

函数解析から見た Littlewood - Paley 理論

筑波大学数理学部 村松寿延

序. Littlewood と Paley が \mathbb{R}^n 上の函数について導入した g -function の類似物として, E.M. Stein [5] は \mathbb{R}^n 上の函数について,

$$(1) \quad g(f)(x) = \left\{ \int_0^\infty |\operatorname{grad}_x u(t, x)|^2 t \, dt \right\}^{1/2}$$

と定義してゐる. たゞし,

$$(2) \quad u(t, x) = \int P(t, x-y) f(y) \, dy$$

$$(3) \quad P(t, x) = \frac{c_n t}{(|x|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}, \quad c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}}$$

である. g -function についての Littlewood - Paley 理論とは次の定理のことである:

定理 $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ のとき

$$(4) \quad \begin{aligned} C_p \|g(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C'_p \|g(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

が成立する。

このように、これまでの研究では g -function が中心であって $u(t, x)$ はそのための補助のように見なされている。しかし、われわれの見地からは $u(t, x)$ の方が本質的である。すなわち定理の前半を対応 $f \rightarrow t \operatorname{grad}_x u$ かつ、 $L_p(\mathbb{R}^n)$ から $L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ への有界作用素であると読み、後半を f かつ $t \operatorname{grad}_x u$ により“積分表示され”て、それから $L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ から $L_p(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素になることと解釈できるのである。

ただし、 X が Banach 空間のとき測度空間 (Ω, μ) 上の強可測で p 乗可積分な函数の全体を $L_p(\Omega, \mu; X)$ と書く。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (n 次元ユークリッド空間) で μ が Lebesgue 測度のときは μ を省き、 $\mathbb{R}_+ = \{t > 0\}$ またはこの部分集合で測度 dt/t をとるときは L_p^* であり、 $X = \mathbb{C}$ のときは X を省く。

われわれの定式化が有効である理由は

第一に、 $u(t, x)$ は函数 f の正則化で t は近似の程度を示すパラメーターであるというは、きつとに意味があるが、 g -function には意味がつけにくい。

第二に 対応 $f \rightarrow t \operatorname{grad}_x u$ および $t \operatorname{grad}_x u$ による f の積分表示は線型である しかもある意味では

積分作用素である。一方 $f \mapsto g(f)$ は線型でなく
て、いわゆる *sublinear* である。作用素は補間など種
々の事項について線型の方がずっとやさしい。

実際、後で示すように、われわれの方法で定理を真に見通
しよく証明することが出来る。 *g-function* の難点はなん
といっても *g-function* での f を表示できない所にあ
る。したがって定理の後半の証明がかなりめんどうになる。

また、積分核が Laplace 方程式、あるいは Cauchy-
Riemann 方程式を満たしている本質的でないことがわ
かる。したがってわれわれはこの意味での Littlewood-
Paley 理論を円錐性をもつ \mathbb{R}^n の領域の場合に拡張する
ことが出来る。

"正則化" は函数および超函数の L_p 空間での微分可能
性の理論、いわゆる Sobolev 空間論と Besov 空間論でも
中心的な役割を荷っていたのである。

§ 1. Fourier 級数に関する Littlewood-Paley
の *g-function* について。

上記についてはよく知られているが、原論文から定義と抜
き出し、われわれの方法が適用できることを示そう。

f が円周 \mathbb{T} 上可積分な実数値函数のとき

$$(1) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

と定める. 簡単のため $c_0 = 0$ を仮定する.

$$(2) \quad \phi(z) = 2 \sum_1^{\infty} c_n z^n \quad (z = \rho e^{i\theta}),$$

$$(3) \quad g(\theta) = \left(\int_0^1 (1-\rho) |\phi'(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho \right)^{1/2}$$

(ϕ' は導函数を示す)

と定義する. この論文 [2] の定理 7 が序の定理に対応しているのである. 計算すればわかるように, $t = 1-\rho$ とおくと,

$$(4) \quad \phi'(\rho e^{i\theta})(1-\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t, \theta, \theta') f(\theta') d\theta',$$

$$(5) \quad K(t, \theta, \theta') = \frac{2t e^{-i\theta'}}{\{1 - (1-t) e^{i(\theta-\theta')}\}^2},$$

となる. 不等式

$$\|g\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p}$$

は, 対応, $f(\theta) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t, \theta-\theta') f(\theta') d\theta'$
 が $L_p(\mathbb{T})$ から $L_p(\mathbb{T}, L_2^*(0,1))$ への有界作用素であることと解釈できる. (\mathbb{T} は 1 次元トーラス).

$p = 2$ の場合は Parseval の等式によりすぐわかる.
 すなわち,

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1-\rho) |\phi(\rho e^{i\theta})|^2 d\rho d\theta \\
&= 4 \int_0^1 (1-\rho) d\rho \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_1^{\infty} n c_n \rho^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right|^2 d\theta \\
&= 4 \int_0^1 \sum_1^{\infty} n^2 \rho^{2n-2} (1-\rho) |c_n|^2 d\rho = \sum_1^{\infty} \frac{4n^2}{2n(2n-1)} |c_n|^2
\end{aligned}$$

で、右辺は $\sum_1^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|_{L_2(\mathbb{T})}^2$ と同値である。

一般の p については、 $p=2$ の結果と後で述べる積分作用素の L_p 有界性についての定理 (定理 4) を使えばよい。そこで積分核についての条件をたぬ。

$$\frac{\partial K}{\partial \theta}(t, \theta, \theta') = \frac{-2ti e^{-i\theta'} \{1 + (1-t)e^{i(\theta-\theta')}\}}{\{1 - (1-t)e^{i(\theta-\theta')}\}^3}$$

である。したがって、 $s = \left| \sin \frac{\theta-\theta'}{2} \right|$ とおくと、

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| \frac{\partial K(t, \theta, \theta')}{\partial \theta} \right|^2 \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^1 \frac{t |t^2 - 4(1-t)s^2|^2}{\{t^2 + 4(1-t)s^2\}^3} dt \leq \frac{C}{s^4}
\end{aligned}$$

また、

$$\frac{\partial K}{\partial \theta}(t, \theta, \theta') = \frac{2ite^{-i\theta'} (1-\theta) e^{i(\theta-\theta')}}{\{1 - (1-t)e^{i(\theta-\theta')}\}^3}$$

$$\int \left| \frac{\partial K}{\partial \theta}(t, \theta, \theta') \right|^2 \frac{dt}{t} \leq C \left\{ \sin \frac{\theta-\theta'}{2} \right\}^{-4}$$

である。よって定理4が使えるのである。

不等式:

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T})} \leq C \|g\|_{L_p(\mathbb{T})}$$

は“積分表示”, L_2 有界性と定理4によりわかる。

まず円周の場合の Poisson核を

$$(6) \quad P(\rho, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}$$

とおく。Dirichlet問題の解の一意性により,

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\rho_1, \theta - \theta') P(\rho_2, \theta') d\theta' \\ = P(\rho_1 \rho_2, \theta)$$

である。これは直接計算してもわかる。序と同様に,

$$(8) \quad u(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(1-t, \theta - \theta') f(\theta') d\theta'$$

とおくと, $t \rightarrow 0$ のとき $u(t, \theta) \rightarrow f(\theta)$ である。

(f については適宜に仮定をおく。あるいは, 収束の意味を適宜に考えるとよい)。仮定より $u(1, \theta) = 0$ であるから, 部分積分により,

$$(9) \quad f(\theta) = \int_0^1 t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u(2t - t^2, \theta)\} dt$$

を得る。これに, (7), (8), および部分積分と

$$(10) \rho \frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \frac{\partial Q(\rho, \theta)}{\partial \theta}, \quad \rho \frac{\partial Q(\rho, \theta)}{\partial \rho} = -\frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial \theta},$$

(Cauchy-Riemann方程式)

$$(11) Q(\rho, \theta) = \frac{2\rho \sin \theta}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2},$$

を使うと、積分表示式

$$(12) f(\theta) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t P_1(1-t, \theta - \theta') u_1(t, \theta') d\theta' \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \tilde{Q}(1-t, \theta - \theta') v_1(t, \theta') d\theta' \right\}$$

$$(13) u_1(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t P_1(1-t, \theta - \theta') f(\theta') d\theta',$$

$$P_1(\rho, \theta) = \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho, \theta),$$

$$(14) v_1(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t Q_1(1-t, \theta - \theta') f(\theta') d\theta',$$

$$Q_1(\rho, \theta) = \frac{\partial Q}{\partial \rho}(\rho, \theta)$$

$$(15) \tilde{Q}(\rho, \theta) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho Q(\rho, \theta) \},$$

を得る.

$$P_1(\rho, \theta) = \operatorname{Re} \frac{2e^{i\theta}}{\{1 - \rho e^{i\theta}\}^2}, \quad Q_1(\rho, \theta) = \operatorname{Im} \frac{2e^{i\theta}}{\{1 - \rho e^{i\theta}\}^2}$$

であるから,

$$t^2 |\phi'((1-t)e^{i\theta})|^2 = u_1(t, \theta)^2 + v_1(t, \theta)^2$$

である。したがって、不等式 (4) の後半は作用素

$$w(t, x) \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{-\pi}^{\pi} t P_1(1-t, \theta - \theta') w(t, \theta') d\theta'$$

$$w(t, x) \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{-\pi}^{\pi} t \tilde{Q}(1-t, \theta - \theta') w(t, \theta') d\theta'$$

が $L_p(\mathbb{T}; L_2^*(0, 1))$ から $L_p(\mathbb{T})$ への有界作用素であることからわかる。 $p=2$ のときは Parseval の等式により、 $1 < p < \infty$ のときは、 $p=2$ の結果と

$$\int_0^1 \left| t \frac{\partial P_1(1-t, \theta)}{\partial \theta} \right|^2 \frac{dt}{t} \leq \frac{C}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

$$\int_0^1 \left| t \frac{\partial \tilde{Q}(1-t, \theta)}{\partial \theta} \right|^2 \frac{dt}{t} \leq \frac{C}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

を使い、定理 4 を適用すればわかる。

§ 2. E.M. Stein の g -function の場合.

序のように $u(t, x)$ を定義すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) = \int P_j(t, x-y) f(y) dy, \quad P_j(t, x) = \frac{\partial P(t, x)}{\partial x_j}$$

であるから、不等式 $\|g(f)\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p}$ は作用素

$$(1) \quad f \mapsto \int t P_j(t, x-y) f(y) dy \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

が $L_p(\mathbb{R}^n)$ から $L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ への有界作用素である
 ことと同値である。 $p=2$ のときは Parseval の等式によ
 りわかる。 すなわち、 $P(t, x)$ の Fourier 変換は

$$(2) \quad \hat{P}(t, \xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|\xi|t}$$

であり、したがって $t P_j(t, x)$ の Fourier 変換は
 $-(2\pi)^{-n/2} i t \xi_j e^{-|\xi|t}$ であり、ゆえに、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int \left| \int t P_j(t, x-y) f(y) dy \right|^2 dx \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int \left| i t \xi_j e^{-|\xi|t} \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq C \|f\|_{L_2}^2, \quad C = \int_0^\infty t e^{-2t} dt = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

ただし、 \hat{f} は f の Fourier 変換;

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$$

である。 $p=2$ のときの結果と

$$(3) \quad \frac{\partial P_j(t, x)}{\partial x_j} = -(n+1) C_n \left\{ \frac{t}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n+3}{2}}} - \frac{(n+3) x_j^2 t}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n+5}{2}}} \right\}$$

$$(4) \quad \frac{\partial P_j(t, x)}{\partial x_k} = \frac{(n+1)(n+3) x_j x_k t}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n+5}{2}}}, \quad (k \neq j)$$

からわかる評価式

$$(3) \quad \left(\int \left| t \operatorname{grad}_x P_j(t, x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}$$

と定理4により $1 < p < \infty$ の場合がわかる.

序の(4)の後半は \mathbb{R}^1 と同様に積分表示と同じ方法でわかる. $t \rightarrow 0$ のとき $u(t, x) \rightarrow f(x)$ であるから, 部分積分により,

$$(5) \quad f(x) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty t^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \{u(2t, x)\} dt$$

がわかる.

$$(6) \quad \frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = \frac{c_n (|x|^2 - nt^2)}{(|x|^2 + t^2)^{(n+3)/2}},$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(x, t) = \frac{c_n(n+1)t(-3|x|^2 + nt^2)}{(|x|^2 + t^2)^{(n+5)/2}}$$

より, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ については

$$|t^j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t, x)| \leq C_j t^{-(p'-1)n} \|f\|_{L_p}$$

が成立するからである.

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

Poisson核の性質

$$(8) \quad P(t_1 + t_2, x) = \int P(t_1, x-y)P(t_2, y) dy$$

により

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} P(2t, x) = \int P_{ttt}(t, x-y)P(t, y) dy$$

(この式は <)

$$\begin{aligned}
 &+ 3 \int P_{tt}(t, x-y) P_t(y) dy \\
 &+ 3 \int P_t(t, x-y) P_{tt}(y) dy \\
 &+ \int P(t, x-y) P_{ttt}(y) dy
 \end{aligned}$$

$$P_t = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad P_{tt} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad P_{ttt} = \frac{\partial^3 P}{\partial t^3}$$

∴ 4n, Laplace 方程式

$$(9) \quad \frac{\partial^2 P(t, x)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P(t, x)}{\partial x_j^2} = 0$$

と部分積分を用くと, 積分表示

$$(10) \quad f(x) = 4 \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int t^2 P_{tj}(t, x-y) u_j(t, y) dy$$

を得る. $t > 0$,

$$(11) \quad u_j(t, x) = t \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_j}$$

$$(12) \quad P_{tj}(t, x) = \frac{\partial^2 P(t, x)}{\partial x_j \partial t}$$

$$= \frac{-c_n(n+1) \{ |x|^2 - (n+2)t^2 \} x_j}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n+5}{2}}}$$

である. P_{tj} の Fourier 変換は $-(2\pi)^{-n/2} i \xi_j |\xi| e^{-|\xi|t}$ であること, および

$$\left(\int_0^\infty |t^2 \operatorname{grad}_x P_{tj}(t, x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}$$

を使えば Parseval の等式と定理4により 作用素

$$(13) \quad v(t, x) \mapsto \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int t^2 P_{tj}(t, x-y) v(t, y) dy$$

が $L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ から $L_p(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素であることがわかる. 積分表示(10)と組合せて序の不等式(4)の後半が得られる.

附記. §1では Cauchy-Riemann 方程式, §2では Laplace 方程式が使われているが, それらは積分表示を得るための手段であって, 重要なのは積分表示であることを強調しておく.

§3. 分解定理

Calderón-Zygmund の分解定理を L_p 有界性定理の証明に使うのでここに述べておく. トーラスの場合も考える. $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ ($-\pi$ と π を同一視する).

定理 1. (a) f を \mathbb{R}^n 上の非負値可積分函数, $\lambda > 0$ とすると, 次のような立方体の列 $\{Q_j\}_{j=1,2,\dots}$ が存在する:

$$(1) \quad f(x) \leq \lambda \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\}$$

$$(2) \quad Q_j^\circ \cap Q_k^\circ = \emptyset \quad (j \neq k), \quad (Q_j^\circ \text{ は } Q_j \text{ の内部})$$

$$(3) \quad \lambda < \frac{1}{\text{meas}(Q_j)} \int_{Q_j} f(x) dx \leq 2^n \lambda \quad (j=1,2,\dots)$$

($\text{meas } Q$ は Q の測度)

(b) f を \mathbb{I}^n 上の非負値可積分函数とし, $\lambda > 0$ とすると,

$$(4) \quad \frac{1}{\text{meas}(\mathbb{I}^n)} \int_{\mathbb{I}^n} f(x) dx > \lambda$$

または \mathbb{I}^n 内の立方体の列 $\{Q_j\}_{j=1,2,\dots}$ で, (1), (2), (3) (ただし, (4) は $f(x) \leq \lambda$ a.e. $x \in \mathbb{I}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$) を満たすものが存在する.

証明. (a) はたとえば [5] p17~18 にある.

(b) の証. (4) が成立しないとする. \mathbb{I}^n を 2^n 個の立方体に分割し,

$$(5) \quad \frac{1}{\text{meas}(Q)} \int_Q f(x) dx > \lambda$$

を満たすものを Q_1, \dots, Q_k とする. 作り方から (3) が成立する. 上の不等式の成立しない立方体をそれぞれ 2^n 等分し, (5) の成立するものを Q_{k+1}, \dots, Q_{k+l} とする. 以下同様な操作を繰り返して, Q_1, Q_2, \dots を作る. 作り方から (2) と (3) が成立することからわかる. (1) を示そう. $x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ とする. $\{Q_j\}$ の選び方により, 各 $k=1, 2, \dots$ に 2^{k-1} 個か 2^k 個の立方体 Q'_k が存在して,

$$\frac{1}{\text{meas} Q'_k} \int_{Q'_k} f(y) dy \leq \lambda$$

となる. Lebesgue の微分定理により, a.e. $x \in \mathbb{I}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$

$f(x) \equiv \lambda$ がわかる.

証明終.

§ 4. ある L_p 有界性定理.

われわれの議論の中心となる定理を示す. これは分解定理と Marcinkiewicz の補補定理により証明できる.

定理 2. X, Y を Banach 空間, $Q = \{x; |x_j| \leq 1, (j=1, \dots, n)\}$ を \mathbb{R}^n の立方体とする. $\mathcal{L}(X, Y)$ で X から Y への線形有界作用素の全体を示す.

(a) $H(x, x')$ を $(x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の $\mathcal{L}(X, Y)$ -値強可測函数とし, 作用素 T を

$$(1) \quad T: f \mapsto \int H(x, x') f(x') dx'$$

と定義する. $1 < r \leq \infty$ とし,

(i) T は $L_r(\mathbb{R}^n; X)$ から $L_r(\mathbb{R}^n; Y)$ への有界作用素であって,

(ii) $H(x, x')$ は $x \neq x'$ のとき x' について微分可能であって,

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \text{ess. sup}_{b>0, x'} \int_{\mathbb{R}^n \setminus (x'+b\theta)} \left\| \frac{\partial H}{\partial x'_j}(x, x') \right\|_{\mathcal{L}(X, Y)} dx = \gamma < \infty$$

とする. このとき $1 < p < r$ について T は $L_p(\mathbb{R}^n; X)$ から $L_p(\mathbb{R}^n; Y)$ への有界作用素である.

(6) $J(y) = (e^{iy_1}, \dots, e^{iy_n}) \in \mathbb{R}^n$ から \mathbb{T}^n への射影とする。

$H(x, x')$ を $(x, x') \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ の $\mathcal{L}(X, Y)$ -値可測函数とし, (1) により 作用素 T を定義する. $1 < r \leq \infty$ とし,

(i) T は $L_r(\mathbb{T}^n; X)$ から $L_r(\mathbb{T}^n; Y)$ への有界作用素であり,

(ii) $x \neq x'$ のとき $H(x, x')$ は x' について微分可能,

$$(3) \sum_{j=1}^n \operatorname{ess. sup}_{b>0, y' \in \mathbb{R}^n} b \cdot \int_{\mathbb{T}^n \setminus J(y'+bQ)} \left\| \frac{\partial H}{\partial x'_j}(x, J(y')) \right\|_{\mathcal{L}(X, Y)} dx = \gamma < \infty,$$

とする. このとき $1 < p < r$ について T は $L_p(\mathbb{T}^n; X)$ から $L_p(\mathbb{T}^n; Y)$ への有界作用素である.

証明. T が weak type $(1, 1)$ となることと云えば Marcinkiewicz の補向定理 (たとえば [5]

p. 21. これが Banach 空間値の場合に拡張できることは容易にわかる) により結論を得る. $r < \infty$ だけ考える.

(a) の証. $f \in L_1(\mathbb{R}^n; X)$ とする. $\|f(x)\|_X$ に分解定理を適用する. $\lambda > 0$ とすると, 定理 1 の条件 (3.1), (3.2), (3.3) を満たす立方体の列 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ がとれる. $F = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ とおく. $x \in F$ のとき $f_0(x) = f(x)$, $x \in Q_k^o$ のとき

$$f_0(x) = \frac{1}{\text{meas}(Q_k)} \int_{Q_k} f(y) dy$$

と定め, $f_1 = f - f_0$ とおく. また, $x \in Q_k^0$ のとき

$$g_k(x) = f(x) - \frac{1}{\text{meas}(Q_k)} \int_{Q_k} f(y) dy,$$

その他で $g_k(x) = 0$ として g_k を定める.

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} g_k, \quad \int g_k(x) dx = 0$$

である. また

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|f_0(x)\|_X^r dx &\leq \int_F \|f(x)\|_X \cdot \lambda^{r-1} dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} \frac{dx}{\text{meas}(Q_k)} \int_{Q_k} \|f(y)\|_X dy \cdot (2^n \lambda)^{r-1} \\ &\leq (2^n \lambda)^{r-1} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n; X)} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \text{meas} \{x; \|Tf_0(x)\|_Y > \lambda/2\} &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^r \|Tf_0\|_{L_r(\mathbb{R}^n; Y)}^r \\ &\leq \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{r+n(r-1)} \frac{\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n; X)}^r}{\lambda}. \end{aligned}$$

次に $\text{meas} \{x; \|Tf_1(x)\|_Y > \lambda/2\}$ を評価しよう. Q_k の一辺 $2b_k$, その中心を $x^{(k)}$ とする. Q_k の中心 $x^{(k)}$ で一辺 $4b_k$ の立方体とする.

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k'$ とする, $x \in E$ とする.

$$\begin{aligned} Tg_k(x) &= \int H(x, x') g_k(x') dx' \\ &= \int \{ H(x, x') - H(x, x^{(k)}) \} g_k(x') dx' \\ &= \int_0^1 ds \int \sum_{j=1}^n (x'_j - x_j^{(k)}) H_j(x, x^{(k)} + s(x' - x^{(k)})) g_k(x') dx'. \end{aligned}$$

($H_j(x, x') = \frac{\partial H}{\partial x_j}(x, x')$)

ゆえに,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \|Tg_k(x)\|_Y dx &\leq \sum_{j=1}^n b_{jk} \int \|g_k(x')\|_X dx' \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_k'} \|H_j(x, x^{(k)} + s(x' - x^{(k)}))\|_{L(X, Y)} dx \\ &\leq \gamma \int \|g_k(x')\|_X dx'. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \|Tf\|_Y dx &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int \|Tg_k(x)\|_Y dx \\ &\leq \gamma \sum_{k=1}^{\infty} \int \|g_k(x)\|_X dx \\ &\leq 2\gamma \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n; X)}. \end{aligned}$$

一方, $\lambda \cdot \text{meas}(Q_k) \leq \int_{Q_k} \|f(y)\|_X dy$ より

$$\text{meas}(E) \leq 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \text{meas}(Q_k) \leq \frac{2^n}{\lambda} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n; X)}.$$

以上より

$$\text{meas} \left\{ x; \|\mathbb{T}f(x)\|_Y > \lambda/2 \right\} \leq \frac{4\gamma + 2^{n+1}}{\lambda} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n; X)}.$$

結局,

$$\begin{aligned} & \text{meas} \left\{ x; \|\mathbb{T}f(x)\|_Y > \lambda \right\} \\ & \leq \text{meas} \left\{ x; \|\mathbb{T}f_0(x)\|_Y > \lambda/2 \right\} + \text{meas} \left\{ x; \|\mathbb{T}f_1(x)\|_Y > \frac{\lambda}{2} \right\} \\ & \leq \left\{ C_0^r 2^{r+n(r-1)} + 4\gamma + 2^{n+1} \right\} \lambda^{-1} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n; X)}. \end{aligned}$$

(b). $f \in L_1(\mathbb{I}^n; X)$ とする. $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\text{meas}(\mathbb{I}^n)} \int_{\mathbb{I}^n} \|f(x)\|_X dx > \lambda$$

ならば,

$\text{meas} \left\{ x; \|\mathbb{T}f(x)\|_Y > \lambda \right\} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L_1(\mathbb{I}^n; X)}$
 は自明である. そうであるときは定理 1 のように立方体の列がとれる. 以下 (a) と同様にして, 上の不等式を導くことができる. [証明終].

この定理と $L_p(\Omega, \mu; X)$ の共役空間が $L_{p'}(\Omega, \mu; X^*)$ (X^* は X の共役空間), 核 $H(x, x')$ の作用素の共役作用素は $\cdot H(x', x)^*$ を核とする作用素であること, 共役作用素のノルムは元の作用素のノルムを越えないこと, および Hilbert 空間 X については $X^* = X$ となることを使って次の定理がわかる.

定理 3. $X, Y \in$ Hilbert 空間, $Q = \{x; |x_j| \leq 1, j=1, 2, \dots, n\}$ とする.

(a) $H(x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の $\mathcal{L}(X, Y)$ 値の可測な関数で, (1) を定める作用素 T が $L_2(\mathbb{R}^n; X)$ から $L_2(\mathbb{R}^n; Y)$ への有界作用素であり, $x \neq x'$ のとき $H(x, x')$ は x および x' について微分可能で (2) および

$$(4) \sum_{j=1}^n \text{ess. sup}_{b>0, x \in \mathbb{R}^n - (x+bQ)} b \int_{\mathbb{R}^n - (x+bQ)} \frac{\|\frac{\partial H}{\partial x_j}(x, x')\|}{\mathcal{L}(X, Y)} dx' = \delta' < \infty$$

が成立すれば, $1 < p < \infty$ のとき T は $L_p(\mathbb{R}^n; X)$ から $L_p(\mathbb{R}^n; Y)$ への有界作用素である.

(b) $\mathbb{R}^n \in \mathbb{I}^n$ として (a) と同様な結果が成立する.

ただし, (4) は

$$(5) \sum_{j=1}^n \text{ess. sup}_{b>0, y \in \mathbb{I}^n - J(y+bQ)} b \int_{\mathbb{I}^n - J(y+bQ)} \frac{\|\frac{\partial H}{\partial x_j}(J(y), x')\|}{\mathcal{L}(X, Y)} dx' = \delta' < \infty$$

でおきかえる.

(2) が成立する十分条件は

$$(6) \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial H}{\partial x_j}(x, x') \right\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \frac{C}{|x-x'|^{n+1}}$$

作用素 $\xi \mapsto \phi(\xi)$ および作用素 $f(\xi) \mapsto \int f(\xi) \phi(\xi) d\mu$ の \mathbb{C} から $L_p(\Omega, \mu)$ まで $L_p(\Omega, \mu)$ から \mathbb{C} への作用素としてのノルムはそれぞれ $\|\phi\|_{L_p(\Omega, \mu)}$, $\|\phi\|_{L_p(\Omega, \mu)}$

であるから, X と $Y \in \mathbb{C}$ または L_2^* とした特別の場合に定理を書き換えると,

定理 4. (a) $K(t, x, x')$ を $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の可測な数で, $x \neq x'$ のとき x と x' について微分可能で,

$$(7) \left(\int_0^\infty |\operatorname{grad}_x K(t, x, x')|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{|x-x'|^{n+1}},$$

$$(8) \left(\int_0^\infty |\operatorname{grad}_{x'} K(t, x, x')|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{|x-x'|^{n+1}},$$

とする. 作用素 T と $S \in$

$$(9) (Tf)(t, x) = \int K(t, x, x') f(x') dx'$$

$$(10) (Su)(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int K(t, x, x') u(t, x') dx'$$

で定義する. このとき, さらに, $T \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n); L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*))$

ならば $1 < p < \infty$ について $T \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n); L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*))$

であり, $S \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*), L_2(\mathbb{R}^n))$ $1 < p < \infty$ につい

て, $S' \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n; L_2^*), L_p(\mathbb{R}^n))$ である.

(b) $\mathbb{R}^n \in \mathbb{H}^n$ と換えて同様な結果が成立する. ただし,

(7) と (8) の右辺の $|x-x'|$ は x と x' の \mathbb{H}^n における距離と解釈する.

定理の中の条件の u と f である L_2 有界性 Σ とする σ に Σ

と §2 では Parseval の等式を使, だが, 一般の場合には Lions-Peetre による実補空間の方法を使う.

§ 5. 一般の領域における積分表示.

われわれの見地から γ -function に関する Littlewood-Paley 理論は “定理 4 の仮定を満たす核による積分表示” と定式化できる. そして, このような積分表示は円錐条件を満たす領域について可能である. 証明は [3], [4] などを見ておくことにして, 結果だけを述べておく.

領域 Ω が円錐条件を満たすとは Ω の各点 x に対して, 開きおよび高さが一定数以上の円錐 $K(x)$ が Ω に含まれその尖を頂点とするものがとれることを意味する. 円錐の中心軸を示すベクトルを $\Psi(x)$ で表わすと, このことは, “ \mathbb{R}^n -値有界連続関数 $\Psi(x)$ と $0 < t_0 \leq \infty$ が存在して,

(1) $x \in \Omega$ $0 \leq t < t_0$ ならば $x + t\Psi(x) + tB \subset \Omega$

が成立する” と表現できる. ただし, $B = \{x; |x| \leq 1\}$.

正数 j_0 をとり, $\Psi(x)$ を $j_0\Psi(x)$, t_0 を t_0/j_0 で置き換えると, (1) の後半を $x + t\Psi(x) + j_0 t B \subset \Omega$ とすることもできる.

われわれはこの条件を少し強めて, $\Psi(x)$ が \mathbb{R}^n 上 Lipschitz 連続に作れることを仮定する. この仮

是と C^∞ 函数との合成積により, 実は Ψ が C^∞ 級でそのすべての導函数が有界となるようにとれることがわかる. 条件をゆるめて, $\bar{\Omega}$ に局所有限な開被覆 $\{\Omega_\nu\}$ と上記の性質をもつ $\{\psi_\nu\}$ がとれて,

$x \in \Omega_\nu \cap \Omega$, $0 \leq t < t_0$ ならば $x + t\Psi_\nu(x) + j_0 t B \subset \Omega$ が成立する”という仮定を満足する領域でも同様に論ずることができるか, 尚早のため, 以下では, Ψ が上記のようにとれると仮定しておく.

$\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(\omega \text{ の 支 }) \subset B$, $\int \omega(z) dz = 1$.
に ω を差 ω ,

$$(2) \quad \omega_1(x, z) = \omega(z + \Psi(x))$$

とおく. 正整数 m に対して

$$(3) \quad \omega_m(x, z) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha \{ z^\alpha \omega_1(x, z) \}$$

$$(4) \quad M(x, z) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m}{\alpha!} \partial_z^\alpha \{ z^\alpha \omega_1(x, z) \}$$

とおく. たゞし, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ は多重指数, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$
 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. $\partial_z^\alpha = \partial_{z_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{z_n}^{\alpha_n}$, $\partial_{z_j} = \partial / \partial z_j$ と書く.

$f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (Schwartz の distribution) とする
とき,

$$(5) \quad U_m(t, x) = \langle t^{-m} \omega_m(x, \frac{x-y}{t}), f(y) \rangle_y$$

と定義する. \langle, \rangle は \mathcal{D}' と \mathcal{D} との duality を示

あ. U_m は t と x の C^∞ 函数になる. ゆえに,

$$† \quad U_m(\varepsilon, x) = - \int_\varepsilon^a \left\{ t \frac{\partial U_m}{\partial t}(t, x) \right\} \frac{dt}{t} + U_m(a, x)$$

$t \frac{\partial U_m}{\partial t}$ を計算し, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると,

定理 5. (積分表示 I). $\omega_m, M, U_m \in (3), (4), (5)$ で定めると, $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して, $0 < a < t_0$ のとき

$$(6) \quad f(x) = \int_0^a \left\langle t^{-n} M\left(x, \frac{x-y}{t}\right), f(y) \right\rangle_y \frac{dt}{t} + U_m(a, x).$$

である. ただし, 積分の意味は $[\varepsilon, a]$ 上の積分の \mathcal{D}' の位相による $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの極限と解釈する.

系. k, m を整数, $0 \leq k \leq m$, $m > 0$ とし, $|p| \leq k$ について

$$(7) \quad M_{\beta}^p(x, z) = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\gamma|=m-k} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \frac{k!(m-k)!}{(m-1)! \alpha! \gamma!} \partial_x^{\alpha-\beta} \partial_z^{\gamma} \left\{ z^{\alpha+\gamma} \omega_1(x, z) \right\}$$

とおく. ただし, $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha-\beta)!}$, $\alpha \geq \beta$ (すなわち $j_1 \geq j_2$ かつ $\alpha_j \geq \beta_j$) でないとき $\binom{\alpha}{\beta} = 0$ とする. このとき $f \in \mathcal{D}'$ について

$$(8) \quad f(x) = \sum_{|p| \leq k} \partial_x^p \int_0^a \left\langle t^{-n} M_p^p\left(x, \frac{x-y}{t}\right), f(y) \right\rangle_y t^k \frac{dt}{t} + U_m(a, x).$$

整数の組 l, h をとり, 上と同様な函数を作ると, (8) を導き, それを (6) の右辺の f に代入すると,

定理 6. (積分表示 II). $0 \leq k \leq m$, $0 \leq h \leq l$,
 ω_m, M, M_β をそれぞれ (3), (4), (7) で定義し,
 $k \leq h$, $m \in \mathcal{Q}$ に代えて 同式により ω_h, L, L_β
を定義する. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $|\alpha| = k$, $|\beta| \leq h$, $0 < a < t_0$
に對して,

$$(9) \quad U^\alpha(s, x) = \sum_y \binom{\alpha}{\gamma} s^{k-|\alpha|} \left\langle \bar{s}^{-n} L^{(\alpha, \gamma)} \left(x, \frac{x-y}{s} \right), f(y) \right\rangle_y$$

$$(10) \quad U_\beta(s, x) = \left\langle \bar{s}^{-n} L_\beta \left(x, \frac{x-y}{s} \right), f(y) \right\rangle_y$$

$$(11) \quad u^\alpha(t, x) = \int_t^a t^k \bar{s}^{-k} U^\alpha(s, x) \frac{ds}{s}$$

$$(12) \quad u_\beta(t, x) = \int_0^t t^{-h} s^h U_\beta(s, x) \frac{ds}{s}$$

$$(13) \quad f_\infty(x) = \left\langle \bar{a}^{-n} \omega_h \left(x, \frac{x-y}{a} \right), f(y) \right\rangle_y, \quad f_\infty^{(\alpha)} = \partial_x^\alpha f_\infty$$

とおく. $t \leq t^{-1}$, $K^{(\alpha, \beta)}(x, z) = \partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x, z)$. この
とき,

$$(14) \quad f(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + F_4(x),$$

$$F_1(x) = \sum_{|\alpha|=k} \int_0^a \left\langle t^{-n} M_\alpha \left(x, \frac{x-y}{t} \right), u^\alpha(t, y) + t^k f_\infty^{(\alpha)}(y) \right\rangle_y \frac{dt}{t}$$

$$F_2(x) = \sum_{|\beta| \leq h} \int_0^a \left\langle t^{-n} M^{(0, \beta)} \left(x, \frac{x-y}{t} \right), t^{h-|\beta|} u_\beta(t, y) \right\rangle_y \frac{dt}{t}$$

$$F_3(x) = \sum_{|\beta| \leq h} \left\langle \bar{a}^{-n} \omega_m^{(0, \beta)} \left(x, \frac{x-y}{a} \right), a^{h-|\beta|} u_\beta(a, y) \right\rangle_y$$

$$F_+(x) = \left\langle \bar{a}^m \omega_m \left(x, \frac{x-y}{a} \right), f_{\infty}(y) \right\rangle_y.$$

この積分表示に使われている積分核が定理4の条件を満たすことは次節で述べる。

実は、この積分表示は函数および超函数の微分可能な性質についての L_p 理論, いわゆる Sobolev 空間論と Besov 空間論, において重要な鍵となるものであって, それにより, たとえば f が Besov 空間 $B_{p,q}^{\sigma}(\Omega)$ に属する必要十分条件は, $|\alpha| = k$, $|\beta| \leq k$ について,

$$t^{-\sigma} U^{\alpha}(t, x) \in L_2^*(I; L_p(\Omega)), \quad I = [0, a]$$

$$t^{-\sigma} U_{\beta}(t, x) \in L_2^*(I; L_p(\Omega)),$$

$$f_{\infty} \in W_p^k(\Omega)$$

となることである。ところで W_p^k は k 階までの超函数がすべて L_p に属する函数の全体をよび, $U^{\alpha}, U_{\beta} \in u^{\alpha}, u_{\beta}$ に代えてもよく, また $f_{\infty} \in W_p^k$ は $f \in W_p^{-\infty} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+} W_p^k$ としてもよい。ところで, $f \in W_p^{-k}$ (k : 正整数) とは

$$(15) \quad f = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial_{\alpha}^{\alpha} f_{\alpha}, \quad f_{\alpha} \in L_p(\Omega)$$

(σ に代りて, k, m, l, n を適宜に選ぶ) と表現されることをいう。Sobolev 空間のときは右辺の空間を $L_p(\Omega; L_2^*(I))$ に代えて同様に手続きがかけられる。詳しくは [3], [4] を参照されたい。

Taibleson [6] は Hardy-Littlewood [1] Zygmund らの研究を \mathbb{R}^n や \mathbb{T}^n の場合に一般化して, Besov 空間 (= Lipschitz 空間) の理論を構成している. 彼は Poisson 核や Gauss 核を使っているのだから, われわれの見地からすると, この場合も Poisson 核や Gauss 核は, 多少の便利さはあるにしても, 特別の意義はないのである.

§ 6. 積分核の性質.

この項では積分核が定理4の条件をみたすための十分条件を与える.

定理7.

$K(t, x, x')$ が $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の t について可測, x と x' について連続的に微分可能な函数で, $\theta > 0$ とし,

$$(1) \quad \left| \frac{\partial K}{\partial x_j}(t, x, x') \right| \leq \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}} \left(1 + \frac{|x-x'|}{t}\right)^{-n-\theta}, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(2) \quad \left| \frac{\partial K}{\partial x'_j}(t, x, x') \right| \leq \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}} \left(1 + \frac{|x-x'|}{t}\right)^{-n-\theta}, \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

しかも φ は有界とする. さらに,

$$(3) \quad \begin{aligned} K(t, x, x') &= t \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial K_j}{\partial x_j}(t, x, x') \right\} + K_0(t, x, x') \\ &= t \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial x'_j}(t, x, x') \right\} + \tilde{K}_0(t, x, x'), \end{aligned}$$

と表現され, K_j, \tilde{K}_j は (t, x, x') について有界連続で,

$$(4) \quad \operatorname{ess. sup}_{t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^n} \int |K_j(t, x, x')| dx' < \infty \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(5) \quad \operatorname{ess. sup}_{t \in \mathbb{R}_+, x' \in \mathbb{R}^n} \int |K_j(t, x, x')| dx < \infty \quad (\dots)$$

$$(6) \quad \operatorname{ess. sup}_{t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^n} \int |\tilde{K}_j(t, x, x')| dx' < \infty \quad (\dots)$$

$$(7) \quad \operatorname{ess. sup}_{t \in \mathbb{R}_+, x' \in \mathbb{R}^n} \int |\tilde{K}_j(t, x, x')| dx < \infty \quad (\dots)$$

$$(8) \quad \int_0^\infty \left\{ \operatorname{ess. sup}_x \int |K_0(t, x, x')| dx' \right\}^2 \frac{dt}{t} < \infty,$$

$$(9) \quad \int_0^\infty \left\{ \operatorname{ess. sup}_{x'} \int |K_0(t, x, x')| dx \right\}^2 \frac{dt}{t} < \infty,$$

$$(10) \quad \int_0^\infty \left\{ \operatorname{ess. sup}_x \int |\tilde{K}_0(t, x, x')| dx' \right\}^2 \frac{dt}{t} < \infty,$$

$$(11) \quad \int_0^\infty \left\{ \operatorname{ess. sup}_{x'} \int |\tilde{K}_0(t, x, x')| dx \right\}^2 \frac{dt}{t} < \infty$$

とする. このとき $K(t, x, x')$ は定理4の条件をみたし, したがって定理4の結論が成立する.

証明. 条件 (1) と (2) から条件 (4.7) と (4.8) が導かれることは簡単な計算によりわかる.

L_2 有界性を示す. $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ に対して, 定理9の表示 (8.7) をとる. それを代入すると,

$$\int K(t, x, x') f(x') dx' = V(t, x) + W(t, x)$$

また、

$$V(t, x) = \int_t^\infty \frac{ds}{s} \int K(t, x, x') u(s, x') dx',$$

$$W(t, x) = \int_0^t \frac{ds}{s} \int K(t, x, x') u(s, x') dx'.$$

定理9の後の注意で述べるように、 $u(t, x)$ は x について連続で $|x| \rightarrow \infty$ で値が 0 に収束するから、部分積分し、

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \int_t^\infty \frac{ds}{s} \int \left\{ t \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial x_j'}(t, x, x') + \tilde{K}_0(t, x, x') \right\} \underbrace{u(s, x')}_{dx'} \\ &= - \int_t^\infty \frac{t}{s} \frac{ds}{s} \int \tilde{K}_j(t, x, x') s u^{(j)}(s, x') dx' \\ &\quad + \int_t^\infty \frac{ds}{s} \int \tilde{K}_0(t, x, x') u(s, x') dx', \end{aligned}$$

($u^{(j)} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$)

また、 u の (7) から $\int_t^\infty u(s, x') \frac{ds}{s} = U_m(t, x')$.

$\tilde{K}_j(t, x, x')$ を核とする作用素を $\tilde{A}_j(t)$ で示すと、(6), (7), (10), (11) により、 $\|\tilde{A}_j(t)\| \leq C_j < \infty$ ($j=1, \dots, n$), $\int \|\tilde{A}_0(t)\|^2 \frac{dt}{t} \leq C_0 < \infty$ である。ゆえに、

$$\|V(t, x)\|_{L_2} \leq C \left\{ \sum_{j=1}^n \int_t^\infty \frac{t}{s} \|s u^{(j)}(s, x)\|_{L_2} \frac{ds}{s} + \|\tilde{A}_0(t)\| \|f\|_{L_2} \right\} \in L_2^*.$$

また、 $\|A\|$ は A の L_2 の作用素としてのノルムである。

同様に、条件 (2) と部分積分により

$$W(t, x) = - \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{s}{t} \frac{ds}{s} \int t \frac{\partial K}{\partial x_j'}(t, x') u_j(s, x') dx'$$

は $L_2^*(\mathbb{R}_+; L_2(\mathbb{R}^n))$ に属する. とがわかる.

作用素

$$u(t, x) \mapsto \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int K(t, x, x') u(t, x') dx'$$

が $L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*)$ から $L_2(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素になること

は, $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ をとると, Fubini の定理により

$$\int \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int K(t, x, x') u(t, x') dx' \right\} \overline{g(x)} dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} \int dx' \left\{ u(t, x') \int \overline{K(t, x, x')} g(x) dx \right\}$$

となること, および, (1), (3), (4), (6) により $\overline{K(t, x, x')}$ が $K(t, x, x')$ と同様な性質をもつことから既に得られた結果により,

$$\left\| \int \overline{K(t, x, x')} g(x) dx \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))} \leq C \|g\|_{L_2}$$

が成立することからわかる.

[証明終]

注意 上の証明からわかるように, 条件 (4), (5), (6), (7) は, " K_j, \tilde{K}_j ($j=1, \dots, n$) が L_2 から L_2 への有界な積分作用素を定める" とおきかえてよい.

§5 の $t^{-n} L^{(a, \gamma, \delta)}(x, (x-x')/t)$, $t^{-n} L_\beta(x, (x-x')/t)$, $t^{-n} M_\alpha(x, (x-x')/t)$, $t^{-n} M^{(\alpha, \beta)}(x, (x-x')/t)$ がこの定理の条件をみたすことは容易にわかる. たゞし, $a < \infty$ とし, $t \geq a$ でこれらの核は 0 とする. たとえば, (5.9)

により, $M_\beta(x, z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \{ M_{\beta_j}(x, z) \}$ の形であるから,

$$t^{-n} M_\beta(x, \frac{x-x'}{t}) = t \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ t^{-n} M_{\beta_j}(x, \frac{x-x'}{t}) \right\} + t^{-n} M_{\beta_0}(x, \frac{x-x'}{t}) \right\}$$

$$t^{-1} M_{\beta_0}(x, z) = - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} M_{\beta_j}(x, z).$$

u^α や u_β を定めた核 ((5.11) と (5.12) の核) については次の定理を使えばよい.

定理 8. $K(t, x, x')$ が定理 4 の条件を満たし, $\phi(t, s)$ が $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 上の可測函数で

$$(12) \quad \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}_+} \int_0^\infty |\phi(t, s)| \frac{ds}{s} < \infty$$

$$(13) \quad \text{ess. sup}_{s \in \mathbb{R}_+} \int_0^\infty |\phi(t, s)| \frac{dt}{t} < \infty$$

と可る. このとき

$$(14) \quad H(t, x, x') = \int_0^\infty \phi(t, s) K(s, x, x') \frac{ds}{s}$$

は定理 4 の条件を満たす.

証明. 核 $\phi(t, s)$ の積分作用素が L_2^* の有界作用素であるから, $x \neq x'$ のとき

$$\| \text{grad}_x H(t, x, x') \|_{L_2^*} \leq C \| \text{grad}_x K(t, x, x') \|_{L_2^*}$$

と等しい条件 (4.7) を得る. 条件 (4.8) も同様. L_2 有界性も明らかである. (証明終)

§ 7 \mathbb{R}^n の場合の積分表示.

\mathbb{R}^n の場合には $\Psi(x) = 0$ にとればよい. また $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ のときには $\Psi(x) = (0, 0, \dots, 1)$ にとればよい. このような場合に積分表示がかなり簡単になる. 特に \mathbb{R}^n の場合について述べ, 定理 7 の証明に使った事実の証明を与えておく.

$\Psi(x) = 0$ であるから, ω_m, M などはずいけの函数である (5.7) に代入すると, $|\beta| = k$ のとき.

$$(1) M_\beta(z) = \sum_{|\alpha| = m-k} \frac{k!(m-k)!}{(m-1)!\beta!\alpha!} \partial_z^\alpha \{z^{\beta+\alpha} \omega_1(z)\}$$

であり, $|\beta| < k$ のとき $M_\beta(z) = 0$ となる. したがって (5.8) は $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ について

$$(2) f(x) = \sum_{|\beta|=k} \partial_x^\beta \int_0^a \left\langle t^{-n} M_\beta\left(\frac{x-y}{t}\right), f(y) \right\rangle_y t^k \frac{dt}{t} + U_m(a, x),$$

$$(3) U_m(t, x) = \left\langle t^{-n} \omega_m\left(\frac{x-y}{t}\right), f(y) \right\rangle_y$$

となる. また (5.9) は

$$(4) U^s(s, x) = \left\langle s^{-n} L^{(s)}\left(\frac{x-y}{s}\right), f(y) \right\rangle_y$$

となる。ところで, $L^{(\alpha)}(z) = \partial_z^\alpha L(z)$. (5.14) は

$$(5) \quad f(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + F_4(x)$$

$$F_1(x) = \sum_{|\alpha|=k} \int_0^a \left\langle t^{-n} M_\alpha \left(\frac{x-y}{t} \right), u^\alpha(t, y) + t^k f_\infty^{(\alpha)}(y) \right\rangle_y \frac{dt}{t}$$

$$F_2(x) = \sum_{|\beta|=h} \int_0^a \left\langle t^{-n} M^{(\beta)} \left(\frac{x-y}{t} \right), u_\beta(t, y) \right\rangle_y \frac{dt}{t}$$

$$F_3(x) = \sum_{|\beta|=h} \left\langle a^{-n} \omega_m^{(\beta)} \left(\frac{x-y}{a} \right), u_\beta(a, y) \right\rangle_y$$

$$F_4(x) = \left\langle a^{-n} \omega_m \left(\frac{x-y}{a} \right), f_\infty(y) \right\rangle_y,$$

となる。

特に, $f \in W_p^{-m}(\mathbb{R}^n)$ (m : 正整数), $1 \leq p < \infty$ とする. $f = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial_x^\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L_p$ と表わされるから, Hölder の不等式により

$$|U_m(t, x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \left\{ t^{-n-|\alpha|} \int \left| \omega_m^{(\alpha)} \left(\frac{x-y}{t} \right) \right|^{p'} dy \right\}^{1/p'} \cdot \|f_\alpha\|_{L_p}$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha t^{-|\alpha|-n/p} \|f_\alpha\|_{L_p}$$

($\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$)

したがって $t \rightarrow \infty$ のとき $U_m(t, x) \rightarrow 0$. ゆえに.

積分表おび $a = \infty$, $U(\infty, x) = 0$ にできる. (5)で

f_∞ を省き, F_3, F_4 をとってよい. すなわち, (2.10)

と同じ形になる.

われわれは虫突矢となる函数として、台が単位球に含まれる C^∞ 函数 ω をとったが、上の計算からわかるように、 $f \in W_p^{-m}(\mathbb{R}^n)$ を表すためには適当な函数までの導函数が $|x| \rightarrow \infty$ のときある速さで 0 に近づく函数を ω に選んでもよいことがわかる。

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ のとき (2) にあて、 $k=0$, $a=+\infty$ にとると、

$$(6) \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy$$

を得る。 t についての積分は \mathcal{D}' の位相で考えていいが、実は L_p の位相で収束する。まず、

$$\begin{aligned} & \|U_m(t, x) - f(x)\|_{L_p} \\ &= \left\| \int t^{-n} \omega_m\left(\frac{x-y}{t}\right) \{f(y) - f(x)\} dy \right\|_{L_p} \\ &\leq \int |\omega_m(y)| \|f(x+ty) - f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}_x^n)} dy, \end{aligned}$$

ω_m の台が B に含まれ、 $t \rightarrow 0$ のとき $y \in B$ について一様に、 $\|f(x+ty) - f(x)\|_{L_p} \rightarrow 0$ (f の L_p -連続性) となるから、" L_p の位相で $t \rightarrow 0$ のとき $U_m(t, x) \rightarrow f(x)$ " がわかる。

次に $F(x)$ で f の maximal function, すなわち、

$$F(x) = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} \frac{1}{t^n \operatorname{meas} B} \int_{tB} |f(x+y)| dy$$

とおくと、よく知られているように $F \in L_p(\mathbb{R}^n)$, しかも,

$$\begin{aligned} |U_m(t, x)| &\leq \int |t^{-n} \omega_m\left(\frac{y}{t}\right) f(x-y)| dy \\ &\leq C F(x), \end{aligned}$$

既に示したように、各点 x で $t \rightarrow \infty$ のとき $U_m(t, x) \rightarrow 0$ であるから、Lebesgue の収束定理により、 $t \rightarrow \infty$ のとき L_p の位相で $U_m(t, x) \rightarrow 0$ となることがわかる。すなわち (6) から L_p の位相の意味で成立する。

さて、 $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ とする。 $m=2$ にとる。

$\omega_{jk}(z) = \omega(z) \cdot z_j z_k$, $M_j(z) = \sum_{k=1}^n \partial_{z_k} \omega_{jk}(z)$ とおくと、 $M(z) = \sum_{j=1}^n \partial_{z_j} M_j(z)$ となる。Fourier 変換 \mathcal{F} を \mathcal{F} として表わすと、

$$\widehat{M}(\xi) = \sum_{j=1}^n i \xi_j \widehat{M}_j(\xi),$$

$$\widehat{M}_j(\xi) = \sum_{k=1}^n i \xi_k \widehat{\omega}_{jk}(\xi)$$

である。 \widehat{M}_j , $\widehat{\omega}_{jk}$ は共に $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (急減少 C^∞ 関数) に属する。ゆえに Parseval の等式により

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \left| \int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy \right|^2 dx \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |(\sqrt{2\pi})^n \hat{M}(t\xi) \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \frac{dt}{t} \leq C^2 \|f\|_{L_2}^2$$

また、

$$\left(\int |\hat{M}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^n \left\{ \int |t\xi_j|^2 |\hat{M}_j(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

$$\leq C_1 \left\{ \int [t|\xi| (1+t|\xi|)^{-2}]^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

$$= C_2$$

を用いた。同様に、

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial x_j} \int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy \right|^2 dx \frac{dt}{t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |(\sqrt{2\pi})^n i t \xi_j M(t\xi) \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \frac{dt}{t}$$

$$\leq C^2 \|f\|^2$$

また、

$$\int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ t \int t^{-n} M_j\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy \right\}$$

である。よって、上と同じ計算により

$$\left\| \int t^{-n} M_j\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*)} \leq C \|f\|_{L_2}$$

以上により 次の定理を得る.

定理 9. $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ のとき

$$(7) \quad f(x) = \int_0^\infty u(t, x) \frac{dt}{t} \quad (L_2 \text{ の位相で})$$

$$(8) \quad t \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+)) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(9) \quad u(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$$

$$(10) \quad u(t, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} u_j(t, x),$$

(11) $t^{-1} u_j(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*(\mathbb{R}_+))$ (で評価される) と表示できる. しかも各函数の $L_2(\mathbb{R}^n; L_2^*)$ ノルムは $C \|f\|_{L_2}$

注意. 上に構成した u, u_j などとは (t, x) の C^∞ 級函数, しかも t を固定したとき, $|x| \rightarrow \infty$ とすると 0 に近づく.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $R > 0$ を

$$\int_{|x| > R} |f(x)|^2 dx < \varepsilon$$

にとれる. $|x| > R+t$ にとれば $x+tB$ は半径 R の球の外にあるから Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned} & \left| \int t^{-n} M\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy \right| \\ & \leq \left(\int |t^{-n} M\left(\frac{y}{t}\right)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{tB} |f(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \leq C t^{-n/p} \varepsilon, \end{aligned}$$

$C = \|M(z)\|_{L_p}$ とおこうかしてある。

また、以下の方から

$$\int_t^\infty u(s, x) \frac{ds}{s} = U_m(t, x), \quad \|U_m(t, x)\|_{L_2} \leq C \|f\|_{L_2}$$

とおく。 $C = \|W_m(z)\|_{L_1}$ とある。

文献

- [1] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E.: Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions: Quart. J. of Math (Oxford). 12 (1942). 221-256.
- [2] Littlewood, J. E. and Paley, R. E. A. C.: Theorems on Fourier series and power series (II). Proc. London Math. Soc. (2) 42 (1937), 52-89.
- [3] Muramatsu, T.; On Besov spaces of functions defined in general regions: Publ. RIMS., Kyoto Univ., 6 (1970) 515-543.
- [4] Muramatsu, T.; On Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined on a general region: Publ. RIMS., Kyoto Univ., 2 (1974). 325-396.

- [5]. Stein, E. M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions.*
Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey. 1970.
- [6]. Taibleson, M. H.; *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space.*
(I) *J. Math. Mech.* 13 (1964), 407-480.
(II) (") 14 (1965), 821-840.
(III) (") 15 (1966), 974-981.