数理解析研究所講究録
453巻 1982年 265-278

べキ級数による非線形微分方程式の数値計算

早大 理工　　室谷義昭

1. つぎの Thermal ignition problem を考える：

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + Q\rho A \exp(-E/(RT)) = 0 & \text{in } V, \\ T = T_a & \text{on } S. \end{cases}$$

この方程式は

$$(2)\quad \theta = (E/(RT_a^2))(T - T_a), \quad \varepsilon = RT_a/E$$

とおくと

$$(3)\quad \exp(-E/(RT)) = \exp(-E/(RT_a))\exp(\theta/(1+\varepsilon\theta))$$

という関係よりつぎの形に変形される：

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta\theta + \lambda \exp(\theta/(1+\varepsilon\theta)) = 0 & \text{in } V, \\ \theta = 0 & \text{on } S. \end{cases}$$

さらに，対称性等を加味すると

$$(5)\quad \begin{cases} -u'' - \frac{n-1}{r}u' = \lambda \exp(u/(1+\varepsilon u)), & 0 < r < 1, \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

を得る。ただし，n は V の属する次元数，λ は正定数。

$u(r)$ は $r=0$ で最大となるので，$u(0)=s$ とすると λ，ε と s の間に関係式が考えられる。ε を固定したとき，$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{d^2\lambda}{ds^2}=\overbrace{0}^{\frac{d^3\lambda}{ds^3}\neq 0}$ となる critical parameter ε_0，λ_0 と s_0 を求める問題が近年注目されている。気体のはいっている容器の表面の絶対温度が0に相当する $\varepsilon=0$ の場合には，十分大きい $\lambda>0$ に対しては解が存在しないのに，$\varepsilon>0$ の場合にはどんな λ に対しても解が存在し，上の ε_0 に対しては λ が λ_0 に近ずくと容器内の気体の最高温度 s が急激に上昇するという意味でもこの ε_0 を決定する問題はいわゆる "Thermal ignition problem" として興味を引き付けている。たとえば，1977年，Fradkin and Wake[1] は $0\leqq\varepsilon<\varepsilon_0$ となる十分小さい ε に対してのみ $\frac{d\lambda}{ds}=0$ かつ $\frac{d^2\lambda}{ds^2}\neq 0$ となる turning point (limit point ともいう) (λ, s) が存在し，この点は $\varepsilon\to 0$ のとき単調に $\varepsilon=0$ のときの turning point に収束することを示し，Boddington, Gray and Wake[2] は $\varepsilon_0\leqq 0.25$ を，また，Wills, Back and Purdon[3] は $\varepsilon_0\fallingdotseq 0.2$ を示した。ついで，1978年，Bazley and Wake[4] は問題 (5) の代りに，方程式の右辺を $\lambda\exp(u/(1+\varepsilon s))$ とおき直したモデルだと $n=1, 2$ の場合は解析的に求められ，$n=1$ のとき $\varepsilon_0\fallingdotseq 0.2138$，$n=2$ のとき $\varepsilon_0\fallingdotseq 0.17323$ を得て，(5) の問題への接近を試みた。1980年，J. Sprekels[5] は $n=3$ のとき，$\varepsilon_0\geqq 0.237$ となることを 4000個の subinterval

等を使って示し，$\varepsilon=0.237$ のとき $s \fallingdotseq 4.8$，$\lambda \fallingdotseq 5$ を得たが $\varepsilon=0.238$ のとき round-off error のため正確さんは失敗したが，$\varepsilon=0.240$ のとき turning point が生じないことを数値的に観察して $0.238<\varepsilon_0<0.240$ を予測している。

今回べき級数による方法で計算を実行したところ高精度の数値を得ることができた。この方法について述べる。

2. まず，つぎの問題を考える：

(6) $\begin{cases} F(\lambda, s)=0 \text{，ただし，} F(\lambda, s) \text{は必要なだけ滑らか} \\ \text{であり，} F_\lambda=\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} \text{の意味とするとき，} F_\lambda(\lambda, s) \neq 0 \text{とする。} \end{cases}$

このとき，陰関数の存在定理により，$\lambda=\lambda(s)$ と表わされ，

(7) $F_\lambda(\lambda, s)\lambda_s+F_s(\lambda, s)=0$

であるから，

(8) $\lambda_s=0 \iff F_s(\lambda, s)=0$，ここに，$\lambda=\lambda(s)$.

一方，(7) の両辺を s で微分すると

(9) $F_{\lambda\lambda}(\lambda, s)\lambda_s^2+2F_{\lambda s}(\lambda, s)\lambda_s+F_\lambda(\lambda, s)\lambda_{ss}+F_{ss}(\lambda, s)=0$

であるから，

(10) $\lambda_s=0$ とすると $F_\lambda(\lambda, s)\lambda_{ss}+F_{ss}(\lambda, s)=0$.

したがって，

(11) $\lambda_s=0$ のとき，$\lambda_{ss} \neq 0 \iff F_{ss}(\lambda, s) \neq 0$，ただし $\lambda=\lambda(s)$.

となる。$\lambda_s=0$ かつ $\lambda_{ss} \neq 0$ となる点 (λ, s) を求めるには上記の事から反復法が適用可能となる。

つぎに，

(12) $\begin{cases} F(\lambda, \varepsilon, s)=0 \text{，ただし，} F(\lambda, \varepsilon, s) \text{ は必要なだけ滑ら} \\ \text{かであり，} F_\lambda(\lambda, \varepsilon, s) \neq 0 \text{ とする，} \end{cases}$

を考えよう。陰関数の存在定理により，$\lambda=\lambda(\varepsilon, s)$ と表わされ，εを固定したとき，

(13) $\begin{cases} \lambda_s=0 \iff F_s(\lambda, \varepsilon, s)=0 \\ \lambda_s=0 \text{ のとき，} \lambda_{ss}=0 \iff F_{ss}(\lambda, \varepsilon, s)=0, \end{cases}$

を得る。そこで，更に，

(14) $F_{s\lambda}(\lambda, \varepsilon, s)\lambda_\varepsilon+F_{s\varepsilon}(\lambda, \varepsilon, s)\neq 0$, ここに，$\lambda=\lambda(\varepsilon, s)$, $F_\lambda(\lambda, \varepsilon, s)\lambda_\varepsilon+F_\varepsilon(\lambda, \varepsilon, s)=0$,

を仮定すると，再び陰関数の存在定理により，$\varepsilon=\varepsilon(s)$ と表わされ，

(15) $\lambda_s=0$ のとき，$\{F_{s\lambda}(\lambda, \varepsilon, s)\lambda_\varepsilon+F_{s\varepsilon}(\lambda, \varepsilon, s)\}\varepsilon_s+F_{ss}(\lambda, \varepsilon, s)=0$,

となるので，

(16) $\lambda_s=0$ のとき，$\lambda_{ss}=0 \iff F_{ss}(\lambda, \varepsilon, s)=0 \iff \varepsilon_s=0$, ただし，$\lambda=\lambda(\varepsilon, s)$, $\varepsilon=\varepsilon(s)$,

を得る。更に，

(17) $\lambda_s=\lambda_{ss}=0$ のとき，$F_\lambda(\lambda, \varepsilon, s)\lambda_{sss}+F_{sss}(\lambda, \varepsilon, s)=0$,

であるから

(18) $\lambda_s=\lambda_{ss}=0$ のとき，$\lambda_{sss}\neq 0 \iff F_{sss}(\lambda, \varepsilon, s)\neq 0$,

となる。$\lambda_s=\lambda_{ss}=0$ かつ $\lambda_{sss}\neq 0$ となる $(\lambda, \varepsilon, s)$ を求めるには上記の事から反復法が適用可能となる。実際，

<u>$F(\lambda, \varepsilon, s)=0$ となる $\lambda=\lambda(\varepsilon, s)$ の計算：</u>

$$(19)\quad \begin{cases} \lambda^{(0)}: \text{適当な近似値} \\ \lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - \left[F_\lambda(\lambda^{(m)}, \varepsilon, s)\right]^{-1} F(\lambda^{(m)}, \varepsilon, s), \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

とすると

$$(20)\quad \lambda^{(m)} \longrightarrow \lambda = \lambda(\varepsilon, s) \quad \text{as} \quad m \to \infty.$$

<u>$F_s(\lambda(\varepsilon, s), \varepsilon, s) = 0$ となる $\varepsilon = \varepsilon(s)$ の計算:</u>

$$(21)\quad \begin{cases} \varepsilon^{(0)}: \text{適当な近似値} \\ \varepsilon^{(m+1)} = \varepsilon^{(m)} - \left[-F_{s\lambda}(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s) \cdot \dfrac{F_\varepsilon(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s)}{F_\lambda(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s)} + F_{s\varepsilon}(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s)\right]^{-1} \\ \qquad \times F_s(\lambda(\varepsilon^{(m)}, s), \varepsilon^{(m)}, s), \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

とすると,

$$(22)\quad \varepsilon^{(m)} \longrightarrow \varepsilon = \varepsilon(s) \quad \text{as} \quad m \to \infty.$$

<u>$F_{ss}(\lambda(\varepsilon(s), s), \varepsilon(s), s) = 0$ となる s の計算:</u>

$$(23)\quad \begin{cases} s^{(0)}: \text{適当な近似値} \\ s^{(m+1)} = s^{(m)} - \left[F_{sss}(\lambda(\varepsilon(s^{(m)}), s^{(m)}), \varepsilon(s^{(m)}), s^{(m)})\right]^{-1} F_{ss}(\lambda(\varepsilon(s^{(m)}), s^{(m)}), \varepsilon(s^{(m)}), s^{(m)}), \\ \qquad m = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

とすると

$$(24)\quad s^{(m)} \longrightarrow s \quad \text{as} \quad m \to \infty.$$

[注意] (12) 式の条件 $F_\lambda(\lambda, \varepsilon, s) \neq 0$ と (14) 式の条件は,

$$(25)\quad F_\lambda(\lambda, \varepsilon, s) F_{s\varepsilon}(\lambda, \varepsilon, s) - F_{s\lambda}(\lambda, \varepsilon, s) F_\varepsilon(\lambda, \varepsilon, s) \neq 0$$

と置き直し, 直接, $\lambda = \lambda(s)$, $\varepsilon = \varepsilon(s)$ と考えても同様な議論ができる。

3. つぎに, Thermal ignition problem (5) の critical

parameter $(\lambda, \varepsilon, s)$ をべき級数による手法を適用して求めるための若干の準備をしよう。まず，(5) 式をつぎのように変形しておく：

$$(26)\quad \begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r}u' = \exp\left[(s-u)/\{1+\varepsilon(s-u)\}\right], & 0<r<\sqrt{\lambda}, \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u(\sqrt{\lambda}) = s. \end{cases}$$

いま，

$$(27)\quad f(s-u) = \exp\left[(s-u)/\{1+\varepsilon(s-u)\}\right], \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(1+\varepsilon s),$$

とおくと，

$$(28)\quad \frac{s-u}{1+\varepsilon(s-u)} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon\{1+\varepsilon(s-u)\}} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon s)}\cdot\frac{1}{1-\tilde{\varepsilon}u}$$

となるので

$$(29)\quad |u| < \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} = s + \frac{1}{\varepsilon}$$

のとき，

$$(30)\quad \frac{1}{1-\tilde{\varepsilon}u} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}^k u^k$$

と収束するべき級数に展開できるので，

$$(31)\quad \frac{s-u}{1+\varepsilon(s-u)} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon s)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\varepsilon}^k u^k = \frac{s}{1+\varepsilon s} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon s)}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varepsilon}^k u^k,$$

となる。一方，

$$(32)\quad \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon s)}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varepsilon}^k u^k \leqq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varepsilon}^k u^k = \frac{1+\varepsilon s}{\varepsilon\{1+\varepsilon(s-u)\}}$$

より，

$$(33)\quad \tilde{f}(s-u) = \exp\left[(1+\varepsilon s)/(\varepsilon\{1+\varepsilon(s-u)\})\right]$$

とおくと，$\tilde{f}(s-u)$ は u が $[0, s+\frac{1}{\varepsilon})$ に属するとき収束するべき級数で表わされ，しかも，

(34) $\quad |f_k| \leqq \tilde{f}_k$, ここに, $f(s-u)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k u^k$, $\tilde{f}(s-u)=\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k u^k$,

が導かれる。そこで,

(35) $\quad u(r)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{k+2}$

とおくと (26) より,

(36) $\quad r^2 u'' + (n-1) r u' = r^2 f(s-u)$

となるので, 両辺の r^{j+2} の係数を比較することにより,

(37) $$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2n} f_0, \quad a_1 = 0, \\ a_j = \dfrac{1}{(j+2)(j+n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{[\frac{j}{2}]} f_k \sum_{l_1+\cdots+l_k=j-2k} a_{l_1}\cdots a_{l_k}, \quad j \geqq 2, \end{cases}$$

を得る。一方,

(38) $$\begin{cases} \tilde{F}(r,\tilde{u}) \equiv \tilde{u} - |a_0| - r^2 \tilde{f}(s-r^2\tilde{u}) = 0 \\ \tilde{u}(0) = |a_0| \end{cases}$$

を考えると,

(39) $\quad \tilde{F}(0,|a_0|)=0, \quad \tilde{F}_{\tilde{u}}(0,|a_0|)=1 \neq 0$

であるので, 陰関数の存在定理により (38) は $r=0$ の近傍で正則な解 $\tilde{u}(r)$ をただ1つもつ。そこで

(40) $\quad \tilde{u}(r)=\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k r^k$

と収束するべき級数に展開し, これを方程式 (38) に代入すると,

(41) $$\begin{cases} \tilde{a}_0 = |a_0|, \quad \tilde{a}_1 = 0, \\ \tilde{a}_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{[\frac{j}{2}]} \tilde{f}_k \sum_{l_1+\cdots+l_k=j-2k} \tilde{a}_{l_1}\cdots\tilde{a}_{l_k}, \quad j \geqq 2, \end{cases}$$

なる関係を得るので, (34), (37) により,

(42) $\quad |a_j| \leq \tilde{a}_j \quad , \quad j \geq 0,$

つまり，べキ級数（35）は収束する優級数をもつので，$r=0$ の近傍で収束する。（上記証明法は亀高［6］を参照した。）

もし，$r=\sqrt{\lambda}$ におけるその和が有限，つまり，

(43) $\quad u(\sqrt{\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\sqrt{\lambda})^{k+2} = s < +\infty$

とすれば，べキ級数（35）は［0, $\sqrt{\lambda}$］で収束することになる。

ところで，（26）により $u(r)$ は偶関数であるので，

(44) $\quad z = \frac{r^2}{4n} \quad , \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{4n}$

と変換すると，$u(r)$ は z の関数となる。これを $\tilde{u}(z)$ とおくと，

(45) $\quad \tilde{u}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k z^k$

は［0, $\tilde{\lambda}$］で収束する z のべキ級数となる。

つぎに，

(46) $\quad u(\sqrt{\lambda}) = s \quad$ となる $\lambda = \lambda(s)$

に対し，

(47) $$\begin{cases} u_s'' + \frac{n-1}{r} u_s' = f_u(s-u)(1-u_s) \\ u_s(0) = u_s'(0) = 0, \quad u_s(\sqrt{\lambda}) = 1 \end{cases}$$

となる解 $u_s(r)$ を考える。ここでは $u_s(r) = \frac{\partial u}{\partial s}(r)$ とはまだ考えない。$f_u(s-u)$ は［0, $\sqrt{\lambda}$］でべキ級数に展開されるので，前と同様な議論から，（47）の解 $u_s(r)$ は $r=0$ の近傍で収束するべキ級数に展開される。

もし，$r=\sqrt{\lambda}$ におけるその和が有限，つまり，

(48) $\quad u_s(\sqrt{\lambda})=1$

となれば，$u_s(r)$ は $[0,\sqrt{\lambda}]$ で収束するべき級数で表わされ，

(49) $\quad \frac{\partial}{\partial s}u(r)=u_s(r)\ ,\qquad 0\leqq r\leqq\sqrt{\lambda}$

の関係がいえる。これから $u_s=\frac{\partial u}{\partial s}$ は $[0,\hat{\lambda}]$ で収束する z のべき級数で表わされる。

以下，全く同様にして，$u_\varepsilon(r)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}u(r)$，$u_{ss}(r)=\frac{\partial^2}{\partial s^2}u(r)$，$u_{s\varepsilon}(r)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial\varepsilon}u(r)$，$u_{sss}(r)=\frac{\partial^3}{\partial s^3}u(r)$ 等に対し，各 r のべき級数を考えることができ，したがって，各 z のべき級数も考えることができる，

［注意］べき級数の収束半径が不足している場合には原点を移動したべき級数を考える。

4. 以上の準備のもとで，

(50) $\quad F(\hat{\lambda},\varepsilon,s)\equiv\tilde{u}(\hat{\lambda})-s=0$，

とおくと $\tilde{u}(z)$ のべき級数 (46) の係数 $\{\tilde{u}_n\}$ は $\hat{\lambda}$ に関係しないので，

(51) $\quad F_{\hat{\lambda}}(\hat{\lambda},\varepsilon,s)=\tilde{u}'(\hat{\lambda})$，

となる。一方，$z\tilde{u}'(z)=\frac{1}{2}ru'(r)$ より $\tilde{u}'(\hat{\lambda})=\frac{1}{2\hat{\lambda}}\sqrt{\lambda}\,u'(\sqrt{\lambda})$ となるが，

(26) より，

(52) $\quad (\sqrt{\lambda})^{n-1}u'(\sqrt{\lambda})=\int_0^{\sqrt{\lambda}}r^{n-1}f(s-u)\,dr$

となるので，

(53) $\quad u'(\sqrt{\lambda})=\frac{1}{(\sqrt{\lambda})^{n-1}}\int_0^{\sqrt{\lambda}}r^{n-1}f(s-u)\,dr>0$

がいえる。よって，

(54) $$F_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda},\varepsilon,s)=\tilde{u}'(\tilde{\lambda})=\frac{1}{2\tilde{\lambda}}\sqrt{\lambda}\,u'(\sqrt{\lambda})>0$$

となる。また，(50)より，

(55) $$\begin{cases} F_s(\tilde{\lambda},\varepsilon,s)=\tilde{u}_s(\tilde{\lambda})-1, & F_\varepsilon(\lambda,\varepsilon,s)=\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{\lambda}), \quad F_{s\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda},\varepsilon,s)=\tilde{u}_s'(\tilde{\lambda}), \\ F_{ss}(\tilde{\lambda},\varepsilon,s)=\tilde{u}_{ss}(\tilde{\lambda}), & F_{s\varepsilon}(\tilde{\lambda},\varepsilon,s)=\tilde{u}_{s\varepsilon}(\tilde{\lambda}), \quad F_{sss}(\tilde{\lambda},\varepsilon,s)=\tilde{u}_{sss}(\tilde{\lambda}). \end{cases}$$

したがって

(56) $$\tilde{u}'(\tilde{\lambda})\cdot\tilde{u}_{s\varepsilon}(\tilde{\lambda})-\tilde{u}_s'(\tilde{\lambda})\tilde{u}_\varepsilon\neq 0 \quad \text{かつ} \quad \tilde{u}_{sss}(\tilde{\lambda})\neq 0$$

のとき，$\tilde{\lambda}_s=\tilde{\lambda}_{ss}=0$ かつ $\tilde{\lambda}_{sss}\neq 0$ となる点 $(\tilde{\lambda},\varepsilon,s)$ は反復法で計算できる。

5．つぎに，べき級数（46）の係数 $\{\tilde{u}_n\}$ 等の計算を考えよう。まず，

(57) $$z=\frac{r^2}{4n},\quad \alpha=\frac{1}{4}ru'(r),\quad \beta=\frac{1}{8}r^2f(s-u)$$

とおくと $ru'(r)$，$r^2f(s-u)$ はそれぞれ偶関数であるから，α，β は偶関数となるので z の関数と考えられる。u も z の関数と考えられるので，$u=u(z)$，$\alpha=\alpha(z)$，$\beta=\beta(z)$ と改めておくと（26）式よりつぎの関係を得る。

(58) $$\begin{cases} z\alpha'=\beta-\dfrac{n-2}{2}\alpha, & \alpha(0)=\beta(0)=0, \\ z\beta'=\beta-\gamma\cdot\beta, & \beta'(0)=\dfrac{n}{2}f(s), \\ \gamma=\dfrac{2\alpha}{\{1+\varepsilon(s-u)\}^2}, & \left(v=\{1+\varepsilon(s-u)\}^2 \text{ とおくと } \gamma\cdot v=2\alpha\right), \\ zu'=2\alpha. \end{cases}$$

そこで，α，β，γ，v，u をそれぞれ z のべき級数

$$(59)\quad \begin{cases} \alpha(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k, & \gamma(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k z^k \\ \beta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k z^k, & v(z)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k z^k \\ u(z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k z^k, & \beta_1=\frac{n}{2}f(s) \end{cases}$$

とおくと(58)より

$$(60)\quad \begin{cases} k\alpha_k=\beta_k-\frac{n-2}{2}\alpha_k, & \beta_1=\frac{n}{2}f(s),\ \sum_{l=0}^{k-1}\gamma_{k-l}v_l=2\alpha_k \\ k\beta_k=\beta_k-\sum_{l=1}^{k-1}\gamma_{k-l}\beta_l, & v_k=\varepsilon^2\sum_{l=1}^{k-1}u_{k-l}u_l-2\varepsilon(1+\varepsilon s)u_k,\ k\geqq 2, \\ ku_k=2\alpha_k, & v_0=(1+\varepsilon s)^2,\ v_1=-2\varepsilon(1+\varepsilon s)u_1 \end{cases}$$

となるので，

$$(61)\quad \begin{cases} \alpha_k=\frac{2}{2k+(n-2)}\beta_k,\ k\geqq 1, \quad \beta_1=\frac{n}{2}f(s), \\ u_k=\frac{2}{k}\alpha_k=\frac{4}{k\{2k+(n-2)\}}\beta_k,\ k\geqq 1,\ \beta_k=\frac{-1}{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\beta_{k-l}\gamma_l,\ k\geqq 2, \\ \gamma_k=\frac{1}{v_0}\left(2\alpha_k-\sum_{l=1}^{k-1}\gamma_{k-l}v_l\right),\ k\geqq 2,\ \gamma_1=\frac{4}{(1+\varepsilon s)^2 n}\beta_1, \\ v_k=\varepsilon^2\sum_{l=1}^{k-1}u_{k-l}u_l-2\varepsilon(1+\varepsilon s)u_k,\ k\geqq 2, \\ v_0=(1+\varepsilon s)^2,\quad v_1=-\frac{8}{n}\varepsilon(1+\varepsilon s)\beta_1, \end{cases}$$

を得る。これらの各係数はεとsが定まれば漸化式(61)により簡単に計算できる。また(55)式に表われる各関数の値は上式の各項毎に微分を行って得られる漸化式により計算できる。

実際の計算を行う上では細心の注意が要求される。展開係数の計算は適当な尺度変換を用いることにより精度を保つことが可能であり，べき級数の値の計算はこの尺度変換を利用して計算する。たとえば，適当に選んだτに対し，

$$(62)\quad \alpha_k=\tau^{k-1}\tilde{\alpha}_k,\ \beta_k=\tau^{k-1}\tilde{\beta}_k,\ u_k=\tau^{k-1}\tilde{u}_k,\ \gamma_k=\tau^{k-1}\tilde{\gamma}_k,\ v_k=\tau^{k}\tilde{v}_k$$

とおくと (61) より，

$$
(63)\quad
\begin{cases}
\tilde{\beta}_1 = \dfrac{n}{2} f(s), \quad \tilde{\gamma}_1 = \dfrac{4}{n(1+\varepsilon s)^2}\tilde{\beta}_1, \quad \tilde{\nu}_1 = \dfrac{8\varepsilon(1+\varepsilon s)}{n(-x)}\tilde{\beta}_1, \\
\tilde{\beta}_k = \dfrac{1}{k-1}\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}\tilde{\beta}_{k-l}\gamma_l, \quad \tilde{\gamma}_k = \dfrac{1}{(1+\varepsilon s)^2}\left\{\dfrac{4}{2k+(n-2)}\tilde{\beta}_k - \displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}\tilde{\gamma}_{k-l}\tilde{\nu}_l\right\}, \\
\tilde{\nu}_k = 16\varepsilon^2\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}\tilde{\beta}_{k-l}\tilde{\beta}_l \Big/ \left[(k-l)\{2(k-l)+(n-2)\}\, l\,\{2l+(n-2)\}\right] \Big/ (-x)^2 \\
\qquad + 8\varepsilon(1+\varepsilon s)\,\tilde{\beta}_k \Big/ \left[k\{2k+(n-2)\}(-x)\right]
\end{cases}
$$

を得る。$x=-2$ にとると上式の $\tilde{\beta}_k$ およびその誤差の絶対値は拡大しないアルゴリズムになっているので，(63) 式によりべき級数の係数が得られ，各偏導関数の係数も (63) より導かれる漸化式により計算できる。

$$
(64)\qquad |\tilde{\lambda}\cdot x| < 1, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{4n}
$$

ならば，$\{\tilde{\beta}_k\}$ を係数としてもつべき級数は公比が $|\tilde{\lambda}\cdot x| < 1$ の等比級数の収束とほゞ同程度と考えられる。

6. 計算結果はつぎのようになった。

	$n=1$	$n=2$	$n=3$
λ	1,30737 35636 73209	3,00630 14788 69473	5,04111 24626 05090
ε	0,24578 04272 323656	0,24210 61655 952377	0,23879 70901 251162
s	4,89654 78998 74779	5,94324 34064 85355	7,18494 36495 24520

近似多項式の次数 N とその精度の関係はつぎのようになる:

i) $n=1$ の場合

	$N=20$	$N=40$	$N=60$	$N=80$
λ の誤差	$0,619\cdots\times10^{-9}$	$0,264\cdots\times10^{-15}$	$0,249\cdots\times10^{-15}$	左に同じ
ε の誤差	$0,124\cdots\times10^{-9}$	$0,312\cdots\times10^{-16}$	$0,285\cdots\times10^{-16}$	左に同じ
s の誤差	$0,428\cdots\times10^{-7}$	$0,256\cdots\times10^{-14}$	$0,282\cdots\times10^{-15}$	左に同じ

ii) $n=2$ の場合

	$N=20$	$N=40$	$N=60$	$N=80$
λ の誤差	$0,880\cdots\times10^{-6}$	$0,331\cdots\times10^{-12}$	$0,193\cdots\times10^{-15}$	左に同じ
ε の誤差	$0,681\cdots\times10^{-7}$	$0,238\cdots\times10^{-13}$	$0,112\cdots\times10^{-16}$	左に同じ
s の誤差	$0,284\cdots\times10^{-4}$	$0,844\cdots\times10^{-10}$	$0,116\cdots\times10^{-15}$	$0,204\cdots\times10^{-15}$

iii) $n=3$ の場合

	$N=20$	$N=40$	$N=60$	$N=80$	$N=100$
λ の誤差	$0,427\cdots\times10^{-3}$	$0,396\cdots\times10^{-8}$	$0,151\cdots\times10^{-10}$	$0,420\cdots\times10^{-14}$	$0,374\cdots\times10^{-15}$
ε の誤差	$0,186\cdots\times10^{-4}$	$0,438\cdots\times10^{-10}$	$0,682\cdots\times10^{-12}$	$0,189\cdots\times10^{-15}$	$0,232\cdots\times10^{-15}$
s の誤差	$0,109\cdots\times10^{-1}$	$0,628\cdots\times10^{-5}$	$0,554\cdots\times10^{-9}$	$0,431\cdots\times10^{-12}$	$0,209\cdots\times10^{-16}$

なお，(64) 式のチェックを行うとつぎのようになる：

	$\lvert\tilde{\lambda}\cdot\lambda_1\rvert$ の値
$n=1$	$0,65368\cdots\cdots$
$n=2$	$0,75157\cdots\cdots$
$n=3$	$0,84018\cdots\cdots$

7. その他の数値例（turning point (λ, s) の計算）.

例1 ([5], [7]).

$$\begin{cases} -u'' = \lambda(1+3u^2) \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

	計算値 $(N=60)$
λ	0,68632 00257 725068
s	0,69992 68001 214508

	$N=20$	$N=40$
λ の誤差	$0,969\cdots\times10^{-13}$	$0,698\cdots\times10^{-15}$
s の誤差	$0,144\cdots\times10^{-11}$	$0,255\cdots\times10^{-16}$

例2 ([5], [7]).

$$\begin{cases} -u'' = \lambda e^u \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

	計算値 $(N=100)$
λ	3,51383 07191 25161
s	1,18684 21686 34389

((5) 式で $\varepsilon=0$，$n=1$ の場合に相当する。ただし λ は4倍になっている。)

	$N=20$	$N=40$	$N=60$	$N=80$
λ の誤差	$0,260\cdots\times10^{-5}$	$0,275\cdots\times10^{-10}$	$0,592\cdots\times10^{-15}$	$0,207\cdots\times10^{-15}$
s の誤差	$0,205\cdots\times10^{-4}$	$0,434\cdots\times10^{-9}$	$0,918\cdots\times10^{-14}$	$0,975\cdots\times10^{-16}$

例3([6]).

$$\begin{cases} -u'' - \dfrac{n-1}{x}u' = \lambda e^{u} \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

((5)式で $\varepsilon = 0$ の場合に相当する。収束半径の関係で原点を z_0 に移動したべき級数で計算する。$n=3$ のとき turning point は無限個ある。)

i) $n = 2$ の場合 ($z_0 = 0.5$)

	計算値 ($N=80$)
λ	2.0
S	1.38629 43611 19891

	$N=20$	$N=40$	$N=60$
λ の誤差	$0.677\cdots\times10^{-5}$	$0.125\cdots\times10^{-10}$	$0.390\cdots\times10^{-16}$
S の誤差	$0.106\cdots\times10^{-4}$	$0.198\cdots\times10^{-10}$	$0.581\cdots\times10^{-16}$

ii) $n = 3$ の場合 ($z_0 = 11/16$) S が最小の turning point を求める:

	計算値 ($N=180$)
λ	3.32199 21183 39824
S	1.60745 67750 83842

	$N=20$	$N=60$	$N=100$	$N=140$
λ の誤差	$0.672\cdots\times10^{-1}$	$0.439\cdots\times10^{-5}$	$0.192\cdots\times10^{-9}$	$0.675\cdots\times10$[illegible]
S の誤差	$0.600\cdots\times10^{-1}$	$0.176\cdots\times10^{-3}$	$0.163\cdots\times10^{-7}$	$0.113\cdots\times10$[illegible]

例4([7]). $\begin{cases} -u'' = \lambda \exp(u^2 + \lambda x u),\ 0<x<1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u'' = \dfrac{1}{\lambda}\exp\{(s-u)^2 + (\varepsilon - x)(s-u)\} \\ u(0) = u'(0),\quad u(\varepsilon) = s,\quad u(\varepsilon-\lambda) = s \end{cases}$

	計算値 ($N=50$)
λ	2.11566 95405 19243
ε	1.12537 88332 57938
S	0.55652 62768 480663

	$N=10$	$N=20$	$N=30$	$N=40$
λ の誤差	$0.168\cdots\times10^{-4}$	$0.200\cdots\times10^{-7}$	$0.737\cdots\times10^{-11}$	$0.384\cdots\times10^{-14}$
ε の誤差	$0.471\cdots\times10^{-4}$	$0.261\cdots\times10^{-7}$	$0.114\cdots\times10^{-10}$	$0.729\cdots\times10^{-14}$
S の誤差	$0.255\cdots\times10^{-4}$	$0.785\cdots\times10^{-7}$	$0.379\cdots\times10^{-10}$	$0.300\cdots\times10^{-13}$

参考文献

[1] L. Fradkin, Ju and G. C. Wake, The critical explosion parameter in the theory of thermal ignition, J. Inst. Math. Appl. 20, P471 (1977).

[2] T. Boddington, P. Gray and G. C. Wake, Criteria for thermal explosions with and without reactant consumption, Proc. Royal Soc., Series A, 357, P403 (1977).

[3] C. Willis, R. A. Back and T. G. Purdon, National Research Council of Canada Report (1977).

[4] N. W. Bazley and G. C. Wake, The disappearance of criticality in the theory of thermal ignition, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 29, P971-976 (1978).

[5] J. Sprekels, Exact bounds for the solution branches of nonlinear eigenvalue problems, Numer. Math. 34, P29-40 (1980).

[6] 亀高惟倫,「非線形偏微分方程式」産業図書 (1977).

[7] J. W. Mooney, H. Voss and B. Werner The dependence of critical parameter bounds on the monotonicity of a Newton sequence, Numer. Math. 33, P291-301 (1979).