数理解析研究所講究録
452巻 1982年 262-272

Erlang's loss formula について

工学院大　機械系　山崎源治

待ち行列理論のなかのすっきりした結果の一つに"Erlang's loss formula"がある。これは最初その名の通り，客の到着がPoisson processである損失系における損失確率が，サービス時間の分布型にはよらずその平均にのみ依存することを意味していた。その後"Erlang's loss formula"に関する厳密な議論，拡張が幾つかなされてきている([6], [7], [8], [9])。例えばOakes [6]では，無限サーバを持ち，到着率が系内人数に依存するモデルを扱い，その系内人数分布がサービス分布の型にはよらずその平均のみによることを導いている。そして，系内人数がN以上のときの到着率を0とすることによりそのモデルが損失系となることから，扱ったモデルをGEM(Generalized Erlang Model)と称した。このような系内人数分布等がサービス分布の型にはよらず，その平均のみにより決まるモデルを，Erlang's loss formulaの成立するモデルの拡張と解

釈するならば，それについての一般的なものとしてKönigらによる"invariance"に関する一連の研究がある（例えば，[5]）。このinvarianceは，いわゆるqueueing networkでも対象にされ，それが成立するためのサービス規律に関する研究がなされてきている。特にKelly[3]は，それが成立するためのかなり一般的な規律を与え，客の各stationでのサービス時間分布がfinite mixture of gamma distributionsであるとして，そのinvarianceを証明した。そしてBarbour[1]が，そのmixture of distributionsの極限移行によりKelly[3]の結果の一般化を議論している。Königらにより対象にされているモデルはかなり特殊であることと，[1]のような極限移行のわずらわしさを除くために，本稿では，客のサービス時間の分布は任意であるとして，Kelly[3]で導入されたサービス規律を持つシステムについて，客のシステムへの到着時点および退去時点の状態に着目し（[4]，[7]，[8]），直接的にそのシステムのinvarianceを示す。そして，その結果の一例としてErlang's loss formulaの拡張を試みる。

1. システムの状態の記述とサービス規律

外部から到着した客に対して，次の規律のもとでサービスする待ち行列システムを扱う。

〔D-1〕 システムには位置が定められていて，システムに到着した客（この客の到着直前の系内人数をnとする）は，確率δ^j_{n+1}で位置jに入る。このとき，位置$j, j+1, \cdots, n$にいた客は順に位置$j+1, j+2, \cdots, n+1$へ移る。ここで，$\sum \delta^j_{n+1} = 1$.

〔D-2〕 システムにはサーバが1人いて，系内人数nのときそのサーバはφ_nのサービス能力を持ち，それを位置jの客に比率δ^j_nふりむける。

〔D-3〕 系内人数nで，位置jにいる客のサービスが完了したなら，位置$j+1, j+2, \cdots, n$の客は順に位置$j, j+1, \cdots, n-1$へ移る。

一見，上の規律は抽象的だが客のシステムへの到着過程がPoisson processで，そのサービス時間がi.i.d. r.v.'sなら，φ_n，δ^j_nを適当に設定すると，次のような通常の待ち行列モデルとなる。

<u>例－1</u>

$\varphi_n = 1$, $\delta^j_n = 1/n \ (n \geq 1, j \geq 1) \Rightarrow$ M/G/1 with processor-sharing.

例－2

$\varphi_n = n, \quad \delta_n^j = 1/n \quad \Rightarrow \quad M/G/\infty.$

例－3

$$\varphi_n = \begin{cases} n & (n \le s) \\ s & (n > s), \end{cases} \qquad \delta_n^j = \begin{cases} 1/n & (n < s) \\ 1/s & (n \ge s,\ j = 1, 2, \cdots, s) \\ 0 & (n \ge s,\ j = s+1, s+2, \cdots, n), \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ M/G/s with preemptive-ressume LCFS.

上述のシステムで，$\mathcal{A}(\mathcal{D})$を時刻$t=0$以後の客の到着（退去）時点の集合とし，相続く時点 $e \in \mathcal{E} = \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$ におけるシステムの状態を観察し，それを次の記号で表わす。

$$\rho_e = \begin{cases} +1 & \text{for } e \in \mathcal{A} \\ -1 & \text{for } e \in \mathcal{D}, \end{cases} \qquad \nu_e = \begin{cases} e\text{直前の系内人数} & \text{for } e \in \mathcal{A} \\ e\text{直後の} \quad 〃 & \text{for } e \in \mathcal{D}, \end{cases}$$

$$\chi_{je} = \begin{cases} e\text{直前に位置}j\text{にいる客の残りサービス時間} & \text{for } e \in \mathcal{A} \\ e\text{直後に} \quad 〃 & \text{for } e \in \mathcal{D}, \end{cases}$$

$\eta_e =$ eの前の最後の客の退去時点から時点eまでの経過時間.

2. 不変性と Erlang's loss formula

2.1. 無限待ち行列可能な場合

客のシステムへの到着は到着率λの Poisson process，客のサービス時間が i.i.d. r.v.'s（その分布関数を$B(x)$, $B(0)=0$とする），システムの位置の数に制限のない場合を考える。さて$P_n\ (>0)$を次の連立方程式の解として定義しよう(*-1)。

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
&-\lambda P_0 + \varphi_1 \beta^{-1} P_1 = 0 \\
&\lambda P_{n-1} - (\lambda + \varphi_n \beta^{-1}) P_n + \varphi_{n+1} \beta^{-1} P_{n+1} = 0 \qquad (n \geq 1) \\
&\sum P_n = 1, \\
&\text{ここで,}\quad \beta = \int_0^\infty x\, dB(x).
\end{aligned}
$$

このとき，次の結果が成立する。

<u>定理1</u>　相続く時点$e \in \mathcal{E}$で観察された$(\rho, \nu, \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\nu, \eta)$の定常分布は次のようになる。

(*-1) 具体的には，P_nは客のサービス時間がパラメータβ^{-1}の指数分布に従うr.v.'sの場合の任意時点での系内人数分布（定常状態）となる。この存在は仮定する。§2.2, 2.3のP_nについても同様。

(2) $\mathrm{Prob.}\,(\rho=r,\ \nu=n,\ x_1\le x_1,\ x_2\le x_2,\cdots,x_n\le x_n,\ \eta\le y)$

$$=\frac{1}{2}P_n(1-e^{-\lambda y})\prod_{j=1}^{n}B^*(x_j),$$

ここで,
$$B^*(x_j)=\beta^{-1}\int_0^{x_j}\{1-B(z)\}dz.$$

この定理の詳細な証明は省略し，アウトラインのみを記す。相続く時点 $e\in\mathcal{E}$ で観察された $(\rho,\nu,x_1,\cdots,x_\nu,\eta)$ が Markov process となることは明らかである。従って(2)の成立を示すためには，e の m 番目の時点での $(\rho,\cdots,\eta)$ ―これを $(\rho,\cdots,\eta;m)$ と記す―の分布が(2)の右辺であるとき，$(\rho,\cdots,\eta;m+1)$ の分布がやはり(2)の右辺となることで十分である。この計算は少々面倒ではあるが，部分積分等を適当に用いるだけで，直接的に確かめることができる。ただしその際に，$\varphi_n P_n=\lambda\beta P_{n-1}$ の成立が必要となるが，これが(1)で保証されているわけである。

相続く時点 $e\in\mathcal{E}$ で観察された $(\rho,\nu,x_1,\cdots,x_\nu,\eta)$ の一つの定常分布は(2)の右辺となるが，この process は，ρ,ν に関して周期的となるため，その一意性の保証はない。しかしながら，相続く時点 $e\in\mathcal{A}$ で観察された process $(\nu,x_1,x_2,\cdots,x_\nu)$ は非周期的となることから，(2)と時間平均的な考え方から次の結果を得る（詳細は，Kelly [4] をみよ）。

<u>系1-1</u> 相続く $e\in\mathcal{A}$ で観察された $(\nu,x_1,x_2,\cdots,x_\nu)$ の一

意な定常分布は,

(3) $$\mathrm{Prob.}(\nu=n, x_1\le x_1, x_2\le x_2, \cdots, x_n\le x_n)=P_n\prod_{j=1}^{n}B^*(x_j).$$

同様に相続く時点 $e\in\mathcal{D}$ で観察された $(\nu, x_1, x_2, \cdots, x_\nu, \eta)$ に関して次の結果を得る（$e\in\mathcal{A}$ での η はそれ程具体的な意味を持たないが, $e\in\mathcal{D}$ での η は客のシステムからの退去間隔を表わす r.v. となる）.

<u>系1-2</u> 相続く時点 $e\in\mathcal{D}$ で観察された $(\nu, x_1, x_2, \cdots, x_\nu, \eta)$ の一意な定常分布は,

(4) $$\mathrm{Prob.}(\nu=n, x_1\le x_1, x_2\le x_2, \cdots, x_n\le x_n, \eta\le y)$$
$$=P_n(1-e^{-\lambda y})\prod_{j=1}^{n}B^*(x_j).$$

従って, 退去過程は Poisson process となる。

2.2. 損失系

客の到着過程, サービス時間は§2.1と同じで, サービス規律は§1の〔D-1〕, 〔D-2〕, 〔D-3〕であるが位置が N までしかなく, N 個の位置がすべてふさがっているとき（系内人数が N のと

き）到着した客はサービスを受けずに，そのまま立去る場合
—損失系—について考えてみる．この場合，系内人数Nのとき到着した客の到着時点および退去時点（それらは一致する）もその要素とするならば，§2.1の定理1，系1-1，系1-2はそのまま成立する．ただしその際，$P_n\,(>0)$を次の連立方程式の解とする。

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&-\lambda P_0 + \varphi_1 \beta^{-1} P_1 = 0\\
&\lambda P_{n-1} - (\lambda + \varphi_n \beta^{-1}) P_n + \varphi_{n+1} \beta^{-1} P_{n+1} = 0 \qquad (1 \leq n \leq N-1)\\
&\lambda P_{N-1} - \varphi_N \beta^{-1} P_N = 0\\
&\sum_{n=1}^{N} P_n = 1
\end{aligned}
$$

(5)のP_Nを用い，(2)で$n=N$とすると Erlang's loss formula が得られる。

2.3. 客の到着率が系内人数に依存する場合

§2.1で，系内人数がnのときの客の到着が到着率λ_nの Poisson process の場合を考える。さて，$P_n\,(>0)$を次の連立方程式の解としよう．

(6) $$-\lambda_0 P_0 + \varphi_1 \beta^{-1} P_1 = 0$$
$$\lambda_{n-1} P_{n-1} - (\lambda_n + \varphi_n \beta^{-1}) P_n + \varphi_{n+1} \beta^{-1} P_{n+1} = 0 \quad (n \geq 1)$$
$$\sum P_n = 1$$

このとき,次の結果が成立する(その証明は,定理1と同様)。

<u>定理2</u>　相続く時点 $e \in \mathcal{E}$ で観察された $(\rho, \nu, x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ の定常分布は,

(7) $$\mathrm{Prob.}(\rho = r, \nu = n, x_1 \leq x_1, x_2 \leq x_2, \cdots, x_n \leq x_n)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_n P_n}{\lambda} \prod_{j=1}^{n} B^*(x_j),$$
ここで, $\lambda \overset{d}{=} \sum \lambda_n P_n$.

この定理から直ちに系1-1, 1-2と同様の結果(ただし,系1-2の η を除いて)が得られる。§2.1の場合には,系1-2のように η を含めた結果から,客の退去過程が到着過程と一致することが直接的に得られた。しかしながら,この§で考えたシステムの場合には,本稿で用いた方法での客の退去過程の説明は困難で,それには Kelly [3], Oakes [6] のように stochastic process の reversibility を用いる必要があるように思われる。

この場合の系1-1に対応する結果で, $\varphi_n = n$, $\delta_n^* = 1/n$ とす

ると Oakes [6] の結果となる。また，$\lambda_n=0\ (n\geq N)$ とすると，系1-2 に対応する結果で $n=N$ の場合，Erlang's loss formula が得られる。

2.4. 客のタイプが異なる場合

K種類の客のシステムへの到着が互いに独立で，それぞれパラメータ $\lambda_k\ (k=1,2,\cdots,K)$ の Poisson process，サービス時間も互いに独立でそれぞれ分布関数 $B_k(x)\ (k=1,2,\cdots,K)$ に従う i.i.d. r.v.'s で，規律 [D-1], [D-2], [D-3] のもとでサービスを行う場合も，複雑にはなるが本稿の方法で process $(\xi, \nu, x_1, \cdots, x_\nu)$ について §2.1と同様の結果を得ることができる。ただし，この場合には，システムの状態を §2.1のそれよりも細分化する必要がある。すなわち，客の到着直前（退去直後）の系内人数 n を，どの位置にどのタイプの客がいるかまで細分化し，その細分化した状態について客のサービス時間をそれぞれパラメータ β_k^{-1} の指数分布 $(\beta_k=\int_0^\infty x\,dB_k(x),\ k=1,2,\cdots,K)$ に従う r.v.'s として (1) に対応する平衡方程式の解を P_n のかわりに用い，(2) などの $B^*(x_j)$ をそれぞれ $B_k^*(x_j)$ でおきかえる必要がある。その詳細はここでは省略するが，その最も簡単な例が Wolff and Wrightson [9] の結果となる。

おわりに，本稿の内容と直接的な関連はないが，同様の方法で，GI/G/1 with preemptive resume LCFS の到着直前の系内人数分布について興味ある結果が，最近得られていることを付記する（Fakions [2]）。

References

[1] Barbour, A.D. (1976). Networkes of queues and the methods of stages, Adv. Appl. Prob., 8.

[2] Fakions, D. (1981). The G/G/1 queueing system with a particular queue discipline, J. R. Statist., 43, 2.

[3] Kelly F. P. (1976). Networks of queues, Adv. Appl. Prob., 8.

[4] Kelly,F. P. (1976). The departure process from a queueing system, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 80.

[5] König,D. and Jansen, U. (1974). Stochastic processes and properties of invariance for queueing systems with speeds and temporary interruptions, Trans. of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, European Meeting of Statisticians, Czechoslovak Academy of Sciences.

[6] Oakes, D. (1976). Random overlapping intervals - A generalization of Erlang's loss formula, Ann. Prob., 4, 6.

[7] Shanbhag, D. N. and Tambouratzis D. G. (1973). Erlang's formula and some results on the departure process for a loss system, J. Appl. Prob., 10.

[8] Takacs, L. (1969). On Erlang's formula, Ann. Math. Statist., 40.

[9] Wolff, R. W. and Wrightson, C. W. (1976). An extension of Erlang's loss formula, J. Appl. Prob., 13.