数理解析研究所講究録
452巻 1982年 227-238

同期型処理系をもつ待ち行列システムの解析

岩手大学工学部情報工学科
吉岡 良雄

1. まえがき

離散型待ち行列システムは，客の到着，サービスの開始および終了などの変化が，あらかじめ定められた時点列でしか起こらないシステムである[1]。しかし，客の到着が，この時点列以外でも起こりうる場合や，サービスの終了がその時点列以外でも起こるが，サービスの開始がその時点列でしか起こらない場合も含んでいる。このようなシステムは，TDMA（Time Division Multiple Access）システムやTSS（Time Sharing System）など多くの場所でみられる。このようなシステムが，B. A. PowellとB. Avi-Itzhakによって[2]，二つの時点間（quantum とよぶ）に到着する客数に着目し，かつ各quantum内に到着する客数が互いに独立である場合のもとで解析された。そして，GI／M／N，GI／M／1，GI／

/D/N，GI/D/1，M/D/Nについて議論している。しかしながら，各quantum内の客の到着が互いに独立であることは，文献［1］にも述べてあるが，連続な場合のポアソンで集団到着にすぎない。これは，各時点列での事象の変化をマルコフ連鎖として取り扱っているからである。

本論文では，サービスが同期のとれたポーリングによって開始される処理系（同期型処理系）をもつ待ち行列システムを解析する。これは，文献［2］で示された離散型待ち行列システムとよく似ているが，各quantum内の客の到着は，互いに独立でないとして取り扱っている。また，TDMAシステムやTSSなど実際面では，バッファサイズを決定する意味で，quantum内の系の長さや待ち行列長の分布が必要となる。そこで，この分布についても議論を加える。さらに，本システムの特別な場合として，G/G/1待ち行列システムを考察する。

2．モデルの設定

本論文で取り扱う待ち行列システムは，同期がとられたポーリングによってサービスが開始される単一処理待ち行列システムである。さらに，このシステムについて，次のような仮定を行う。

1). システムは，定常状態にある。

2). 二つのポーリング間の時間間隔（quantum）を τ とする。

3). サービス分布を $F(x)$ （$x \geqq 0$）とする。

4). 任意時間 x 内に m 人の客が到着する確率を $a_m(x)$ （$m \geqq 0$，$x \geqq 0$）とする。さらに，この母関数 $A(z,x)$ を次のように展開する。

$$A(z,x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) z^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) - \Delta \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot a_m(x)$$

$$+ \Delta^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m \cdot (m-1)}{2} \cdot a_m(x) - \cdots$$

$$= 1 - \Delta \cdot N_1(x) + \frac{\Delta^2}{2}\left\{N_2(x) - N_1(x)\right\} \cdots \quad (1)$$

ここで，$\Delta = 1 - z$ であり，$N_1(x)$ および $N_2(x)$ はそれぞれ，任意時間 x 内に到着する客数の平均および2次モーメントである。

5). 客のサービスが，サービス開始から k 個の quantum を経過し，次の quantum 内の任意時点 t において，行列長が n である確率を $W_{n,k}(t)$ （$n \geqq 0$，$k \geqq 0$）とおく。さらに，この母関数を $\Phi(z,k,t)$ とおく。

6). quantum 内の任意時点 t において，サーバが空であり，

かつ行列長がnである確率を$v_n(t)$ $(n \geqq 0)$とおく。

7). quantum 内の任意時点tにおいて，行列長がnである確率を$P_n(t)$, $(n \geqq 0)$とおく。このとき，次式が成立する。

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}(t) + v_n(t) \tag{2}$$

以上のような仮定のもとで解析を行うが，客の到着について少し考察を加える。

客の到着分布およびその密度関数について，それらのラプラス変換をそれぞれ$H^*(\theta)$および$h^*(\theta)$とおけば，$a_m(x)$のラプラス変換$a_m^*(\theta)$は，次式となる。

$$a_0^*(\theta) = H^*(\theta)$$

$$a_m^*(\theta) = \frac{1-\theta H^*(\theta)}{\theta} \cdot \{h^*(\theta)\}^{m-1} \cdot \{1-h^*(\theta)\} \tag{3}$$

したがって，$N_1(x)$および$N_2(x)$のラプラス変換は，それぞれ次式となる。

$$N_1^*(\theta) = \frac{1-\theta H^*(\theta)}{\theta\{1-h^*(\theta)\}}$$

$$N_2^*(\theta) = \frac{\{1-\theta H^*(\theta)\}\{1+h^*(\theta)\}}{\theta\cdot\{1-h^*(\theta)\}^2} \qquad (4)$$

この逆変換によって，$N_1(x)$および$N_2(x)$を求めることができるが，困難である。

3. 解析

各quantumの開始直後（$t=+0$）では，次の関係式が成立する。[4]

$$\Phi(z,k,+0) = \{1-F(k\tau)\}\cdot A(z,k\tau)\,\Phi(z,0,+0) \quad (k \geq 0) \qquad (5)$$

$$z\cdot\Phi(z,0,+0) = \sum_{k=0}^{\infty}\{F((k+1)\tau)-F(k\tau)\}\,[A(z,(k+1)\tau)\,\Phi(z,0,+0) - a_0((k+1)\tau)\,W_{0,0}(+0)] + [A(z,\tau)-a_0(\tau)]\cdot V_0(+0) \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} V_0(+0) &= \sum_{k=0}^{\infty}\{F((k+1)\tau)-F(k\tau)\}\cdot a_0((k+1)\tau)\cdot W_{0,0}(+0) \\ &\quad + a_0(\tau)\cdot V_0(+0) \\ V_n(+0) &= 0 \qquad (n>0) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

また，quantum内の任意時点tにおいて，次式が成立する。

$$\Phi(z,k,t) = A(z,k\tau+t)\,\Phi(z,0,+0)\left\{1-F(k\tau+t)\right\} \quad (8)$$

$$V_n(t) = a_n(t)\cdot V_0(+0) + \sum_{k=0}^{\infty}\left\{F(k\tau+t)-F(k\tau)\right\} \cdot\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}(k\tau+t)\cdot W_{l,0}(+0) \quad (9)$$

従って，式（6）から次式を得る。

$$\Phi(z,0,+0) = \frac{\left\{1-A(z,\tau)\right\}V_0(+0)}{\sum_{k=0}^{\infty}\left\{F((k+1)\tau)-F(k\tau)\right\}A(z,(k+1)\tau) - z} \quad (10)$$

さらに，式（2），(5)～(10)，および $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)=1$ から，$V_0(+0)$ は，次のようになる。

$$V_0(+0) = \frac{1-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{F((k+1)\tau)-F(k\tau)\right\}N_1((k+1)\tau)}{1+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{F((k+1)\tau)-F(k\tau)\right\}\left\{(k+1)N_1(\tau)-N_1((k+1)\tau)\right\}} \quad (11)$$

$V_0(+0)>0$ から，平衡条件は次式となる。

$$1 > \sum_{k=0}^{\infty}\left\{F((k+1)\tau)-F(k\tau)\right\}N_1((k+1)\tau) \quad (12)$$

以上から，quantum内の任意時点tでの待ち行列長$L_q(t)$は，次式によって求められる。

$$L_q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} n\, W_{n,k}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot V_n(t)$$

$$= \lim_{z\to 1}\Big[A(z,t)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\Phi(z,k,+0) + \sum_{k=0}^{\infty}\Phi(z,k,+0)\frac{\partial}{\partial z}A(z,t)$$

$$+ V_0(+0)\cdot \frac{\partial}{\partial z}A(z,t)\Big]$$

$$= \lim_{z\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z,k,+0) + N_1(t) \quad \left(= L_q(+0) + N_1(t)\right)$$

$$= \frac{C\cdot V_0(+0)}{2\cdot\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\{F((k+1)\tau)-F(k\tau)\}\, N_1((k+1)\tau)\right]^2} + N_1(t) \qquad (13)$$

ここで，Cは次式である。

$$C = \sum_{k=0}^{\infty}\{1-F(k\tau)\}\cdot\Big[N_2(\tau)-N_1(\tau)+2N_1(\tau)\cdot N_1(k\tau)+\sum_{m=0}^{\infty}\{F((m+1)\tau)-F(m\tau)\}$$

$$\cdot\{N_2((m+1)\tau)\cdot N_1(\tau)-N_1((m+1)\tau)\cdot N_2(\tau)-2N_1(\tau)\cdot N_1(k\tau)\cdot N_1((m+1)\tau)\}\Big]$$

$$(14)$$

式（13）の結果から，quantum内の待ち行列長分布は，$N_1(t)$によって決定されることがわかる。

一方，平均待ち時間W_qは，次式によって与えられる。

$$
\begin{aligned}
W_q &= L_q(+0)\sum_{m=0}^{\infty}\{F_1((m+1)\tau)-F_1(m\tau)\}(m+1)\tau \\
&+\sum_{m=0}^{\infty}\{F_1((m+1)\tau)-F_1(m\tau)\}\cdot(m+1)\tau\int_0^{\infty}N_1(t)\,dG(t) \\
&+\frac{N_1(\tau)\cdot\tau\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k+1)}{2}\{F_1((k+1)\tau)-F_1(k\tau)\}}{1+\sum_{k=0}^{\infty}\{F_1((k+1)\tau)-F_1(k\tau)\}\{(k+1)N_1(\tau)-N_1((k+1)\tau)\}} \\
&+\tau-\int_0^{\tau}t\,dG(t)
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

ここで，$G(t)$は，quantum内において，1人の客が到着する時点tの分布を示す。

4. 検討

各quantum内に到着する客数は，互いに独立であるとすれば，文献〔2〕で示している離散型待ち行列システムとなる。このとき，$N_1(k\tau)=k\cdot N_1(\tau)$となり，式（11），（13），(15)

は，それぞれ次式となる。

$$\overline{V}_0(+0) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\{F_1((k+1)\tau) - F_1(k\tau)\} N_1((k+1)\tau) \tag{16}$$

$$L_q(+0) = \frac{C'}{2\cdot\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty}\{F_1((k+1)\tau) - F_1(k\tau)\} N_1((k+1)\tau)\right]} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} W_q = {} & L_q(+0)\sum_{m=0}^{\infty}\{F_1((m+1)\tau) - F_1(m\tau)\}(m+1)\tau \\ & + \sum_{m=0}^{\infty}\{F_1((m+1)\tau) - F_1(m\tau)\}(m+1)\tau \int_0^{\infty} N_1(t)\,dG(t) \\ & + N_1(\tau)\tau \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k+1)}{2}\{F_1((k+1)\tau) - F_1(k\tau)\} + \tau - \int_0^{\tau} t\,dG(t) \end{aligned} \tag{18}$$

ここで，C' は次式である。

$$\begin{aligned} C' = \sum_{k=0}^{\infty}\{1 - F_1(k\tau)\}\Big[& N_2(\tau) - N_1(\tau) + 2kN_1(\tau) + \sum_{m=0}^{\infty}\{F_1((m+1)\tau) - F_1(m\tau)\} \\ & \cdot\{N_2((m+1)\tau)N_1(\tau) - (m+1)N_1(\tau)N_2(\tau) - 2k(m+1)N_1^3(\tau)\}\Big] \end{aligned} \tag{19}$$

一方，式（11）（13）の結果を $\tau \to 0$ とすれば，$G/G/1$

待ち行列システムの結果となるであろう。このとき，式(11)(13)は，それぞれ次式となる。

$$V_0 = \frac{1 - \int_0^\infty N_1(x)\,dF(x)}{1 + \int_0^\infty \{\lambda_1 x - N_1(x)\}\,dF(x)} \tag{20}$$

$$L_q = \frac{\begin{array}{l}(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^\infty x\,dF(x) + 2\lambda_1\int_0^\infty N_1(x)\{1-F(x)\}dx + \lambda_1\int_0^\infty x\,dF(x)\int_0^\infty N_2(x)\,dF(x) \\ \quad - \lambda_2\int_0^\infty x\,dF(x)\int_0^\infty N_1(x)\,dF(x) - 2\lambda_1\int_0^\infty N_1(x)\{1-F(x)\}dx\int_0^\infty N_1(x)\,dF(x)\end{array}}{2\left\{1-\int_0^\infty N_1(x)\,dx\right\}\left\{1+\int_0^\infty (\lambda_1 x - N_1(x))\,dF(x)\right\}} \tag{21}$$

ただし，$\lambda_1 = \lim_{\tau\to 0} N_1(\tau)/\tau$，$\lambda_2 = \lim_{\tau\to 0} N_2(\tau)/\tau$ である。さらに，式(20)(21)において，$N_1(x) = \lambda x$ かつ $\lambda_1 = \lambda_2$ とおけば，次式を得る。

$$V_0 = 1 - \lambda\int_0^\infty x\,dF(x) = 1-\rho \tag{22}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\int_0^\infty x^2\,dF(x) + \rho\int_0^\infty N_2(x)\,dF(x) - \rho^2 - \rho\lambda^2\int_0^\infty x^2\,dF(x)}{2(1-\rho)} \tag{23}$$

この結果は，GI／G／1待ち行列システムの結果であると考えられる。この結果にポアソン到着である条件を導入すれ

ば，$N_2(x)=(\lambda x)^2+\lambda x$ であるから，式（23）は次式となる。

$$L_q=\frac{\lambda^2\int_0^\infty x^2\,dF(x)}{2(1-\rho)} \tag{24}$$

これは，M／G／1待ち行列システムの結果と一致する。

5．まとめ

サービスが同期のとれたポーリングによって開始される処理系（同期型処理系）をもつ待ち行列システムを解析した。本システムの解析は，離散型待ち行列システムの場合とは異なり，到着が一般分布の場合を取り扱っている。そして，TDMAシステムやTSSなどの実際面では，バッファサイズを決定する意味で，ポーリング間内の任意時点での系の長さや待ち行列長の分布を導出した。さらに，本システムの特別な場合として，G／G／1待ち行列システムを考察した。しかし，ここで求めた結果の是否については，まだ明らかでない。今後，このことについて検討したいと思う。

[謝辞]

文献を送って頂きました電々公社の川島様に深く感謝いたします。また，研究会会場で討論して頂きました方々に深く感謝いたします。

[文献]

[1] 国沢，本間"応用待ち行列事典", pp. 139～144,（広川書店）.

[2] Avi-Itzhak, B. and Powell, B. A. "Queuing Systems with Enforced Idle Time", Opns. Res., 15, pp. 1146～1156, (1967)

[3] Kuczura, A. "Piecewise Markov Process", SIAM. J. Appl. Math. 24, 2, pp. 169～181 (March 1973).

[4] Yoshioka, Y. "An Analysis of the Single-Server-Queue with a Synchronized Server", Tech. Rep. Iwate Univ. 15, pp. 17～24 (Dec. 1981).