数理解析研究所講究録
456巻 1982年 45-60

格子点問題と多変数フーリエ級数の収束問題のある接点について

弘前大 理　倉坪茂彦

本稿の目的は数論の一分野である格子点問題と多変数フーリエ級数の収束問題の関連性について述べることである。

§1 格子点問題

まず記号を導入する。Nを2以上の自然数，$\mathbb{Z}^N$をN次元格子点 $n=(n_1,\cdots,n_N)$（各n_iは整数）の全体，R^NをN次元ユークリッド空間，また，$x=(x_1,\cdots,x_N)$, $y=(y_1,\cdots,y_N)\in R^N$ に対して $xy=x_1y_1+\cdots+x_Ny_N$, $|x|=(x_1^2+\cdots+x_N^2)^{1/2}$，さらに $e_n(x)=\exp(2\pi inx)$ とする。

いま，半径$\sqrt{t}$ のN次元球内の格子点の数を考えよう。その第一近似はその体積で与えられる。これらの差

$$P_t=\left(\sum_{|n|^2\le t}1\right)-\pi^{\frac{N}{2}}/\Gamma\left(\tfrac{N}{2}+1\right)\,t^{\frac{N}{2}}$$

を評価する問題，更に，一般化して各格子点nに重み$e_n(x)$を掛けた場合の差

$$P_t(x) = \sum_{|n|^2 \le t} e_n(x) - \pi^{\frac{N}{2}} / \Gamma(\tfrac{N}{2}+1)\, t^{\frac{N}{2}} \delta(x)$$

ただし，$\delta(x)$ は $x \in \mathbb{Z}^N$ のとき 1，その他で零をとる関数を評価する問題が表題に云うところの格子点問題である。

例えば，$N=2$ のとき次のことが知られている。（数学辞典才二版 p411）

$$P_t = P_t(0) = \begin{cases} O(t^{\frac{12}{37}}) & \text{Wen-Lin Yin} \quad (1962) \\ \Omega(t^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} t) & \text{Hardy} \quad (1916) \end{cases}$$

また $\quad 1/t \int_1^t |P_s| ds = O(t^{\frac{1}{4}}) \quad$ Cramér $\quad$ (1926)

更に，Hardy は $\quad P_t = O(t^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$ を予想している。

格子点問題は Hardy, Landau, Walfisz, Jarník, Novák 等の研究により発展してきた。1940年から1972年までの発展の様子を知るには W. J. LeVeque 編「reviews in Number Theory vol.4」(A.M.S. 1974) が重宝である。なおこれらの研究は一般の正値二次形式 $Q(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x_i x_j$ に対して議論されていることが多いが，ここでは専らフーリエ級数の球形和との関連性に興味があるので $Q(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2$ の場合のみ考えようということである。

次ぎに格子点問題の結果のうち"球形和"と関連のあるものを列挙する。N, x について条件のないときはすべての N に対して，あるいは，すべての $x \in \mathbb{R}^N$ に対して成立することを意味する。

(1. 1) $P_t(x) = O(t^{\frac{N}{2}-\frac{N}{N+1}})$ (Landau [19])

(1. 2) $P_t(x) = \Omega(t^{\frac{N-1}{4}})$ (Jarník [14])

(1. 3) $P_t(x) = \begin{cases} O(t^{\frac{N}{2}-1}) & (N>4) \\ O(t\log^2 t) & (N=4) \end{cases}$ (Novák [21])

(1. 4) $P_t(x) = \begin{cases} \Omega(t^{\frac{N}{2}-1}) & (x\in\mathbb{Q}^N,\ N>4) \\ o(t^{\frac{N}{2}-1}) & (x\notin\mathbb{Q}^N,\ N>4) \end{cases}$ (Novák [21])

ここで $x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{Q}^N$ とは各 x_i が有理数であることとする。

(1. 5) $P_t(x) = O(t^{\frac{N}{4}}\log^K t)$ (almost all x, $N\geq 4$) (Novák [21])

ここで，K は N にのみ依存する正定数である。

(1. 6) $M_t(x) = \left(\frac{1}{t}\int_1^t |P_s(x)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$ とおくと，

$$\Omega(t^{\frac{N-1}{4}}) = M_t(x) = \begin{cases} O(t^{\frac{N}{2}-1}) & (N\geq 4) \\ O(t^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}} t) & (N=3) \\ O(t^{\frac{1}{4}}) & (N=2) \end{cases} \quad \text{(Novák [23])}$$

(1. 7) 各 $x\in\mathbb{Q}^N$ に対して，次をみたす $K=K(x,N)>0$ がある。

$$M_t(x) = \begin{cases} Kt^{\frac{N}{2}-1} + o(t^{\frac{N}{2}-1}) & (N\geq 4) \\ Kt^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}} t + o(t^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}} t) & (N=3) \end{cases} \quad \text{(Novák [23])}$$

（例えば $N\geq 4$ のとき K は具体的に $K(x,N) = \pi^{N-2}/4(N-1)\Gamma^2(\frac{N}{2}) \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h\neq 0,(h,k)=1} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2N-2}h^2}$ とかける。$S_{h,k}$ は Gauss 和の変形である。）

(1. 8) $M_t(x) = O(t^{\frac{N-1}{4}}\log^K t)$ (a.a. x.) (Novák [20])

(1.9)
$$R_t(x)=\sum_{|n|^2\le t} e_n(x)-\int_{|y|^2\le t} e^{2\pi i y x}\,dy$$
$$=\sum_{|n|^2\le t} e_n(x)-\pi^{\frac{N}{2}}t^{\frac{N}{2}}j_{\frac{N}{2}}(2\pi|x|\sqrt{t})$$

（ここで，$j_\nu(z)=J_\nu(z)\big/\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$，$J_\nu$は$\nu$次のBessel関数）

とおくと，Nにのみ依存する正定数$C=C_N$が存在して次が成立する。

$$|R_t(x)|\le\begin{cases}C\,t^{\frac{N}{2}-1} & (N\ge5)\\ C\,t\log^2 t & (N=4)\end{cases}\qquad (x\text{に関して一様に})$$

Babenko 1978 [3] の結果であるが，本質的には Novák 1968 [21] の結果である。（このことについては Kuratsubo [15] を参照されたい）　また，$N=2, 3$に対してこの種の結果は得られていないが Novák [20] の証明をたどってゆくと

$$\left(\frac{1}{t}\int_1^t|R_s(x)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\le\begin{cases}C\,t^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}t & (N=3)\\ C\,t^{\frac{1}{4}} & (N=2)\end{cases}$$

（xに関して一様に）

が得られる。

(1.10) ディオファンタス近似との関係を示唆するものとして次の結果がある。$\gamma(x)=\sup\{\beta\ge0$ s.t. $|kx_i-h_i|<1/k^\beta$ をみたす無限個の$(k, h_1, \cdots, h_N)$が存在する$\}$ とおくとき，

$$N>4,\ \gamma(x)\ge\frac{2}{N-4}\Longrightarrow P_t(x)=\begin{cases}O\left(t^{\left(\frac{N}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{2\gamma(x)+1}{\gamma(x)+1}+\varepsilon}\right)\\ \Omega\left(t^{\left(\frac{N}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{2\gamma(x)+1}{\gamma(x)+1}-\varepsilon}\right)\end{cases}$$

（すべての正数εに対して）

(Novák [22])

§2 多変数フーリエ級数の収束問題

$f \in L^1(\mathbb{T}^N)$ のフーリエ級数

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} \hat{f}(n) e_n(x) \qquad \left(\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)\overline{e_n(x)}\,dx \right)$$

を考える。一次元フーリエ級数については次の結果がよく知られている。

(i) $S_m(f;x) = \sum_{n=-m}^{m} \hat{f}(n) e_n(x)$ が各 x で発散するような $f \in L^1(\mathbb{T}^1)$ がある。(Kolmogorov 1926)

(ii) $p>1$ のとき $f \in L^p(\mathbb{T}^1)$ ならば $\{S_m(f;x)\}$ は almost all x で $f(x)$ に収束する。(Carleson-Hunt 1966)

多変数の場合に対応する問題を考えるとき部分和 $S_m(f;x)$ に対応するものとして何をとるかというのが問題になる。一般に D を $0 \in \mathbb{Z}^N$ を内点としてもつ有界集合とするとき，D 型部分和：　$S_t^D(f;x) = \sum_{n\in tD} \hat{f}(n) e_n(x)$　を考えることができるが，代表的なものは $D=[-1,1]^N$, $D=\{x\in\mathbb{R}^N;\ |x|\leq 1\}$ の場合で，前者を矩形和，後者を球形和という。これら2つの場合の収束問題は結果も使われる手法も全く異なるといってよい。例えば，

(2.1)　$p>1$ のとき，任意の $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ に対して

$$\sum_{|n_1|\leq t} \cdots \sum_{|n_N|\leq t} \hat{f}(n) e_n(x) \longrightarrow f(x) \quad (\text{almost all } x) \ \text{as } t\to\infty$$

(Fefferman [7])

(2.2)　任意の $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ に対して $\sum_{|n|\leq t} \hat{f}(n) e_n(x) \longrightarrow f(x)$ (a.a. x)

が成立するのは高々 $p=2$ のときのみである。
(Fefferman [8], Babenko [2])

このように"部分部を如何にとるか?"というのは本質的な問題であるが，ここでは専ら球形和についてのみ考える。ところで，(2.2) の観点より何らかの総和法を考えるのは必然であるが，とくに Riesz (Riesz–Bochner) 総和法がよく研究されている。

(2.3) 定義 $\quad S_t^\alpha(f:x)=\sum_{|n|^2\leq t}\left(1-\frac{|n|^2}{t}\right)^\alpha\hat{f}(n)e_n(x) \quad (\alpha\geq 0)$

を f のフーリエ級数の α 次 Riesz 平均といい，

$$S_t^\alpha(f:x)\longrightarrow S(x) \quad \text{as } t\longrightarrow\infty$$

とき f のフーリエ級数は $S(x)$ に α 次 Riesz 総和可能であるという。また

$$\frac{1}{t}\int_1^t|S_u^\alpha(f:x)-S(x)|^2du\longrightarrow 0 \quad \text{as } t\longrightarrow\infty$$

とき $S_t^\alpha(f:x)$ は $S(x)$ に強収束する，あるいは，f のフーリエ級数は $S(x)$ に α 次強 Riesz 総和可能であるという。

表題にいう多変数フーリエ級数の収束問題とは $\{S_t^\alpha(f:x)\}_{t>0}$ の収束性（ノルム収束，点毎収束，強収束）に関する問題を指すものとする。まず最初ノルム収束に関する結果を述べる。

(2.4) $\alpha>\frac{N-1}{2}\left|\frac{2}{p}-1\right|$ とき，任意の $f\in L^p(T^N)$ に対して

$$\|S_t^\alpha(f)-f\|_p\longrightarrow 0 \quad \text{as } t\longrightarrow\infty \qquad (\text{Stein [25]})$$

(2.5) $\alpha\leq\frac{N-1}{2}\left|\frac{2}{p}-1\right|-\frac{1}{p'}$ （ただし，$1/p+1/p'=1$）のとき，

$\| S_t^\alpha(f) - f \|_p \not\to 0$ as $t \to \infty$ となる $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ が在る。

(Herz [11])

この2つの結果はいずれも1950年代に得られ，その gap $\{(\alpha, p)$ s.t. $1 \leq p < \infty$, $\frac{N-1}{2}\left|\frac{2}{p}-1\right| - \frac{1}{p'} < \alpha \leq \frac{N-1}{2}\left|\frac{2}{p}-1\right|\}$ を埋める研究が1969年以降 Fefferman 等により大きく発展してきた。その代表的なものは次の2つである。

(2.6) $N=2$ のとき，上の gap は完全に肯定的に解決される。(Carleson & Sjölin [4])

(2.7) $N \geq 3$ のとき，上の gap のうち $\alpha > \frac{N-1}{4}$ の部分は肯定的に解決される。(Fefferman [6] [9])

$N \geq 3$ のときも上の gap が完全に肯定的に解決されることが予想されている (Alimov, Ilin & Nikishin [1]) が現在のところ未解決である。

(2.8) <u>予想</u> $\alpha > \frac{N-1}{2}\left|\frac{2}{p}-1\right| - \frac{1}{p'}$ のとき，任意の $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ に対して，$\| S_t^\alpha(f) - f \|_p \to 0$ as $t \to \infty$ が成立する。

次ぎに点毎収束に眼を向けると，次ぎの結果が現存知られている最良のものである。

(2.9) $\alpha > \frac{N-1}{2}\left(\frac{2}{p}-1\right)$, $1 \leq p \leq 2$ のとき，任意の $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ に対して $\{S_t^\alpha(f : x)\}_{t>0}$ は $f(x)$ に almost all x で収束する。(Stein [25])

(2.10) $\alpha \leq \frac{N-1}{2}\left(\frac{2}{p}-1\right) - \frac{1}{p'}$, $1 < p \leq 2$ のとき $\{S_t^\alpha(f : x)\}_{t>0}$ が almost all x で発散する $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ が在る。(Babenko [2])

この場合も gap $\{(\alpha, p)$ s.t. $1 \leq p < 2, \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1)-\frac{1}{p'} < \alpha \leq \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1)\}$ で概収束が成立するか否か非常に興味ある問題である。一変数の場合，M. Riesz のノルム収束の結果（1927）から Carleson の概収束の結果（1966）までに長い道程があったことを考えると極めて難しい問題と想像される。

(2.11) __予想__ $\alpha > \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1)-\frac{1}{p'}$, $1 \leq p < 2$ のとき，任意の $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ に対して，$S_t^\alpha(f:x) \longrightarrow f(x)$ as $t \longrightarrow \infty$ (a.a. x) が成り立つ。

最後に強収束については次がよく知られている。

(2.12) $\alpha > \frac{N-1}{2}(\frac{2}{p}-1)-\frac{1}{p'}$, $1 \leq p \leq 2$ のとき，任意の $f \in L^p(\mathbb{T}^N)$ に対して $1/t \int_0^t |S_u^\alpha(f:x)-f(x)|^2 du \longrightarrow 0$ as $t \longrightarrow \infty$ (a.a. x)

(Stein [25])

§3 $P_t(x)$ の評価に関する Stein & Weiss の結果

$$K_t^\alpha(x) = \sum_{|n|^2 \leq t} \left(1-\frac{|n|^2}{t}\right)^\alpha e_n(x) \quad (\alpha \geq 0)$$

を α 次の Riesz 核（Riesz-Bochner 核ともいう）という。$\alpha > \frac{N-1}{2}$ のとき Poisson の和公式より

$$P_t^\alpha(x) = K_t^\alpha(x) - \Gamma(\alpha+1)/\Gamma(\tfrac{N}{2}+\alpha+1)\, \pi^{\frac{N}{2}} t^{\frac{N}{2}} \delta(x)$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi^\alpha} t^{\frac{1}{2}(\frac{N}{2}-\alpha)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N, n \neq x} J_{\frac{N}{2}+\alpha}(2\pi\sqrt{t}|x-n|) \Big/ |x-n|^{\frac{N}{2}+\alpha}$$

（右辺は $\mathbb{T}^N$ 上絶対かつ一様収束）

を得る。次ぎに Bessel 関数の漸近公式 $J_\nu(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos(r - \frac{2\nu+1}{4}\pi) + O(\frac{1}{r^{3/2}})$

を代入して

(3.1) $P_t^\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1)/\pi^{\alpha+1}\, t^{\frac{1}{2}(\frac{N-1}{2}-\alpha)} \sum_{n\in\mathbb{Z}^N, n\neq 0} \cos(2\pi\sqrt{t}\,|x-n|+\delta)/|n|^{\frac{N+1}{2}+\alpha}$ $+$ $E(t,\alpha,x)$.

ここで, $\delta = -\frac{N+2\alpha+1}{4}\pi$, 又 $\sup_{\alpha>\frac{N-1}{2}}\sup_{t\geq 1}|E(t,\alpha,x)|<+\infty$ $(x\in\mathbb{T}^N)$

を得る。また

$$P_t^\alpha(x) = C_\alpha t^{-\alpha}\int_0^t P_s^{\frac{N-1}{2}}(x)\,(t-s)^{\alpha-\frac{N-1}{2}-1} s^{\frac{N-1}{2}}ds \quad (\alpha>\tfrac{N-1}{2})$$

$$(\ C_\alpha = \Gamma(\alpha+1)/\Gamma(\tfrac{N-1}{2})\Gamma(\alpha-\tfrac{N-1}{2})\ )$$

より

(3.2) $$\sup_{\alpha>\frac{N-1}{2}}\sup_{t\geq 1}|P_t^\alpha(x)| \leq \sup_{t\geq 1}|P_t^{\frac{N-1}{2}}(x)|$$

を得る。

(3.3) <u>定理</u> $\{|x-n|\ \text{s.t.}\ n\in\mathbb{Z}^N\}$ が$\mathbb{Q}$上一次独立になるxの全体をSとかく。このとき, $\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|\sum_{|n|^2<t}(1-\frac{|n|^2}{t})^{\frac{N-1}{2}}e_n(x)\right|=\infty$ $(x\in S)$

(Stein & Weiss [27] p.270.)

(Sについては $\mathbb{R}^N-S$ のLebesgue測度が零であること, 又 $S\cap\mathbb{Q}^N=\phi$ などが知られている。とくに定理の結論は almost all xに対して成立する。)

<u>証明</u> $\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|\sum_{|n|^2<t}(1-\frac{|n|^2}{t})^{\frac{N-1}{2}}e_n(x_0)\right|<+\infty$ と仮定すると, (3.2)より $\sup_{\alpha>\frac{N-1}{2}}\sup_{t\geq 1}|P_t^\alpha(x_0)|<+\infty$. よって (3.1)より

$$\sup_{\alpha>\frac{N-1}{2}}\sup_{t\geq 1}\left|\sum_{n\neq 0}\frac{\cos(2\pi\sqrt{t}\,|x_0-n|+\delta)}{|n|^{\frac{N+1}{2}+\alpha}}\right|<+\infty$$

いま $x_0\in S$ とすれば Kronecker の定理より

$$\sum_{n\neq 0}\frac{1}{|n|^N} = \sup_{\alpha>\frac{N-1}{2}}\left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{|n|^{\frac{N-1}{2}+\alpha}}\right)<+\infty$$ これは矛盾。

(3.3) の系として $P_t(x)$ の下からの評価が得られる。

(3.4) 定理 $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} \left| \sum_{|n|^2<t} e_n(x) \right| = \infty \quad (x \in S)$

証明 $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} \left| \sum_{|n|^2<t} e_n(x_0) \right| < +\infty$ と仮定すると

$$\sum_{|n|^2<t} e_n(x_0) = O(t^{\frac{N-1}{4}})$$

一方 $\alpha > \frac{N-1}{2}$ のとき，$\sum_{|n|^2<t} (t-|n|^2)^{\alpha} e_n(x_0) = O(t^{\frac{1}{2}(\frac{N-1}{2}+\alpha)})$ ((3.1) より)

これら2つの評価に対し Riesz 総和法に関する補間定理 ((3.5)) を用いて

$$\sum_{|n|^2<t} (t-|n|^2)^{\frac{N-1}{2}} e_n(x_0) = O(t^{\frac{N-1}{2}})$$

これは (3.3) に矛盾する。

(3.5) Riesz 総和法に関する補間定理

(Chandrasekharan & Minakshisundaram [5] p13)

$$\sum_{k\le t} (t-k)^{\alpha_i} a_k = O(t^{\beta_i}) \quad 0 \le \alpha_1 < \alpha_2, \ \beta_i \ge 0$$

かつ $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$

ならば，$\sum_{k\le t} (t-k)^{\alpha} a_k = O(t^{\beta}) \quad (\alpha = \theta\alpha_1 + (1-\theta)\alpha_2, \ \beta = \theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2)$.

ところで §1 で述べた Hardy の結果は $N=2$ のとき

$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} |P_t(0)| = \infty$ を主張するものである。また $N \ge 3$ のとき

(1.7) より $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} |P_t(x)| = \infty \ (x \in \mathbb{Q}^N)$ が成り立っている。一般に次の予想が成立するのではなかろうか？

(3.6) 予想 $\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t^{\frac{N-1}{4}}} |P_t(x)| = \infty$ for all x

この § では $\sum_{|n|^2<t} (1-\frac{|n|^2}{t})^{\frac{N-1}{2}} e_n(x)$，及び $\sum_{|n|^2\le t} e_n(x)$ の点毎評価を議

論してきたが，対応するL^1-ノルム評価として次のものが知られている。

(3.7) $\displaystyle \Big\| \sum_{|n|^2\leq t} \Big(1-\frac{|n|^2}{t}\Big)^{\frac{N-1}{2}} e_n \Big\|_1 = \alpha_N \log t + O(1)$ （Stein [26]）

(3.8) $\displaystyle C_1 t^{\frac{N-1}{4}} \leq \Big\| \sum_{|n|^2\leq t} e_n \Big\|_1 \leq C_2 t^{\frac{N-1}{4}}$ （$C_i > 0$）

(左側不等式は Il'in [13]，右側不等式は Shapiro [24])

§4 格子点問題と収束問題の接点

まず，(1.2), (1.6), (3.4) と Abel 変換により次の定理を得る。

(4.1) <u>定理</u> (i) $0\leq \alpha, \sigma \leq \frac{N-1}{2}$，$\alpha+\sigma<\frac{N-1}{2}$ のとき

$$\varlimsup_{t\to\infty} \Big| \sum_{|n|^2<t} \Big(1-\frac{|n|^2}{t}\Big)^{\alpha} \frac{e_n(x)}{|n|^{\sigma}} \Big| = \infty \quad (x\in \mathbb{R}^N)$$

(ii) (i) と同じ条件の下で

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_1^t \Big| \sum_{|n|^2\leq u} \Big(1-\frac{|n|^2}{u}\Big)^{\alpha} \frac{e_n(x)}{|n|^{\sigma}} \Big|^2 du = \infty \quad (x\in \mathbb{R}^N)$$

(iii) $0\leq \alpha, \sigma \leq \frac{N-1}{2}$，$\alpha+\sigma=\frac{N-1}{2}$ のとき

$$\varlimsup_{t\to\infty} \Big| \sum_{|n|^2\leq t} \Big(1-\frac{|n|^2}{t}\Big)^{\alpha} \frac{e_n(x)}{|n|^{\sigma}} \Big| = \infty \quad (x\in S)$$

一方，級数 $\displaystyle\sum_{n\neq 0} \frac{e_n(x)}{|n|^{\sigma}}$ は $J_\sigma(x) \big(= C_\sigma/|x|^{N-\sigma} + g_\sigma(x), g_\sigma\in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ $C_\sigma = \pi^{\sigma-\frac{N}{2}}\Gamma(\frac{N-\sigma}{2})/\Gamma(\frac{\sigma}{2})\big)$ のフーリエ級数であることはよく知られている。(例えば Stein & Weiss [27] の p256)

(4.2) $$J_\sigma \in L^p(\mathbb{T}^N) \Longleftrightarrow \sigma > N/p'$$

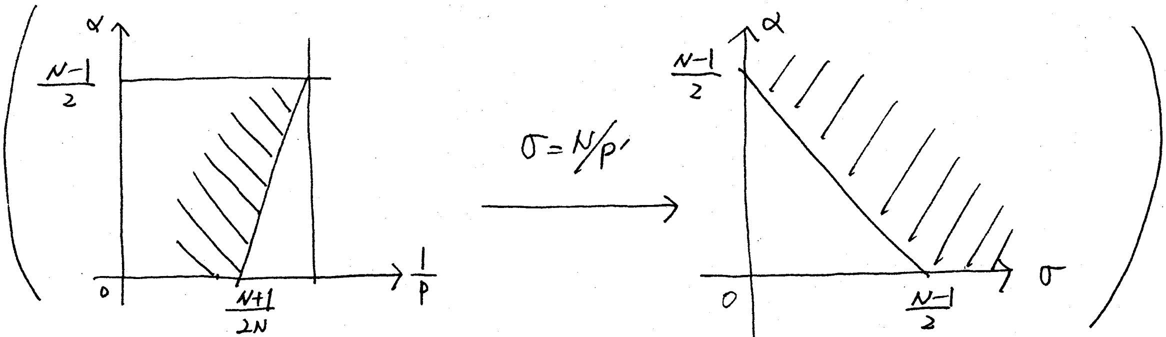
に注意して次の定理が得られる。

(4.3) <u>定理</u>　(i)　$0\le\alpha<\frac{N-1}{2}\left(\frac{2}{p}-1\right)-\frac{1}{p'}$, $1\le p\le 2$ のとき,
「$S_t^\alpha(f:x)$ が almost all x で発散するような $f\in L^p(T^N)$ が存在する。」の具体例として g_σ(適当な σ に対して)がとれ, かつ "almost all x" は "all x" で置き換えられる。

(ii)　$0\le\alpha<\frac{N-1}{2}\left(\frac{2}{p}-1\right)-\frac{1}{p'}$, $1\le p\le 2$ のとき,
$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_1^t|S_u^\alpha(f:x)|^2du=\infty$ $(x\in R^N)$ となる $f\in L^p(T^N)$ が存在し, かつこのような関数として g_σ がとれる。
((4.1), (4.2) の詳細については Kuratsubo [17] [16] [18] を参照されたい。)

(4.4) <u>定理</u>　予想(2.11)が真ならば, $\sum_{|n|^2<t}e_n(x)=O(t^{\frac{N-1}{4}+\varepsilon})$ (almost all x)(任意の正数 ε に対して)が成り立つ。

証明　(2.11)が真であるとし, 変換 $\sigma=N/p'$ を施せば



$\sigma>\frac{N-1}{2}$ とき almost all x で $\sum_{|n|^2<t}\left(1-\frac{|n|^2}{t}\right)^\alpha\frac{e_n(x)}{|n|^\sigma}$ は収束する。(すべての $\alpha>0$ に対して). また Riesz 平均に関してよく知られた事実(Hardy [10] p131 の Thm 76 及び Hobson p90 [12])を使えば, $\sum_{n\ne0}\frac{e_n(x)}{|n|^\sigma}$ は $\sigma>\frac{N-1}{2}$ とき almost all x で収束するこ

とが分る。Abel変換により求める結果を得る。

この(4.4)及び(1.8),(3.8)から次の予想の妥当性は十分強いように思われるが如何なものであろうか?

(4.5) <u>予想</u> $\sum_{|n|^2\le t} e_n(x) = O(t^{\frac{N-1}{4}+\varepsilon})$ at almost all x (任意の正数 ε に対して).

文献

[1] Sh. A. Alimov, V. A. Il'in and E. M. Nikishin Convergence problems of multiple trigonometric series and spectral decompositions I Russian Math. Surveys vol 31:6 (1976) 29–86.

[2] K. I. Babenko On summability and convergence of eigenfunction expansions of a differential operator. Math. USSR. Sbornik vol. 20 (1973) 157–211.

[3] K. I. Babenko On the asymptotics of the Dirichlet kernel of spherical means of multiple Fourier series Dokl. Akad. Nauk. SSSR vol. 19 (1978) 1457–1461.

[4] L. Carleson and P. Sjölin Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc. Studia. Math. vol. 44 (1972) 287–299.

[5] K. Chandrasekharan and S. Minakshisundaram Typical means Oxford 1952.

[6] C. Fefferman Inequalities for strongly singular convolution operators Acta Math. vol. 124 (1970) 9–36.

[7] C. Fefferman On the convergence of multiple Fourier series Bull. Amer. Math. Soc. vol. 77 (1971) 744–745.

[8] C. Fefferman The multiplier problem for the ball Annals of Math. vol. 94 (191) 330–336.

[9] C. Fefferman A note on spherical summation multipliers Israel J. Math. vol. 15 (1973) 44–52

[10] G. H. Hardy Divergent series Oxford (1949)

[11] C. Herz On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms Proc. Nat. Akad. Sci. U.S.A. vol. 40 (1954) 996–999.

[12] E. W. Hobson The theory of functions of a real variable and theory of Fourier series vol. II (1957) Dover

[13] V. A. Il'in Problems of localization and convergence for Fourier series in fundamental systems of functions of the Laplace operator Russian Math. Surveys vol. 23: 2 (1968) 59–116.

[14] V. Jarník Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre Berlin (1968) 139–156. (末尾参照*)

[15] S. Kuratsubo 多変数フーリエ級数の球形総和法に関する Dirichlet 核の評価について. 数理研講究録 (383) (1980) 127–139.

[16] S. Kuratsubo ある種の多重三角級数の球形部分和に関する収束性について 実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集録 (1981) 12–25.

[17] S. Kuratsubo On summability by the Riesz means of some trigonometric series Science Reports of Hirosaki U. vol. 28 (1981) 5–8.

[18] S. Kuratsubo ある多重三角級数について 実解析セミナー (1981) 71–74.

[19] E. Landau Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre Berlin (1963)

[20] B. Novák Über Gitterpunkte mit Gewichten in mehrdimensionalen Ellipsoidens ; Mittelwertsätze Czech. Math. J. 17 (92) (1967) 609–623

[21] B. Novák Verallgemeinerung eines Peterssonschen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten Acta Arith. vol. 13 (1968) 423–454.

[22] B. Novák On lattice points with weight in high-dimensional ellipsoids Acta Arith. vol. 14 (1968) 371–397

[23] B. Novák Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre Czech. Math. J. 19 (94) (1969) 154–180.

[24] H.S. Shapiro Lebesgue constants for spherical partial sums Jour. Approx. Theory vol. 13 (1975) 40–44.

[25] E.M. Stein Localization and summability of multiple Fourier series Acta Math. vol 100 (1958) 93–147.

[26] E.M. Stein On certain exponential sums arising in multiple Fourier series Annals of Math. vol. 73 (1961) 87–109.

[27] E.M. Stein and G. Weiss Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces Princeton (1971)

(*) Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau V.E.B. Berlin (1968) 139–156
又は A collection of papers in honor of E. Landau Plenum, New York (1969) 139–156