数理解析研究所講究録
452巻 1982年 139-158

補助変数法によるGI/G/1待ち行列の解析

東北大学工学部　蔦田保夫
星子幸男

1. まえがき

従来，GI/G/1に対して，Andersenの解法，Lindleyの積分方程式をスペクトル分解法を用いて解くSmithの解法など種々の方法が提案されているが，[(2)~(5)] 本稿では，Coxが創始した補助変数法[(6)]によるGI/G/1待ち行列の解析を試みる。

系内客数の他に補助変数として客の残余到着時間と残余サービス時間を選び，GI/G/1の基本方程式を導きその定常解について考察する。

即ち，基本方程式から実待ち時間のラプラス変換がWiener-Hopfのスペクトル分解手法により求まり，これを基に，仮り待ち時間，遊休期間，客の退去間隔のラプラス変換及び系内客数分布が導出できることを示す。更に，全稼働期間の解析が，一般化されたWiener-Hopfのスペクトル分解の問題（Schasseberger[(9)]）に帰着されることを論証する。

2. GI/G/1の基本方程式と定常解

以下では次のような記法を用いる。

X_0：客の到着間隔を表わす正値確率変数；

X_1：客のサービス時間を表わす正値確率変数；

$A(x_0) \triangleq Pr[X_0 \leq x_0]$：$X_0$が従う確率分布関数，$A(0)=0$；

$B(x_1) \triangleq Pr[X_1 \leq x_1]$：$X_1$が従う確率分布関数，$B(0)=0$；

$a(x_0) \triangleq dA(x_0)/dx_0$　　$b(x_1) \triangleq dB(x_1)/dx_1$

$A^*(\phi) \triangleq \int_0^\infty a(x_0) e^{-\phi x_0} dx_0$　　$B^*(\theta) \triangleq \int_0^\infty b(x_1) e^{-\theta x_1} dx_1$

$\overline{X}_0 \triangleq E[X_0] = -A^{*(1)}(0) < \infty$　　$\overline{X}_1 \triangleq E[X_1] = -B^{*(1)}(0) < \infty$

〈仮定〉　客の到着間隔の系列$\{X_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$，サービス時間の系列$\{X_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$は，それぞれ共通分布$A(x_0)$, $B(x_1)$に従う i.i.d. な系列である。更に，$\{X_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$と$\{X_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$とは互いに独立であるものとし，サービス規律はFCFSであるものとする。

ここで系の状態変数を次のようにとる。

$$S(t) = \begin{cases} (N(t), U_0(t), U_1(t)) & \cdots\cdots (N(t) \geq 1) \\ (N(t), U_0(t)) & \cdots\cdots (N(t)=0) \end{cases}$$

但し，$N(t)$：時刻tでの系内客数；$U_0(t)$：時刻tでの残余到着時間（＝時刻tから次の客の到着までの残余時間）；$U_1(t)$：時刻tでサービス中の客の残余サービス時間。

また，次の結合確率密度関数（joint p.d.f.）を導入し

$p_0(u_0,u_1)du_0 \triangleq Pr[N(t)=0,\ u_0<U_0(t)\leq u_0+du_0]$

$p_j(u_0,u_1,t)du_0du_1 \triangleq Pr[N(t)=j,\ u_0<U_0(t)\leq u_0+du_0,\ u_1<U_1(t)\leq u_1+du_1]$

可能な状態推移を考えると，GI/G/1 に対する次の基本方程式が成立する。

$$\begin{cases} (\partial/\partial t-\partial/\partial u_0)p_0(u_0,t)=p_1(u_0,0,t) & (2\cdot1)\\ (\partial/\partial t-\partial/\partial u_0-\partial/\partial u_1)p_1(u_0,u_1,t)=b(u_1)p_2(u_0,0,t) & \\ \qquad +a(u_0)b(u_1)p_0(0,t) & (2\cdot2)\\ (\partial/\partial t-\partial/\partial u_0-\partial/\partial u_1)p_j(u_0,u_1,t)=b(u_1)p_{j+1}(u_0,0,t) & \\ \qquad +a(u_0)p_{j-1}(0,u_1,t) \qquad (j\geq2) & (2\cdot3)\end{cases}$$

以下，定常状態についてのみ考察する。ここで，

$p_0(u_0)=\lim_{t\to\infty}p_0(u_0,t)$ ，$p_j(u_0,u_1)=\lim_{t\to\infty}p_j(u_0,u_1,t)$ $(j\geq1)$

とおくと，定常状態の基本方程式として次式を得る。

$$\begin{cases} \partial p_0(u_0)/\partial u_0=-p_1(u_0,0) & (2\cdot4)\\ (\partial/\partial u_0+\partial/\partial u_1)p_1(u_0,u_1)=-b(u_1)p_2(u_0,0)-a(u_0)b(u_1)p_0(0) & (2\cdot5)\\ (\partial/\partial u_0+\partial/\partial u_1)p_j(u_0,u_1)=-b(u_1)p_{j+1}(u_0,0)-a(u_0)p_{j-1}(0,u_1) & (2\cdot6)\\ \qquad (j\geq2) & \end{cases}$$

また，次式が成立する。

$$p_j\triangleq\lim_{t\to\infty}Pr[N(t)=j]=\begin{cases}\int_0^\infty p_0(u_0)du_0 & \cdots\cdots(j=0)\\ \int_0^\infty\int_0^\infty p_j(u_0,u_1)du_0du_1 & \cdots(j\geq1)\end{cases} \qquad (2\cdot7)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_j=1 \qquad (2\cdot8)$$

ここで，$\{p_j\}$ は定常状態の任意時点での系内客数分布である。

〈定常解の若干の性質〉

次のようなラプラス変換と母関数を定義する。

$$P_0^*(\phi) \triangleq \int_0^\infty e^{-\phi u_0} p_0(u_0)\,du_0 \quad , \quad G^{**}(z,\phi,\theta) \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} P_j^{**}(\phi,\theta) z^j$$

$$P_j^{*\cdot}(\phi,0) \triangleq \int_0^\infty e^{-\phi u_0} p_j(u_0,0)\,du_0 \quad , \quad G^{*\cdot}(z,\phi,0) \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} P_j^{*\cdot}(\phi,0) z^j$$

$$P_j^{\cdot *}(0,\theta) \triangleq \int_0^\infty e^{-\theta u_1} p_j(0,u_1)\,du_1 \quad , \quad G^{\cdot *}(z,0,\theta) \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} P_j^{\cdot *}(0,\theta) z^j$$

$$P_j^{**}(\phi,\theta) \triangleq \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\phi u_0+\theta u_1)} p_j(u_0,u_1)\,du_0\,du_1$$

(2·4)～(2·6)をラプラス変換すると

$$\phi P_0^*(\phi) - p_0(0) = -P_1^{*\cdot}(\phi,0) \qquad (2\cdot4)'$$

$$(\phi+\theta)P_1^{**}(\phi,\theta) = P_1^{*\cdot}(\phi,0) - B^*(\theta)P_2^{*\cdot}(\phi,0) + P_1^{\cdot *}(0,\theta) - A^*(\phi)B^*(\theta)p_0(0) \qquad (2\cdot5)'$$

$$(\phi+\theta)P_j^{**}(\phi,\theta) = P_j^{*\cdot}(\phi,0) - B^*(\theta)P_{j+1}^{*\cdot}(\phi,0) + P_j^{\cdot *}(0,\theta) - A^*(\phi)P_{j-1}^{\cdot *}(0,\theta) \qquad (j\geq 2) \qquad (2\cdot6)'$$

を得る。更に，上記の母関数を用いて(2·4)′～(2·6)′を書き換えると次式が成立する。

$$B^*(\theta)\phi P_0^*(\phi) + (\phi+\theta)G^{**}(z,\phi,\theta) = [1-z^{-1}B^*(\theta)]G^{*\cdot}(z,\phi,0) + [1-zA^*(\phi)][G^{\cdot *}(z,0,\theta) + B^*(\theta)p_0(0)] \qquad (2\cdot9)$$

以下，(2·9)から派生する若干の性質について述べる。

(2·9)をϕで偏微分し，$\phi=\theta=0$，$z=1$とおくと

$$p_0(0) + G^{\cdot *}(1,0,0) = 1/\bar{X}_0 \qquad (2\cdot10)$$

上式は，系の状態が客の到着直前であるという事象の確率密度が客の平均到着率($\bar{X}_0^{-1}$)に等しいことを意味している。

一方，(2·9) を θ で偏微分し，$\phi=\theta=0$，$z=1$ とおくと

$$G^{*\cdot}(1,0,0)=(1-p_0)/\overline{X}_1 \qquad (2\cdot11)$$

(2·10),(2·11) はそれぞれ平均到着率と平均退去率を表わしているが，定常状態では両者は相等しい。従って次式を得る。

$$p_0=P_0^*(0)=1-\overline{X}_1/\overline{X}_0=1-\rho \qquad (2\cdot12)$$

但し，$\rho\triangleq\overline{X}_1/\overline{X}_0$：トラヒック密度（系の利用率）。

次に，$\{r_j\}$ と $\{d_j\}$ との関係について述べる。ここで

$$\left.\begin{array}{l} r_j：客の到着直前での系内客数分布 \\ d_j：客の退去直後での系内客数分布 \end{array}\right\} \quad (j\geq0)$$

(2·10)の物理的意味を考慮すると，r_j は次式で与えられる．

$$r_j=\begin{cases}\overline{X}_0\,p_0(0) & \cdots\cdots(j=0)\\ \overline{X}_0\,P_j^{\cdot*}(0,0) & \cdots\cdots(j\geq1)\end{cases} \qquad (2\cdot13)$$

一方，d_j は正規化定数 C を用いて次のように書ける．

$$d_j=C\,P_{j+1}^{*\cdot}(0,0) \qquad (j\geq0) \qquad (2\cdot14)$$

(2·9) で $\phi=\theta=0$ とおくと

$$G^{*\cdot}(z,0,0)=z\left[p_0(0)+G^{\cdot*}(z,0,0)\right] \qquad (2\cdot15)$$

即ち，$P_1^{*\cdot}(0,0)=p_0(0)$，$P_{j+1}^{*\cdot}(0,0)=P_j^{\cdot*}(0,0)$ $(j\geq1)$ (2·16)

を得る。又，(2·15)で $z=1$ とおくと，(2·10)，(2·14) より

$$1=\overline{X}_0\sum_{j=1}^{\infty}P_j^{*\cdot}(0,0)=\overline{X}_0\sum_{j=0}^{\infty}d_j/C=\overline{X}_0/C$$

従って，$C=\overline{X}_0$ が成立する。以上の議論より次式を得る．

$$r_j=d_j \qquad (j\geq0) \qquad (2\cdot17)$$

3．特性量の導出

本節では，待ち時間，系内客数，遊休期間，客の退去間隔等の系の特性量を導出する。

3.1 待ち時間

最初に実待ち時間について考える。Wを定常状態での実待ち時間を表わす確率変数とし，$w(x)$をWの$p.d.f.$とすると，$w(x)$は次式で与えられる。

$$w(x) = \gamma_0 \delta(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(x) * \overbrace{b(x) * \cdots * b(x)}^{(j-1)回} \qquad (3\cdot1)$$

但し，$\delta(x)$：ディラックのデルタ関数；$*$：コンボリューション；

$\gamma_j(x) \triangleq \bar{X}_0 p_j(0,x)$：客の到着直前（imbeddedな時点）での系内客数がj人でサービス中の客の残余サービス時間がxであるという結合事象の$p.d.f.$（$j \geq 1$，$x \geq 0$）；

$\gamma_0 = \bar{X}_0 p_0(0) = Pr[W=0]$。

従って
$$W^*(\theta) \triangleq \int_0^\infty e^{-\theta x} w(x)\,dx$$
$$= \gamma_0 + \bar{X}_0 G^{\cdot *}(B^*(\theta),0,\theta)/B^*(\theta) \qquad (3\cdot2)$$

(2·9)で$z = B^*(\theta)$とおくと次式が成立する。

$$B^*(\theta)\phi P_0^*(\phi) + (\phi+\theta) G^{**}(B^*(\theta),\phi,\theta)$$
$$= [1 - A^*(\phi)B^*(\theta)][G^{\cdot *}(B^*(\theta),0,\theta) + B^*(\theta)p_0(0)] \qquad (3\cdot3)$$

$G^{**}(B^*(\theta),-\theta,\theta) < \infty$に注意して，上式で$\phi = -\theta$とおくと

$$1 - A^*(-\theta)B^*(\theta) = \frac{-\theta P_0^*(-\theta)}{G^{\cdot *}(B^*(\theta),0,\theta)/B^*(\theta) + p_0(0)} \qquad (3\cdot4)$$

となり，(2·13)，(3·2)，(3·4)より次式を得る。

$$1-A^*(-\theta)B^*(\theta)=\frac{-\theta P_0^*(-\theta)\overline{X}_0}{W^*(\theta)} \tag{3·5}$$

ここで，$W^*(\theta)$，$P_0^*(\theta)$は共に少くとも領域$Re(\theta)\geq 0$で解析的で零点をもたないという事実を用いると，$W^*(\theta)$，$P_0^*(\theta)$は(3·5)の左辺のWiener-Hopf分解（W.-H.分解）から容易に求まる（後述の具体例を参照）。

次に仮り待ち時間について論じる。Vを定常状態の任意時点での仮り待ち時間（残余仕事量）を表わす確率変数とし，$v(x)$をVのp.d.f.とすると次式が成立する。

$$v(x)=P_0^*(0)\delta(x)+\sum_{j=1}^{\infty}P_j^{*\cdot}(0,x)*\overbrace{b(x)*\cdots*b(x)}^{(j-1)回} \tag{3·6}$$

従って　$V^*(\theta)\triangleq\int_0^\infty e^{-\theta x}v(x)dx$

$$=P_0^*(0)+G^{**}(B^*(\theta),0,\theta)/B^*(\theta) \tag{3·7}$$

(3·3)で$\phi=0$とおき整理すると

$$G^{**}(B^*(\theta),0,\theta)/B^*(\theta)=\rho W^*(\theta)[1-B^*(\theta)]/\theta\overline{X}_1 \tag{3·8}$$

となり，(2·12)，(3·7)，(3·8)より次式を得る。

$$V^*(\theta)=1-\rho+\rho W^*(\theta)\frac{1-B^*(\theta)}{\theta\overline{X}_1} \tag{3·9}$$

(3·5)のW.-H.分解から求めた$W^*(\theta)$を上式に代入すれば$V^*(\theta)$は確定する。

3.2 系内客数

まず，客の到着直前での系内客数分布$\{r_j\}$を考える。

(3.2)を変形すると次式が成立する。

$$\overline{X}_0 G^{*}(B^*(\theta),0,\theta)\ \left(\triangleq \sum_{j=1}^{\infty} R_j^*(\theta)B^*(\theta)^j\right)$$
$$= B^*(\theta)\left[W^*(\theta)-r_0\right] \qquad (3.10)$$

但し，$R_j^*(\theta)\triangleq\int_0^\infty e^{-\theta x}r_j(x)dx=\overline{X}_0 P_j^{*}(0,\theta)\quad (j\geq 1)$

(3.5)のW.-H.分解から求めた$W^*(\theta)$を(3.10)に代入後，(3.10)の右辺を$B^*(\theta)$の冪級数に展開し，$B^*(\theta)^j$の係数として$R_j^*(\theta)$を求める。このとき，$\{r_j\}$は次式で与えられる。

$$r_j=\begin{cases}\overline{X}_0 p_0(0)=W^*(\infty)\cdots(j=0)\\ R_j^*(0)\quad\cdots\cdots(j\geq 1)\end{cases} \qquad (3.11)$$

次に，任意時点での系内客数分布$\{p_j\}$を考える。

(3.8)より次式が成立する。

$$G^{**}(B^*(\theta),0,\theta)\ \left(\triangleq \sum_{j=1}^{\infty} P_j^{**}(0,\theta)B^*(\theta)^j\right)$$
$$=\rho W^*(\theta)B^*(\theta)\left[1-B^*(\theta)\right]/\theta\overline{X}_1 \qquad (3.12)$$

(3.5)から求めた$W^*(\theta)$を(3.12)に代入後，右辺を$B^*(\theta)$の冪級数に展開し，$B^*(\theta)^j$の係数として$P_j^{**}(0,\theta)$を求める。このとき$\{p_j\}$は次のように与えられる。

$$p_j=\begin{cases}P_0^*(0)=1-\rho\cdots(j=0)\\ P_j^{**}(0,0)\quad\cdots(j\geq 1)\end{cases} \qquad (3.13)$$

3.3 遊休期間と退去間隔

系がidle状態になってから次の客が到着するまでの時間区間を遊休期間という。Iを遊休期間の長さを表わす正値確率変数とし，$i(x)dx \triangleq P_r[x < I \leq x+dx \mid I > 0]$ $(x \geq 0)$とすると次式が成立する。

$$i(x) = p_1(x,0) / \int_0^\infty p_1(u_0,0)du_0 = p_1(x,0)/P_1^{*\cdot}(0,0) \quad (3.14)$$

従って
$$I^*(\phi) \triangleq \int_0^\infty e^{-\phi x} i(x)dx$$
$$= P_1^{*\cdot}(\phi,0)/P_1^{*\cdot}(0,0) \quad (3.15)$$

(2.4)′で$\phi = 0$とおくと
$$P_1^{*\cdot}(0,0) = p_0(0) \quad (3.16)$$

更に，(2.4)′，(2.13)，(3.15)，(3.16)より
$$I^*(\phi) = 1 - \phi P_0^*(\phi)\overline{X}_0/r_0 \quad (3.17)$$

を得る。また，平均遊休期間長は
$$E[I] = -dI^*(\phi)/d\phi\,|_{\phi=0} = (1-\rho)\overline{X}_0/r_0 \quad (3.18)$$

で与えられる。

次に定常状態での客の退去間隔について論じる。

Dを定常状態での客の退去間隔を表わす確率変数，$d(x)$をDのp.d.f.，$d(x \mid idle)$，$d(x \mid busy)$をそれぞれ客の退去直後で系がidle及びbusyであるという条件下でのDの条件付きp.d.f.とする。このとき次式が成立する。

$$d(x) = d_0\, d(x \mid idle) + (1-d_0)\, d(x \mid busy)$$
$$= r_0 \int_0^x i(x-y)b(y)dy + (1-r_0)b(x) \quad (3.19)$$

よって　$D^*(\theta) \triangleq \int_0^\infty e^{-\theta x} d(x)\,dx$

$$= \gamma_0 I^*(\theta) B^*(\theta) + (1-\gamma_0) B^*(\theta)$$

上式に(3.17)を代入すると次式を得る。

$$D^*(\theta) = B^*(\theta)[1 - \bar{X}_0 \theta P_0^*(\theta)] \qquad (3.20)$$

(3.5)のW.-H.分解から求めた$P_0^*(\theta)$を(3.20)に代入すれば$D^*(\theta)$が確定する。尚，平均退去間隔は，当然ながら

$$E[D] = -dD^*(\theta)/d\theta\,|_{\theta=0} = \bar{X}_1 + \bar{X}_0(1-\rho) = \bar{X}_0 \qquad (3.21)$$

で与えられる。

4．全稼働期間の解析

サーバーが連続的にbusy状態を継続している時間区間を全稼働期間という。ここでは，次の3個の確率変数の結合確率密度関数のラプラス変換・母関数表示を導出する。

Y：全稼働期間の長さ

M：全稼働期間中にサービスの完了した客数

I：全稼働期間に引き続く遊休期間の長さ

また，次の状態変数を導入する．

$$\left.\begin{array}{l} M(t)：区間[0,t]の間に到着した客数 \\ U(t)：時刻tでの残余到着時間 \\ V(t)：時刻tでの残余仕事量 \end{array}\right\} \quad (t \geq 0)$$

尚，時刻tでの残余仕事量とは，時刻t以降に新たな客の到

着がないと仮定した場合，時刻tから系がidle状態になるまでに要する時間として定義される。

ここで次のjoint p.d.f.を導入する。

$$p_m(u,v,t)\,du\,dv \triangleq Pr[M(t)=m,\ u<U(t)\leq u+du,\ v<V(t)\leq v+dv]$$
$$(m\geq 1,\ u,v\geq 0)$$

〈初期条件〉

$$p_m(u,v,t)=\begin{cases} a(u)b(v) & \cdots\ (m=1) \\ 0 & \cdots\cdots\ (m>1) \end{cases} \qquad (4\cdot 1)$$

この初期条件は，$t=0$でidle状態の系に客が到着し全稼働期間が始まることを意味している。

更に次のような制約条件を設定する。

〈制約条件〉

$V(t)=0$なる状態を吸収状態とする。即ち，一度$V(t)=0$となれば，それ以降は$M(t)$, $U(t)$, $V(t)$のいかなる変化も許されないものと仮定する。

このとき次式が成立する。

$$\left.\begin{array}{ll} Y=\inf\limits_{t\geq 0}\{t\mid V(t)=0\} & \\ M=M(Y) & I=U(Y) \end{array}\right\} \qquad (4\cdot 2)$$

$(M(t), U(t), V(t))$に関して可能な状態推移を考えると，全稼働期間中の系の振舞を規定する次の基本方程式が成立する。

$$\begin{cases} (\partial/\partial t - \partial/\partial u - \partial/\partial v)\, p_1(u,v,t) = 0 & (4\cdot3) \\ (\partial/\partial t - \partial/\partial u - \partial/\partial v)\, p_m(u,v,t) & \\ \qquad = a(u)\int_0^v p_{m-1}(0,w,t)\, b(v-w)\, dw \quad (m \geq 2) & (4\cdot4) \end{cases}$$

ここで次の母関数を導入し

$$P(u,v,t,z) \triangleq \sum_{m=1}^{\infty} p_m(u,v,t)\, z^m$$

(4·1), (4·3), (4·4) を書き換えると

$$\begin{cases} (\partial/\partial t - \partial/\partial u - \partial/\partial v)\, P(u,v,t,z) & \\ \qquad = a(u)\, z \int_0^v P(0,w,t,z)\, b(v-w)\, dw & (4\cdot5) \\ \text{初期条件} \qquad P(u,v,0,z) = z\, a(u)\, b(v) & (4\cdot6) \end{cases}$$

を得る。

次のようなラプラス変換を定義する。

$$P^*(\phi,\theta,\eta,z) \triangleq \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty P(u,v,t,z)\, e^{-(\phi u+\theta v+\eta t)}\, du\, dv\, dt$$

$$Q^*(\theta,\eta,z) \triangleq \int_0^\infty\int_0^\infty P(0,v,t,z)\, e^{-(\theta v+\eta t)}\, dv\, dt$$

$$R^*(\phi,\eta,z) \triangleq \int_0^\infty\int_0^\infty P(u,0,t,z)\, e^{-(\phi u+\eta t)}\, du\, dt$$

我々が導出すべき量は

$$R^*(\phi,\eta,z) = E[e^{-I\phi} e^{-Y\eta} z^M]$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \sum_{m=1}^{\infty} p_m(u,0,t)\, z^m e^{-(\phi u+\eta t)}\, du\, dt \qquad (4\cdot7)$$

である。

(4·6)を考慮して(4·5)をラプラス変換すると

$$(\eta-\phi-\theta)P^*(\phi,\theta,\eta,z) + R^*(\phi,\eta,z) - z A^*(\phi) B^*(\theta)$$

$$+ Q^*(\theta,\eta,z)[1 - z A^*(\phi) B^*(\theta)] = 0 \qquad (4\cdot8)$$

となる。上式で$P^*(\phi,\theta,\eta,z)$を消去する為に，$\theta=\eta-\phi$（但し，$Re(\eta)>Re(\phi)>0$）とおくと次式を得る。

$$1-zA^*(\phi)B^*(\eta-\phi)=\frac{1-R^*(\phi,\eta,z)}{1+Q^*(\eta-\phi,\eta,z)} \qquad (4\cdot9)$$

所望の$R^*(\phi,\eta,z)$は，上式の左辺の一般化W.-H.分解を実行することにより求まる。

〈一般化W.-H.分解（Schassberger[9]）〉

与えられた$|z|<1$と実数$\eta\geq0$に対して(4·9)の左辺は次のように一意に分解できる。

$$1-zA^*(\phi)B^*(\eta-\phi)=F_+(\phi,\eta,z)F_-(\phi,\eta,z) \qquad (4\cdot10)$$

但し

$F_+(\phi,\eta,z)$，$F_-(\phi,\eta,z)$は，それぞれ領域$Re(\phi)\geq0$及び$Re(\phi)\leq\eta$でϕに関して解析的で零点をもたないような複素関数である。

以上の議論より，次の対応関係が成立することが結論される。

$$\left.\begin{aligned}1-R^*(\phi,\eta,z)&=K(\eta,z)F_+(\phi,\eta,z)\\ [1+Q^*(\eta-\phi,\eta,z)]^{-1}&=F_-(\phi,\eta,z)/K(\eta,z)\end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot11)$$

ここで，未知関数$K(\eta,z)$は，条件$R^*(\infty,\eta,z)=0$を用いて確定できることに注意されたい。

5．具体例

The GI/Kn/1 queue

$A^*(\theta)$：任意，$B^*(\theta)=B_1^*(\theta)/B_2^*(\theta)$，$\overline{X}_0=-A^{*(1)}(0)$，$\overline{X}_1=-B^{*(1)}(0)$

$\rho=\overline{X}_1/\overline{X}_0<1$とする。但し，$B_2^*(\theta)$は$\theta$の$n$次の多項式で$\theta^n$の係数は1であるとする。又，$B_1^*(\theta)$は$\theta$の高々$n-1$次の多項式である。

i) 待ち時間

(3·5)のW.-H.分解を行う。

$$1-A^*(-\theta)B^*(\theta)=\frac{B_2^*(\theta)-A^*(-\theta)B_1^*(\theta)}{B_2^*(\theta)}=\frac{-\theta P_0^*(-\theta)\overline{X}_0}{W^*(\theta)} \qquad (5\cdot1)$$

$B^*(\theta)$は少くとも$Re(\theta)\geq 0$で解析的であるから，$B_2^*(\theta)$のn個の零点はすべて負の実部をもつ。従って$B_2^*(\theta)$は$W^*(\theta)$に属する。次に$f(\theta)\triangleq B_2^*(\theta)-A^*(-\theta)B_1^*(\theta)$の零点を考える。$f(\theta)$は自明な零点$\theta=0$をもつ($\because B_2^*(0)=B_1^*(0)$)。更に，$f(\theta)$は実部がすべて負である$n$個の零点$\theta_i$ $(1\leq i\leq n)$をもっている[2]。

従って，(5·1)は次のように因数分解できる。

$$1-A^*(-\theta)B^*(\theta)=\left[\frac{B_2^*(\theta)-A^*(-\theta)B_1^*(\theta)}{\theta\prod_{i=1}^{n}(\theta-\theta_i)}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}(\theta-\theta_i)}{B_2^*(\theta)}\right]=\frac{-P_0^*(-\theta)\overline{X}_0}{W^*(\theta)}$$

$$\therefore \quad W^*(\theta)=K\,B_2^*(\theta)\Big/\prod_{i=1}^{n}(\theta-\theta_i) \qquad (K：未知定数)$$

$$P_0^*(\theta)=K\left[B_2^*(-\theta)-A^*(\theta)B_1^*(-\theta)\right]\Big/(-1)^n\overline{X}_0\,\theta\prod_{i=1}^{n}(\theta+\theta_i)$$

また，$W^*(0)=1$ より　$K=(-1)^n \prod_{i=1}^n \theta_i / B_2^*(0)$.

従って

$$W^*(\theta)=\frac{B_2^*(\theta)}{B_2^*(0)}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta_i}{\theta_i-\theta}\right) \tag{5·2}$$

$$P_0^*(\theta)=\frac{B_2^*(-\theta)-A^*(\theta)B_1^*(-\theta)}{\bar{X}_0 B_2^*(0)\theta}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta_i}{\theta+\theta_i}\right) \tag{5·3}$$

を得る。$B_2^*(\theta)$ の θ^n の係数 $=1$ に注意すると

$$\gamma_0=W^*(\infty)=(-1)^n \prod_{i=1}^n \theta_i / B_2^*(0) \tag{5·4}$$

一方，仮り待ち時間は

$$V^*(\theta)=1-\rho+\rho W^*(\theta)[1-B^*(\theta)]/\theta\bar{X}_1$$

$$=1-\rho+\rho\frac{B_2^*(\theta)-B_1^*(\theta)}{\bar{X}_1 B_2^*(0)\theta}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta_i}{\theta_i-\theta}\right) \tag{5·5}$$

で与えられる。

ii) 遊休期間と退去間隔

遊休期間は次式で与えられる。

$$I^*(\theta)=1-\bar{X}_0\theta P_0^*(\theta)/\gamma_0$$

$$=1-(-1)^n\frac{B_2^*(-\theta)-A^*(\theta)B_1^*(-\theta)}{\prod_{i=1}^n(\theta+\theta_i)} \tag{5·6}$$

一方，退去間隔は次のようになる。

$$D^*(\theta)=B^*(\theta)[1-\bar{X}_0\theta P_0^*(\theta)]$$

$$=B^*(\theta)\left[1-\frac{B_2^*(-\theta)-A^*(\theta)B_1^*(-\theta)}{B_2^*(0)}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta_i}{\theta+\theta_i}\right)\right] \tag{5·7}$$

iii) 全稼働期間

(4·9)の一般化W.－H.分解を行う。

$$1-zA^*(\phi)B^*(\eta-\phi)=[B_2^*(\eta-\phi)-zA^*(\phi)B_1^*(\eta-\phi)]/B_2^*(\eta-\phi) \qquad (5\cdot8)$$

$|z|<1$と実数$\eta\geq 0$に対して

$$g(\phi)\triangleq B_2^*(\eta-\phi)-zA^*(\phi)B_1^*(\eta-\phi)$$

のϕに関する零点を考える。$g(\phi)$は，$Re(\phi_i(z,\eta))>\eta\geq 0$なる$n$個の零点 $\phi_i(z,\eta)=\eta-\xi_i(z,\eta)$ $(1\leq i\leq n)$をもつ。但し，$\xi_i(z,\eta)$は，$Re(\xi_i(z,\eta))<0$なる$h(\xi)\triangleq B_2^*(\xi)-zA^*(\eta-\xi)\times B_1^*(\xi)$の零点である[2]。

従って，(5·8)は次のように因数分解できる。

$$1-zA^*(\phi)B^*(\eta-\phi)=F_+(\phi,\eta,z)F_-(\phi,\eta,z)$$

$$=\left[\frac{B_2^*(\eta-\phi)-zA^*(\phi)B_1^*(\eta-\phi)}{\prod_{i=1}^{n}(\phi-\phi_i(z,\eta))}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}(\phi-\phi_i(z,\eta))}{B_2^*(\eta-\phi)}\right]$$

よって

$$R^*(\phi,\eta,z)=1-\frac{[B_2^*(\eta-\phi)-zA^*(\phi)B_1^*(\eta-\phi)]K(\eta,z)}{\prod_{i=1}^{n}(\phi-\eta+\xi_i(z,\eta))}$$

又，$R^*(\infty,\eta,z)=0$より　　$K(\eta,z)\equiv(-1)^n$

従って

$$R^*(\phi,\eta,z)=E[e^{-I\phi}e^{-Y\eta}z^M]$$

$$=1-(-1)^n\frac{B_2^*(\eta-\phi)-zA^*(\phi)B_1^*(\eta-\phi)}{\prod_{i=1}^{n}(\phi-\eta+\xi_i(z,\eta))} \qquad (5\cdot9)$$

更に，$R^*(0,\eta,z)=E[e^{-Y\eta}z^M]$

$$=1-[B_2^*(\eta)-zB_1^*(\eta)]/\Pi_{i=1}^n(\eta-\xi_i(z,\eta)) \qquad (5.10)$$

を得る。

(5.10)より次式が成立する。

$$R^*(0,0,z)=E[z^M]=1-B_2^*(0)(1-z)/\Pi_{i=1}^n(-\xi_i(z,0)) \qquad (5.11)$$

$$R^*(0,\eta,1)=E[e^{-Y\eta}]=1-[B_2^*(\eta)-B_1^*(\eta)]/\Pi_{i=1}^n(\eta-\xi_i(1,\eta)) \qquad (5.12)$$

最後に，$I^*(\phi)=R^*(\phi,0,1)=E[e^{-I\phi}]$ を求める。

ここで，$\xi_i(1,0)=\theta_i$ $(1\leq i\leq n)$ に注意すると (5.9)より

$$I^*(\theta)=1-(-1)^n\frac{B_2^*(-\theta)-A^*(\theta)B_1^*(-\theta)}{\Pi_{i=1}^n(\theta+\theta_i)} \qquad (5.13)$$

$$(=(5.6))$$

が成立する．但し，上式では変数ϕをθで置き換えていることに注意されたい。尚，θ_i $(1\leq i\leq n)$ は，前述の$f(\theta)=B_2^*(\theta)-A^*(-\theta)B_1^*(\theta)$ のn個の零点である。

以上の諸結果は，文献(2)のpp. 321−328の諸結果と一致している。尚，$K_m/G/1$，$M/G/1$，$GI/M/1$ 等への適用も可能であるが紙面の都合上省略する。

6．あとがき

以上本稿では，補助変数として客の残余到着時間と残余サービス時間を選び GI/G/1 の基本方程式を導き，これを基に Wiener-Hopf のスペクトル分解法を用いて，定常状態での系の諸特性量を導出する手順を示した。

この手順は，$A^*(\theta)$, $B^*(\theta)$ が θ の有理関数の場合には有効に機能する。しかし，5節の具体例からも推測できるように，（一般化）W.-H.分解を実行する際に生じる零点を具体的に求める作業はかなりやっかいな問題である。

この種の問題点を回避する為には，待ち行列系の諸特性を数値解析的に求める Neuts 流のアルゴリズム的接近法[14]等が必要であると考えられる。

尚，蛇足ながら，本稿で示した解法は，実待ち時間の分布関数が満足する Lindley の積分方程式をスペクトル分解的に解く Smith の解法[5]と本質的には全く等価であることに注意されたい。

又，Keilson and Kooharian は，本稿の解法とは双対的に，客の経過到着時間と経過サービス時間を補助変数にした場合を論じているが，その詳細は文献(7)を参照されたい。

References

(1) Takács, L., Introduction to the Theory of Queues, Oxford Univ. Press (1962)

(2) Cohen, J. W., The Single Server Queue, North-Holland (1969)

(3) Kleinrock, L., Queueing Systems: Vol. I Theory, Wiley (1974)

(4) Lindley, D.V., The theory of queues with a single server, Proc. Camb. Phil. Soc., 48, 277-289 (1952)

(5) Smith, W.L., On the distribution of queueing times, ibid., 49, 449-461 (1953)

(6) Cox, D.R., The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables, ibid., 51, 433-441 (1955)

(7) Keilson, J. and A. Kooharian, On the general time dependent queue with a single server, Ann. Math. Statist., 33, 767-791 (1962)

(8)Takács, L., The limiting distribution of the virtual waiting time and the queue size for a single-server queue with recurrent input and general service times, Sankhyā, Ser. A25, 91-100 (1963)

(9) Schassberger, R., On the waiting time in the queueing system GI/G/1, Ann. Math. Statist., 41, 182-187(1970)

(10) Henderson, W., Alternative approaches to the analysis of the M/G/1 and G/M/1 queues, J. Opns. Res. Soc. Japan, 15, 92-101 (1972)

(11) Hokstad, P., Asymptotic be haviour of the $E_k/G/1$ queue with finite waiting room, J. Appl. Prob., 14, 358-366 (1977)

(12) Hokstad, P., Approximations for the M/G/m queue, Opns. Res., 26, 510-523 (1978)

(13) Marshall, K.T., Some relationships between the distributions of waiting time, idle time, and interoutput time in the GI/G/1 queue, SIAM J. Appl. Math., 16, 324-327 (1968)

(14) Neuts, M.F., Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach, The John Hopkins Univ. Press (1981)

(15) 能上，蔦田，星子，　補助変数法によるM/G/1の解析，信学技報SE 81-3　(昭56-04)

(16) ――――――，　補助変数法によるGI/M/1の解析，信学技報SE 81-4　(昭56-04)

(17) 蔦田，能上，星子，　補助変数法によるGI/M/mの解析：I、解法A，　信学技報SE81-22 (昭56-06)