数理解析研究所講究録
456巻 1982年 38-44

指数和とLittlewood予想

岡山大 理　鹿野　健

ある種の指数和の下からの評価に関する基本的な問題として知られているものに，Littlewood予想とよばれている次のようなものがある：

与えられた，互に異なる整数列を $\{n_k\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ とすると，絶対定数 $A>0$ が存在して，N が十分大ならば，

$$(1)\qquad I_N \overset{def}{=} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{N} \exp(i n_k x) \right| dx > A \log N .$$

この問題は，Fourier級数論に関する問題として，最初G. H. Hardy と J. E. Littlewood の共著論文［6］に現われたが，それはG. Pólyaによって1927年に彼等に提出された不等式の一問題に端を発するものであった（［5］および［7］を参照）．外見の単純さに反し，予想(1)は長らく未解決であったが，最近相次いで（独立に）２つの論文［9］，［8］

において解決された。前者は Cohen [3], Fournier [4] の系統の証明であり，後者は Pichorides [12] の方法の上に立ったものである。得られた結果は，共にその系として(1)を与えるが，互に異なる形のものである。前者の方が応用上より一般的な結果であると思われるが，その特別な場合が次の定理である。

[定理 1] (McGehee, Pigno & Smith [9])

任意の整数列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_N$ に対して，

$$(2)\quad J_N \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{N} c_k \exp(in_k x) \right| dx \geq A \sum_{k=1}^{N} \frac{|c_k|}{k},$$

となるような絶対定数 A が存在する。

この定理から，次の系が従い，(1)がそれに含まれる。

系 1. $|c_k| \geq 1$ $(k=1,2,\cdots,N)$ ならば，

$$(3)\quad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{N} c_k \exp(in_k x) \right| dx \geq A \log N.$$

Konjagin の結果もこの系1を与えるが，(2)は得られていない。

$n_k = k$ という特別な場合に(2)は Hardy-Littlewood

によって得られ，後の H^p クラスの理論の出発点となったものである。その意味でも(1)と(2)の評価は最良であるが，J_N の下からの評価を有界数列 $\{c_n\}_1^\infty$ の場合に，c_n を含む形で初めて与えたのは *Olevskii* （cf. [10] ）であった。彼の得た不等式は次の形をとる。

［定理 2］ $|c_k| \leq B$ $(k=1,2,\ldots,N)$ ならば，

$$\max_{1\leq k\leq N} J_k \geq A\frac{\log N}{N}\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2 . \tag{4}$$

Olevskii は実際は L^2 での正規直交系に関する不等式として(4)のタイプを得ているのであるが，その後それは更に改良されて，*Bočkarev* ［1］ は本質的に(4)の左辺は「平均」

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} J_k$$

で置き換えられることを示している。

Olevskii，*Bočkarev*，*McGehee - Pigno - Smith* の方法は互に異なるが，例えば(4)の応用については[10]が詳しい。

Littlewood 予想に関連したものとして，*Ankeny* と *Chowla* による問題がある（cf. ［2］)。それは *Riemann* のゼータ函数に関する問題から考えられたもので，

$$C_N(x)=\sum_{k=1}^{N} \cos(n_k x),$$

$$L_N = \inf_{0\le x\le 2\pi} C_N(x),$$

とするとき，$|L_N|$ を下から評価するような，無限大に発散する函数 $f(N)$ を与えることができるか，というものである。$|L_N|+C_N(x)\ge 0$ であるから，

$$2\pi|L_N| = \int_0^{2\pi}(|L_N|+C_N(x))dx = \int_0^{2\pi}\big||L_N|+C_N(x)\big|dx$$

$$\ge \int_0^{2\pi}|C_N(x)|dx - 2\pi|L_N|dx.$$

従って

(5) $$|L_N| \ge \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|C_N(x)|dx$$

となるが，一方

$$C_N(x) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{N}\exp(in_k x)+\sum_{k=1}^{N}\exp(-in_k x)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N}\exp(im_k x),$$

$$\{m_1,\cdots,m_{2N}\} = \{-n_N,\cdots,-n_1,n_1,\cdots,n_N\}$$

と表わされるので，もし $I_N \ge A\,f(N)$ ならば，(5) より

$$|L_N| \geq A f(2N)$$

を得ることになる。例えば定理1から，

$$(6) \qquad |L_N| \geq A \log N$$

が出て来る。あるいは，系1から，

系2. $|c_k| \geq 1$ $(k=1, 2, \dots, N)$ ならば，

$$\left| \inf_{0 \leq x \leq 2\pi} \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(n_k x) \right| \geq A \log N$$

も従う。

このように，$|L_N|$ の下からの評価（これを「cosine問題」とよぶこともある）は Littlewood 予想から出て来るが，実は(6)の評価は最良のものとは程遠いと思われる。現状では(6)より良い評価は得られていないが，予想の1つは

$$(7) \qquad |L_N| \geq A \sqrt{N}$$

である。この否定，すなわち

$$|L_N| = o(\sqrt{N}), \qquad (N \to \infty)$$

であるような例は知られていないのであるが，$\{n_k\}$ の部分列をとると，それに対応する cosine 和については(7)が成り

立つことが知られている (cf. [13], [11]).

文　献

[1] S.V. Bočkarev : Dokl. Akad. Nauk SSR, 223 (1975) = Soviet Math. Dokl., 16 (1975), 799 — 802.

[2] S. Chowla : Bull. A.M.S., 58 (1952) 287 — 305.

[3] P. J. Cohen : Amer. J. Math., 82 (1960) 191 — 212.

[4] J. F. Fournier : Arkiv för Math., 17 (1979) no. 2 199 — 216.

[5] Hardy & Littlewood : J. London Math. Soc. 3 (1928) 105 — 110

[6] ———————— : Ibid 23 (1948) 163 — 168.

[7] Hardy, Littlewood & Pólya ; Inequalities, Cambridge Univ. Press 1934.

[8] S.V. Konjagin : Izv. Akad. Nauk SSSR 26 (1981) 243 — 265.

[9] McGehee, Pigno & Smith : Annals. of Math., 113 (1981) 613 — 618.

[10] A.M. Olevskii : Fourier series with respect to general orthogonal systems, Springer 1975.

[11] S. K. Pichorides : Norms of exponential sums, Publications Mathématiques D'Orsay, N° 77-73 (1977).

[12] ——————— : Annales de l'institut Fourier, 30 (1980) no. 2 79 – 89.

[13] S. Uchiyama : Proc. A. M. S. 16 (1965) 1185–1190.