数理解析研究所講究録
452巻 1982年 291-298

GI/G/c 待ち時間分布への近似の試み

東北大 経済　高橋幸雄

1. はじめに

待ち行列における近似の問題は，ここ10年ほどの間にかなり研究が進み，M/G/c の平均待ち時間や状態確率，待ち時間分布などに対する近似式については，実用上，ほぼ十分な精度をもったものが提案されている。たとえば，平均待ち時間については Lee & Longton (1957) にはじまり，Page (1972), Maaløe (1973), Cosmetatos (1976), Takahashi (1977), Boxma 他 (1980), Tijms 他 (1981) など，状態確率や待ち時間分布については Hokstad (1978), Tijms 他 (1981), van Hoorn 他 (1981) などがある.

GI/G/c となると話は急に難しくなり，平均待ち時間に対してかなり経験的な近似式 Page (1972), Sakasegawa (1977) が提案されているにすぎない. 拡散近似（木村 (1981) 参照）や不等式 Stoyan (1974), Mori (1975)

はあるが，精度という点ではもうひとつである．

筆者は以前から GI/G/c の近似式について興味をもち，いろいろ考えてはきたが，良い近似式を導出するまでには至っていない．しかし，最近発表された論文の中に，かなり重要なヒントがいくつか現れていると思われるので，それらをここで紹介し，問題点を整理してみたい．

記号をいくつか用意しておく．

$T(x)$	・・・	到着間隔分布
$S(x)$	・・・	サービス時間分布
c	・・・	窓口の数
L	・・・	系内人数（確率変数）
W_q	・・・	待ち時間（確率変数）

目標は W_q および L の分布の近似式を導くことである．

2. Tijms らによる M/G/c の近似式

M/G/c では，つぎの仮定から導いた近似式が，かなり精度がよい（Tijms, van Hoorn & Federgruen (1981) および van Hoorn & Tijms (1981)）．

<u>仮定</u> サービス終了時，系内に j 人客が残っているとき，次のサービス終了時点までの時間は互いに

独立で，分布

(1) $$F_j(t) = \begin{cases} 1-(1-S_e(t))^j, & 1 \leq j \leq c-1 \\ S(ct), & j \geq c \end{cases}$$

に従う．ただし $S_e(t)$ は $S(t)$ の平衡分布

(2) $$S_e(t) = \int_0^t (1-S(x))\,dx \Big/ \int_0^\infty x\,dS(x)$$

である．

L および W_q の分布の近似値は，差分方程式や積分方程式を数値的に解くことによって求めることができる．上の仮定は，別な言い方をすれば，系内人数 L が c 以下のときは $M/G/\infty$ で近似し，L が c 以上のときはサービス時間を $1/c$ 倍した $M/G/1$ で近似したことになっている．この考えを $GI/G/c$ にも適用できないであろうか．

そのためには $GI/G/1$ と $GI/G/\infty$ について調べておく必要がある．

$GI/G/1$ はいろいろ調べられており，結果は一般にかなり複雑である．しかし，力づくで行えば，必要な量を数値的に計算する程度のことは可能である．

$GI/G/\infty$ はあまり研究が進んでいない．Ramaswami & Neuts (1980) は $PH/G/\infty$ モデルについて調べているが，

系内人数の分布を陽の形で表すことはできないと述べている.

このように, GI/G/1, GI/G/∞ ともに問題があるが, とくに GI/G/∞ の方に大きな問題が残されている. また, 仮りにこれらの問題が解決されたとしても, $L = c$ のところで両者の結果を繋ぎ合わせるのがもう一苦労であろう. このように, この方向で近似式を求めるのには越えなければならないハードルがいくつもある. しかし挑戦してみる価値はあると思われる.

3. W_q, L の分布の裾の指数性

GI/PH/c では L および W_q の分布の裾は指数的に減少する (Takahashi (1981), Neuts & Takahashi (1981)). すなわち,

$$
(3) \qquad \begin{aligned} P\{L \geq m\} &= K\eta^m + o(\eta^m), \quad m \to \infty \text{ のとき} \\ P\{W_q > t\} &= \eta^c K e^{-c\varphi t} + o(e^{-c\varphi t}), \quad t \to \infty \text{ のとき} \end{aligned}
$$

ここで K は未知定数, φ は

$$
(4) \qquad T^*(c\varphi) = 1/S^*(-\varphi)
$$

の唯一の正根, $\eta = T^*(c\varphi)$ である. ただし $T^*(s)$, $S^*(s)$ はそれぞれ $T(x)$, $S(x)$ のラプラス・スティ

ルチェス変換である.

この結果は，ごく弛い条件の下で，一般の GI/G/c に対しても成立つと予想されるので，(3) の定数 K がうまく近似できれば，これらの式から L と W_q の分布の裾についての良い近似式が作れる.

この結果を，GI/PH/c と，サービス時間を 1/c 倍した GI/PH/1 とに適用してみると，定数 K を除いて両者における L と W_q の分布の裾は一致することがわかる．前節の Tijms らの近似式は，これをそのベースにしたものと考えることもできる.

4. 残された問題

PH/PH/c では，系内人数および到着過程と各窓口でのサービス過程の相の組を状態にとることによって，マルコフ連鎖を導くことができる．そして，その状態を系内人数によってグループ分けすると，無限小生成作用素はブロック三重対角行列になる．このことは，系内人数 L の分布は，$p_n = P\{L=n\}$ として，比 $z_n = p_n/p_{n-1}$ によって決定される性質のものであることを示している．つまり，L の分

布 $\{p_n\}$ の近似式を求めるには，この比 z_n の近似式をまず作ることが自然であろう．

上のように状態をグループ化し，それに従って定常確率ベクトルを分割すると，系内人数が c 以上の部分では，公比がマトリックスであるような等比ベクトル列になっている（Takahashi (1981)）．この公比行列 R を $T(x)$ や $S(x)$ で陽に表すのは一般にそう簡単ではないが，R の固有値や固有ベクトルを固有値の絶対値の大きい方からいくつか求めるのはそう難しくないことが示せる（詳細についてはここでは省略する）．これを用いると，系内人数がちょうど c 人であるときの各状態の条件付確率がわかれば，$n > c$ に対する z_n の非常に良い近似式が得られる．

したがって，残された問題は $n \leqq c$ に対する z_n と系内人数が c のときの条件付定常確率ベクトルの近似をみつけることである．これに成功すれば，L の分布の良い近似が導け，さらに (3) を使って W_q の分布の近似式も得られる．しかし，これらはともに系内人数が c 以下のときのシステムの挙動に関するもので，2節で述べた $PH/G/\infty$ で系内人数分布を陽の形に表せないのと相通ずる難しさをもっているようである．

参考文献

[1] BOXMA, O.J., COHEN, J.W. AND HUFFELS, N. (1980)
Approximations of the mean waiting time in an M/G/s queueing system.
Opns. Res. 27, 1115-1127.

[2] BRUMELLE, S.L. (1971)
Some inequalities for parallel server queues. Opns. Res. 19, 402-413.

[3] COSMETATOS, G.P. (1974)
Approximate equilibrium results for the multi-server queue (GI/M/r).
Opl. Res. Q. 25, 625-634.

[4] COSMETATOS, G.P. (1976)
Some approximate equilibrium resolts for the multi-server queue (M/G/r)
Opl. Res. Q. 27, 615-620.

[5] HOKSTAD, P. (1978)
Approximations for the M/G/m queue. Opns. Res. 26, 511-523

[6] 木村俊一 (1981)
拡散近似 ―その考え方と有用性. オペレーションズ・リサーチ 26, 197-204.

[7] KINGMAN, J.F.C. (1970)
Inequalities in the theory of queues. J. Roy. Stat. Soc. B, 32, 102-110.

[8] KÖLLERSTRÖM, J. (1974)
Heavy traffic theory for queues with several servers. I. J. Appl. Prob.
11, 544-551.

[9] LEE, A.M. AND LONGTON, P.A. (1957)
Queueing process associated with airline passenger check-in.
Opl. Res. Q. 10, 56-71

[10] MAALØE, E. (1973)
Approximation formulae for estimation of waiting-time in multiple-channel
queueing systems. Man. Sci. 19, 703-710.

[11] MORI, M. (1975)
Some bounds for queues. J. Opns. Res. Soc. Japan. 18, 152-181.

[12] NEUTS, M.F. AND TAKAHASHI, Y. (1981)
Asymptotic behavior of the stationary distributions in the GI/PH/c
queue with heterogeneous servers. (to appear in Zeitschrift. Wahr.)

[13] NEWELL, G.F. (1973)
Approximate Stochastic Behavior of n-Server Service Systems with Lange n.
Lect. Notes in Econ. Math. Syst. 87, Springer-Verlag, Berlin.

[14] NOZAKI, S. AND ROSS, S.M. (1978)
Approximations in finite-capacity multi-server queues with Poisson
arrivals. J. Appl. Prob. 15, 826-834.

[15] PAGE, E. (1972)
Queueing Theory in O.R., Butterworths, London.

[16] RAMASWAMI, V. AND NEUTS, M.F. (1980)
Some explicit formulas and computational methods for infinite-server
queues with phase-type arrivals. J. Appl. Prob. 17, 498-514.

[17] SAKASEGAWA, H. (1977)
An approximation formula $L_q \cong \alpha\rho^{\beta}/(1-\rho)$, Annals ISM 29, 67-75.

[18] 逆瀬川浩孝 (1980)
待ち行列における近似モデル. オペレーションズ・リサーチ 25, 794-800.

[19] STOYAN, D. (1974)
Some bounds for many-server systems GI/G/s. Math. Operationsforsch. Stat. 5, 117-129.

[20] STOYAN, D. (1977)
Qualitative Eigenschafen und Abschätzungen Stochastischer Modelle. Akademie-Verlag, Berlin.

[21] TAKAHASHI, Y. (1977)
An approximation formula for the mean waiting time of an M/G/c queue. J. Opns. Res. Soc. Japan 20, 150-163.

[22] TAKAHASHI, Y. (1981)
Asymptotic exponentiality of the tail of the waiting time distribution in a PH/PH/c queue. Adv. Appl. Prob. 13, 619-630.

[23] TIJMS, H.C., VAN HOORN, M.A. AND FEDERGRUEN, A. (1981)
Approximations for the steady-state probabilities in the M/G/c queue. Adv. Appl. Prob. 13, 186-206.

[24] VAN HOORN, M.H. AND TIJMS, H.C. (1981)
Approximations for the waiting time distribution of the M/G/c queue. (to appear in Performance Evaluation).