_X^1)$ は全射である。

X の cohomologically Kählerness と φ が全射であることとの関係は、およそ以下の通りである。

ξ を $H^0(\mathcal{J}_X^1)$ の生成元とする。X 上の coherent sheaf $\mathcal{F}_X$ を

$$0 \to \mathcal{F}_X \to \mathcal{J}_X^0 \xrightarrow{[\xi]} \mathcal{J}_X^1 \to 0$$

によって定義する。$H^2(\mathcal{F}_X) = 0$ が示されれば φ の全射性が従う。Serre 双対律より、$H^2(\mathcal{F}_X) \cong H^0(\check{\mathcal{F}}_X)$ （$\check{\mathcal{F}}_X$ は $\mathcal{F}_X$ の dual）である。

他方、$i: \tilde{X} \to X$ を、X の正規化とし、complex $i_* \Omega^*_{\tilde{X}}(\log \tilde{E})$ を考える。但し、E を X の double curve とするとき、$\tilde{E}$ は i による E の逆像とする。また $\Omega^*_{\tilde{X}}(\log \tilde{E})$ は log complex とする。

$i_*\Omega^*_{\tilde{X}}(\log \tilde{E})$ の subcomplex Λ_X^* で、X が退化 $\pi: \mathfrak{X} \to \Delta$ の退化曲面として現われている場合 (i.e. $\pi^{-1}(0) = X$)、$\Lambda_X^* = \Omega^*_{\mathfrak{X}/\Delta}(\log X)|X$ なるものが存在する。(ここで $\Omega^*_{\mathfrak{X}/\Delta}(\log X)$ は relative log complex.)

この時、次の事が成り立つ。

<u>(2.9) 定理</u> $\check{\mathcal{F}}_X \cong \Lambda_X^1$.

他方、cohomologically Kähler という条件から、complex $\Lambda_X^\cdot$ に対しても、

Hard Lefschetz型の定理が成り立つことが、通常のそれを用いて示される。特に、Hodge symmetry $\dim H^p(\Lambda_X^q) = \dim H^q(\Lambda_X^p)$ も、成立する。これより、

$$\dim H^2(\mathfrak{F}_X) = \dim H^0(\check{\mathfrak{F}}_X) = \dim H^0(\Lambda_X^1) = \dim H^1(\Theta_X) = 0$$ となり、

$H^0(\mathfrak{F}_X)=0$ が従う。（準安定K3曲面 X に対し、$H^1(X,\Theta_X)=0$ が成り立つことに注意。）

以上でFriedmanの論文の紹介を終るが、II型の退化K3曲面に対して、それがcohomologically Kählerか、否かは一つの問題であろうと思われる。

参考文献

[1] R.D. Friedman, "Hodge theory, Degenerations, and the Global Torelli Problem." Thesis (Harvard 1981.)

[2] Kulikov, V, "Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces." Math. USSR Izv. 11 (1977), 957–989.

[3] Palamodov, V, "Deformations of complex spaces." Russian Math. Surveys 31 (1976), 129–197.

[4] Persson, U and H. Pinkham, "Degenerations of surfaces with trivial canonical bundle." Ann. Math. 113 (1981), 45–66.