数理解析研究所講究録
458巻 1982年 299-308

Regular Adherenceとその諸性質について

名大工学部　泉寛幸　稲垣康善
豊橋技科大　本多波雄

1. 概要

BOASSON & NIVAT [1] は，有限長記号列集合(言語)から無限長記号列集合(ω-言語)を構成する集合演算 adh を導入し，その位相的性質及び，文脈自由文法やgsm写像との関連について述べた。また，COHEN & GOLD [2] は同じ演算を言語 L に対して $Ext(L)$ (Extraporation of L) と表記し，決定性プッシュダウンオートマトンが受理する ω-言語との関連を検討している。

この他に ω-言語を構成する集合演算として ω-演算(MCNAUGHTON [5])や lim 演算(CHOUEKA [4])が提案されているが，それらに比べて adh 演算から構成した ω-言語は，直観的に理解しやすく，その取り扱いも比較的容易である。

本論では特に正規集合に adh 演算を適用して得られる ω-言語であるregular adherence(以下 r.a. と略記する)を取り扱う。そして正規集合のもつ諸性質で r.a. に対しても成立する

ものについて考察する。第2節でいくつかの用語と記法を定義する。第3節でω-有限オートマトンを定義し，その性質を述べる。第4節でr.a.の特徴付けと，r.a.を受理するω-有限オートマトンが左微分演算により構成されることを示す。第5節ではGINZBURGの正規表現等価性判定アルゴリズムを利用してr.a.の等価性判定アルゴリズムを与える。紙数の関係上，証明は省略するが詳細は文献[8]を参照されたい。

2. 諸定義

Nを正の整数の集合とし，任意の$n \in N$に対して$[n] \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \cdots, n\}$とおく。$\Sigma$を空でない有限集合とし，アルファベットと呼ぶ。$\Sigma^*$ [Σ^ω] でΣの要素を有限回[可算無限回]連接して得られる記号列の集合を表わす。Σ^*の部分集合を言語，Σ^ωの部分集合をω-言語と呼ぶことにする。$\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$とおく。

任意の$X \in \Sigma^\infty$において，$X = a_1 a_2 \cdots a_i \cdots$ $(i \in N,\ a_i \in \Sigma)$とした時，$X(i) = a_i$，$X(i, j) = a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_j$，$X/j = a_1 a_2 \cdots a_j$と表わす。$X$の語の長さ$|X|$を，$X = a_1 a_2 \cdots a_n$のとき$|X| = n$，$X = \Sigma^\omega$のとき$|X| = \infty$とする。$\varepsilon$で空語を表わす。

$X \in \Sigma^\infty$，$Y \in \Sigma^\omega$の連接YXを，$YX = Y$と定義し，その他の連接演算は通常定義される通りに定める。$x \in \Sigma^*$が$Y \in \Sigma^\infty$のプレフィックスであるとき（すなわち$(\exists Z \in \Sigma^\infty)\, Y = xZ$のとき）$x \preccurlyeq Y$と書く。

$L \subset \Sigma^\infty$に対して　$fgL \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Sigma^* \mid (\exists Z \in \Sigma^\infty)\ xZ \in L\}$, $adhL \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \Sigma^\omega \mid (\forall i \in N)\ X/i \in fgL\}$,　$L \subset \Sigma^*$に対して $L^\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \Sigma^\omega \mid X = \Pi_{i=1}^{\infty} x_i,\ x_i \in L - \{\varepsilon\}\}$ (ここで $\Pi_{i=1}^{\infty}$ は無限回の連接を表わす) と定義する。

$L = \bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^\omega$ (A_i, B_iは正規集合, $i \in [n]$)という形式で書かれるω-言語$L \subset \Sigma^\omega$をω-正規集合と呼ぶ。A_i, B_iが正規表現で書かれているとき, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^\omega$ の形式の表現をω-正規表現と呼ぶことにする。

3. 1′-ω-有限オートマトン (1′-ω-fa)

(定義 3.1)　1′-ω-有限オートマトン (1′-ω-fa)を5項組 $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ とする。ここでQは状態の有限集合, $q_0 \in Q$ を初期状態, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ を状態遷移関数, $F \subset Q$ を受理状態集合とする。δを次のように$Q \times \Sigma^* \to Q$へ拡張する。
$(\forall q \in Q,\ x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma)\ \delta(q, \varepsilon) = q,\ \delta(q, ax) = \delta(\delta(q, a), x)$.

$X \in \Sigma^\infty$と$q \in Q$ に対し, $E_q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\delta(q, x) \mid x \leqslant X$ かつ $\delta(q, x)$は定義されている$\}$ と定める. ただし, ある$x \leqslant X$で$\delta(q, x)$が未定義のとき $E_q(X)$は定義されないものとする。$X \in \Sigma^\omega$に対し$E_q(X) \subseteq F$ のとき, $\mathcal{A}$はXを受理方式1′で受理するという。$\mathcal{A}$の受理するω-言語を$L_{1'}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \Sigma^\omega \mid E_{q_0}(X) \subseteq F\}$ と定める。ω-言語$L \subseteq \Sigma^\omega$は, $L = L_{1'}(\mathcal{A})$ となるときω-fa $\mathcal{A}$によって受理されるという。さらに$L^f(\mathcal{A}) = \{x \in \Sigma^* \mid$

$E_{q_0}(x) \subseteq F\}$ と定義する。 ▨

(定義3.2)　任意の$1'$-ω-fa $\mathcal{A}=\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ に対して center ω-fa $c(\mathcal{A})$ を次のように定める。

$$c(\mathcal{A}) \overset{def}{\equiv} \langle Q' \cup \{d\}, \Sigma, \delta', q_0, F'\rangle$$

ここで，$Q' \overset{def}{\equiv} \{q \in Q \mid (\exists y \in \Sigma^*)\ q = \delta(q_0, y)$ かつ $E_{q_0}(y) \subseteq F$ かつ $(\exists z \in \Sigma^\omega)\ E_q(z) \subseteq F\}$ と定義し，$F' = Q'$ かつ $Q' \not\ni d$ とする。d を dead state と呼ぶ。任意の $q \in Q$ と $a \in \Sigma$ に対し次のように定める。

$$\begin{cases} \delta'(q, a) = \delta(q, a) & (\delta(q,a) \in Q' \text{のとき}) \\ \delta'(q, a) = d & (\delta(q,a) \notin Q' \text{または} \delta(q,a) \text{が未定義}) \\ \delta'(d, a) = d \end{cases}$$ ▨

(性質3.1)　任意の$1'$-ω-fa $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して，

① $1'$-ω-fa により受理されるω-言語のクラスはω-正規集合の部分クラスである。

② $L_{1'}(\mathcal{A}) = adh\, L^f(\mathcal{A})$，　$L_{1'}(\mathcal{A}) = L_{1'}(c(\mathcal{A}))$，

③ $L^f(c(\mathcal{A})) = fg\, L_{1'}(\mathcal{A})$，

④ $L_{1'}(\mathcal{A}) = L_{1'}(\mathcal{B}) \Longleftrightarrow L^f(c(\mathcal{A})) = L^f(c(\mathcal{B}))$，

⑤ $\mathcal{A}$ から $c(\mathcal{A})$ を構成する手続きが存在する。 ▨

4. regular adherence

(定義4.1)　$L \subset \Sigma^\omega$ に対して

L が adherence $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists V \subset \Sigma^*)\ L = adh\, V$，

L が regular adherence $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists V \subset \Sigma^*$: 正規集合$)$ $L = adh V$ ▮

(例 1)　$L = a^* b^\omega$ は (regular) adherence ではない。

$L = a^\omega \cup a^* b^\omega$ は (regular) adherence。$(L = adh\, a^* b^*)$ ▮

(定義 4.2)　$L \subset \Sigma^\infty$ と $x, y \in \Sigma^*$ に対し，$\partial_x L \overset{def}{=} \{ z \in \Sigma^\infty \mid xz \in L \}$ を L の x による左微分と呼ぶ。Σ^* 上の語の同値関係 $\sim$ を，$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall z \in \Sigma^\infty)[xz \in L \Leftrightarrow yz \in L]$ と定義し，x を含む同値類を $[x]^\sim \overset{def}{=} \{ y \in \Sigma^* \mid x \sim y \}$ と表わす。▮

r.a. には次のような特徴がある。

(定理 4.1)　$L \subset \Sigma^\omega$ に対し，次の (1)〜(6) は同値である。

(1)　L は regular adherence,

(2)　L は adherence かつ L は ω-正規集合,

(3)　L は adherence かつ $fg L$ は正規集合,

(4)　L は adherence かつ $\{ \partial_x L \mid x \in \Sigma^* \}$ は有限集合,

(5)　L は adherence かつ $\{ [x]^\sim \mid x \in \Sigma^* \}$ は有限集合,

(6)　L は $1'$-ω-fa で受理される。▮

証明は文献 [8] を参照。ここでは (4) ⇒ (6) を示しておく。$\{ \partial_x L \mid x \in \Sigma^* \}$ が有限集合だから，ω-fa $\mathcal{A}$ を次のように構成する。　$\mathcal{A} \overset{def}{=} \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$,

ここで，$Q \overset{def}{=} \{ \partial_x L \mid x \in \Sigma^* \}$, $q_0 \overset{def}{=} \partial_\varepsilon L$, $F \overset{def}{=} \{ \partial_x L \mid \partial_x L \neq \phi \}$

$(\forall x \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma)$　$\delta(\partial_x L, a) \overset{def}{=} \partial_{xa} L$ 。

$L = L_{1'}(\mathcal{A})$ を示す。$X \in L \Rightarrow (\forall i \in N)(\exists z \in \Sigma^\omega)[(X/i) z \in L]$

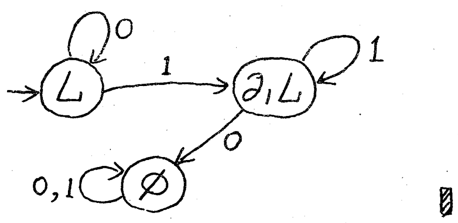
$\Rightarrow (\forall i \in N)[\partial_{X/i} L \neq \emptyset] \Rightarrow (\forall i \in N)\ \delta(q_0, X/i) \in F \Rightarrow E_{q_0}(X) \subseteq F$ $\Rightarrow X \in L_{1'}(\mathcal{A})$。 逆に $X \in L_{1'}(\mathcal{A}) \Rightarrow E_{q_0}(X) \subseteq F \Rightarrow$ 任意の $i \in N$ で $\delta(q_0, X/i)$ が定義されかつ $\delta(q_0, X/i) \in F \Rightarrow (\forall i \in N)\ \partial_{X/i} L \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ L が adherence のとき, $(\forall X \in \Sigma^\omega)[(\forall i \in N)\ \partial_{X/i} L \neq \emptyset \Rightarrow X \in L]$ が成立するから $X \in L$ 。 ∎

定理4.1から, r.a.がω-正規表現の形式で与えられたとき, 左微分演算によってそのr.a.を受理する1'-ω-faが構成できることがわかる。この時に構成される1'-ω-faは空集合$\emptyset$をdead stateとするcenter ω-faであり, 状態数最小でかつLによって一意に定まる。

(例2)　$L = 0^\omega \cup 0^* 11111 1^\omega$

$\partial_0 L = L, \quad \partial_1 L = 1^\omega$

$F = \{\partial_0 L, \partial_1 L\}$



∎

$L_1 = (0+1)^* 0^\omega$, $L_2 = (1^* 0)^\omega$ などはω-正規集合ではあるが, r.a.ではない。それゆえ1'-ω-faによって受理されない。また, $\partial_0 L_1 = \partial_1 L_1 = L_1$, $\partial_0 L_2 = \partial_1 L_2 = L_2$ となるから, 左微分演算は一般のω-正規表現に対してはω-faを構成する手助けとはならない。

5.　regular adherence の等価性判定

r.a.がω-正規集合の部分クラスであることとGINZBURG[7]の正規表現等価性判定アルゴリズムを利用してr.a.の等価性

判定アルゴリズムを示す。

$L \subset \Sigma^{\infty}$に対して $\mathrm{cent}\, L \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{fg}(\mathrm{adh}\, L)$ と定める。

$L_1 (= \mathrm{adh}\, V_1)$, $L_2 (= \mathrm{adh}\, V_2)$ が r.a. であるとき

$L_1 = L_2 \Longleftrightarrow \mathrm{fg}\, L_1 = \mathrm{fg}\, L_2 \Longleftrightarrow \mathrm{cent}\, L_1 = \mathrm{cent}\, L_2 \Longleftrightarrow \mathrm{cent}\, V_1 = \mathrm{cent}\, V_2$

であることが示せるから，$L_1 = L_2$の代りに$\mathrm{cent}\, L_1 = \mathrm{cent}\, L_2$ ($\mathrm{cent}\, V_1 = \mathrm{cent}\, V_2$) であるかどうか調べればよい。

(性質 5.1)　$V_1, V_2 \subset \Sigma^*$がいずれも空集合でないとき，

(1) V_1が有限集合のとき，$\mathrm{cent}\, V_1 = \phi$,

(2) $\mathrm{cent}(V_1 \cup V_2) = \mathrm{cent}\, V_1 \cup \mathrm{cent}\, V_2$,

(3)
$$\mathrm{cent}(V_1 V_2) = \begin{cases} \mathrm{fg}\, V_1 \cup V_1\, \mathrm{cent}\, V_2, & (V_2\text{が無限集合}) \\ \mathrm{cent}\, V_1, & (V_2\text{が有限集合}) \end{cases}$$

(4) $V_1 \neq \{\varepsilon\}$のとき　$\mathrm{cent}\, V_1^* = \mathrm{cent}\, V_1^{\omega} = V_1^*\, \mathrm{fg}\, V_1$ ∎

(regular adherenceの等価性を判定する手続き)

r.a. L_1, L_2の表現形式で (A), (B), (C) の三通りに分ける。

(A) r.a. L_1, L_2がω-正規表現で与えられたとき，

(A-1) L_1, L_2 のω-正規表現に性質 5.1 のcent演算を適用して，$\mathrm{cent}\, L_1$, $\mathrm{cent}\, L_2$を表わす正規表現を得る。

(A-2) $\mathrm{cent}\, L_1$, $\mathrm{cent}\, L_2$を表わす正規表現にGINZBURG [7] の正規表現等価性判定アルゴリズムを適用する。L_1, L_2がr.a. だから，$\mathrm{cent}\, L_1 = \mathrm{cent}\, L_2$ならば$L_1 = L_2$と判定し，$\mathrm{cent}\, L_1 \neq$

$\mathrm{cent}\,L_2$ ならば $L_1 \neq L_2$ と判定して終了する。▯

（注意）　L_1, L_2 が $L_1 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^{\omega}$, $L_2 = \bigcup_{j=1}^{m} C_j D_j^{\omega}$ とω-正規表現で書き表わされていたときは $\mathrm{cent}\,L_1 = fg(\bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^{*})$ であることが示せるから，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^{*}$ と $\bigcup_{j=1}^{m} C_j D_j^{*}$ の状態遷移図をまず構成し，次に $fg(\bigcup_{i=1}^{n} A_i B_i^{*}) = fg(\bigcup_{j=1}^{m} C_j D_j^{*})$ であるかどうか対応表を使って確かめれば，(A-1) を省くことができる。（付録の例を参照）▯

(B)　r.a. L_1, L_2 が $L_1 = \mathrm{adh}\,V_1$, $L_2 = \mathrm{adh}\,V_2$ となるω-正規表現 V_1, V_2 の形式で与えられたときは，(A) と同様に性質5.1の cent 演算を適用して $\mathrm{cent}\,V_1$, $\mathrm{cent}\,V_2$ を表わす正規表現を得てそれらに GINZBURG のアルゴリズムを適用すればよい。▯

(C)　r.a. L_1, L_2 が $L_1 = L_{1'}(\mathcal{A})$, $L_2 = L_{1'}(\mathcal{B})$ となる $1'$-ω-fa $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の形式で与えられたとき，

(C-1)　$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ から center ω-fa $c(\mathcal{A}), c(\mathcal{B})$ を構成する。

(C-2)　$L^f(c(\mathcal{A})) = L^f(c(\mathcal{B}))$ であるかどうか判定する。これは有限長の記号列集合だから，通常の有限オートマトンの手法を修正した方法で判定できる。▯　　性質3.1より，

$$L_1 = L_2 \iff L_{1'}(\mathcal{A}) = L_{1'}(\mathcal{B}) \iff L^f(c(\mathcal{A})) = L^f(c(\mathcal{B}))$$

が示せるから，この手続き (C) は正しく判定する。

6.　まとめ

本報告では，ω-言語を生成する adh 演算を任意の正規集合

Vに適用して得られるregular adherence(r.a.) $adh\,V$に関して，左微分演算によりそのr.a.を受理するω-有限オートマトンが構成できること，またr.a.の等価性判定アルゴリズムがGINZBURGの正規表現等価性判定アルゴリズムを利用して得られることを述べた。r.a.の他の性質については機会を改めて報告する。

［参考文献］

[1] L. BOASSON & M. NIVAT, "Adherences of Languages," JCSS 20, 285-309 (1980)

[2] R.S. COHEN & A.Y. GOLD, "ω-Computations on Deterministic Pushdown Machines," JCSS 16, 275-300 (1978)

[3] L.H. LANDWEBER, "Decision Problems for ω-Automata," Math. Syst. Theory 3, 376-384 (1969)

[4] Y. CHOUEKA, "Theories of Automata on ω-Tapes: A Simplified Approach," JCSS 8, 117-141 (1974)

[5] R. McNAUGHTON, "Testing and Generating Infinite Sequences by Finite Automata," Inform. and Control 9, 521-531 (1966)

[6] J.A. BRZOZOWSKI, "Derivatives of Regular Expressions," JACM 11, 481-494 (1964)

[7] A. GINZBURG, "A Procedure for Checking Equality of Regular Expressions," J.ACM 14, 353-362 (1967)

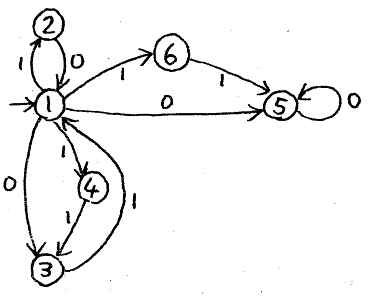
[8] 泉，稲垣，本多，"正規集合のadherenceによって得られるω-言語の等価性判定アルゴリズム，"電子通信学会 オートマトンと言語研究会資料 AL81-110

(付録)　r.a.　R と S の等価性判定の例

ω-正規表現　$R = [10+(0+11)0^*1]^\omega + [10+(0+11)0^*1]^*(0+11)0^\omega$

$S = (10)^\omega + (10)^*(11+0)[0+1(10)^*(11+0)]^\omega$
$\quad + (10)^*(11+0)[0+1(10)^*(11+0)]^*1(10)^\omega$

① cent R の状態遷移図 G_R



② 対応表

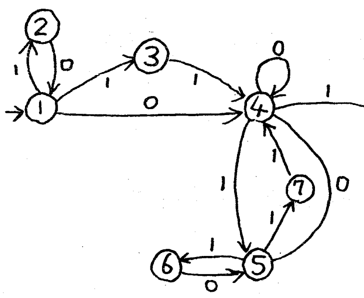
Inputs	Vertices of G_R: 1	2	3	4	5	6	Equal to
ε	V						$\partial_\varepsilon R = R$
0			V		V		
1		V		V		V	
00			V		V		0　$\partial_{00}R = \partial_0 R$
01	V						ε　$\partial_{01}R = \partial_\varepsilon R$
10	V						ε　$\partial_{10}R = \partial_\varepsilon R$
11			V		V		0　$\partial_{11}R = \partial_0 R$

③　$R = \partial_\varepsilon R = 0\cdot\partial_0 R + 1\cdot\partial_1 R$

$\partial_0 R = 0\cdot\partial_{00}R + 1\cdot\partial_{01}R = 0\cdot\partial_0 R + 1\cdot\partial_1 R$

$\partial_1 R = 0\cdot\partial_{10}R + 1\cdot\partial_{11}R = 0\cdot R + 1\cdot\partial_0 R$

①′ cent S の状態遷移図 G_S



②′ 対応表

Inputs	Vertices of G_S: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	Equal to
ε	V									
0				V						
1		V	V							
00				V						0
01					V			V		
10	V									ε
11				V						0
010				V						0
011						V	V		V	
0110					V			V		01
0111				V						0

③′　$S = 0\cdot\partial_0 S + 1\cdot\partial_1 S$

$\partial_0 S = 0\cdot\partial_{00}S + 1\cdot\partial_{01}S = 0\cdot\partial_0 S + 1\cdot\partial_{01}S$

$\partial_1 S = 0\cdot\partial_{10}S + 1\cdot\partial_{11}S = 0\cdot S + 1\cdot\partial_0 S$

$\partial_{01} S = 0\cdot\partial_{010}S + 1\cdot\partial_{011}S = 0\cdot\partial_0 S + 1\cdot\partial_{011}S$

$\partial_{011} S = 0\cdot\partial_{0110}S + 1\cdot\partial_{0111}S = 0\cdot\partial_{01}S + 1\cdot\partial_0 S$

④

$$\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} \partial_0 R \\ \partial_0 S \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} \partial_1 R \\ \partial_1 S \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_0 R \\ \partial_0 S \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} \partial_0 R \\ \partial_0 S \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} R \\ \partial_{01} S \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 R \\ \partial_1 S \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} \partial_0 R \\ \partial_0 S \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R \\ \partial_{01} S \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} \partial_0 R \\ \partial_0 S \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} \partial_1 R \\ \partial_{011} S \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 R \\ \partial_{011} S \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} R \\ \partial_{01} S \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} \partial_0 R \\ \partial_0 S \end{pmatrix}$$

⑤　$R, \partial_0 R, \partial_1 R, S, \partial_0 S, \partial_1 S, \partial_{01} S, \partial_{011} S$ のいずれも空集合でないから，④の各集合対は，片方だけが空集合であるということはない。よって

$$R = S$$

が示される。