数理解析研究所講究録
458巻 1982年 192-200

線型セル構造オートマトンのイデアル論的アプローチ

東洋大学 工学部　　　佐藤忠一

1．まえがき

セル構造オートマトンの局所関数が線型の時、線型セル構造オートマトンという。ここでは，セルの取り得る状態集合としてZ_mや有限可換環Rを考える。

Z_m上とR上の線型セル構造オートマトンは，多くの共通の性質を持ち、それらの間にはある種の対応が存在する。Z_m上の諸結果をR上に対応させるには，Z_m上の概念をイデアル論的な表現に書き直す必要がある。

2、準備

R上の線型セル構造オートマトンは、(Z^k, R, N, f)で与えられ，Zは整数の集合，Z^kはセルの集合，Rは各セルが取り得る状態の集合で有限可換環，NはZ^kの有限部

分集合で，$N=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。Nは近傍を表わす。fは，$R^n \to R$への線型写像で $f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ である。fは線型局所関数と呼ばれる。

Z^kからRへの写像を様相という。様相の集合をCと書く。fに対して、写像f_∞：$C \to C$を次のように定める。$x, y \in C$に対して，

$$f_\infty(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad y(r)=\sum_{j=1}^{n} a_j x(r+v_j)$$

ここで、$r+v_1, \cdots, r+v_n$なるn個のセルは、セル$r \in Z^k$の近傍と呼ばれる。f_∞を線型並列写像又は線型全域関数と言う。

定義1

fが単射	$\Leftrightarrow$	f_∞が単射
fが全射	$\Leftrightarrow$	f_∞が全射
f_∞が位数有限	$\Leftrightarrow$	$\exists n>0$, $f_\infty^n=I$ （Iは恒等写像）
f_∞が位数無限	$\Leftrightarrow$	f_∞は単射かつ $\forall n$, $f_\infty^n \neq I$
fが位数有限	$\Leftrightarrow$	$\exists$近傍N，　f_∞が位数有限
fが位数無限	$\Leftrightarrow$	$\forall$近傍N，　f_∞が位数無限

3．線型局所関数の単射性，全射性

以下の左側にZ_m上の，右側にR上の線型セル構造オー

トマトンの結果を並記する。

$\mathbb{Z}_m$ 上のセル構造オートマトン

定義２　$m = p_1^{k_1} \cdots\cdots p_\ell^{k_\ell}$ とする。

$f = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して、θ_j を

$$\theta_j = \{ i \mid p_i \nmid a_j \}$$

とする。$p_i \nmid a_j$ は、a_j は p_i で割り切れないことを示す。

定理１　$f = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して

f が全射になるための必要十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^{n} \theta_j = \{1, 2, \cdots\cdots, \ell\}$$

となることである。

定理２　$f = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して

f が単射になるための必要十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^{n} \theta_j = \{1, 2, \cdots\cdots \ell\}$$ かつ

$i \neq j$ ならば $\theta_i \cap \theta_j = \phi$

R 上のセル構造オートマトン

定義２′　R のすべての極大イデアルを $A_1, \cdots\cdots A_\ell$ とする。

$f = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して、θ_j を

$$\theta_j = \{ i \mid a_j \notin A_j \}$$

とする。

定理１′　$f = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して

f が全射になるための必要十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^{n} \theta_j = \{1, 2, \cdots\cdots, \ell\}$$

となることである。

定理２′　$f = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して

f が単射になるための必要十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^{n} \theta_j = \{1, 2, \cdots\cdots \ell\}$$ かつ

$i \neq j$ ならば $\theta_i \cap \theta_j = \phi$

となることである。

<u>定理3</u>　$f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して

f が位数有限になるための

必要十分条件は、

$\exists j$,　$\theta_j=\{1,2,\cdots,\ell\}$

かつ $i\neq j$ ならば、$\theta_i=\phi$

となることである。

<u>定理4</u>　$f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して

f が位数無限になるための

必要十分条件は、

$\bigcup_{j=1}^{n}\theta_j=\{1,2,\cdots,\ell\}$ かつ

$i\neq j$ ならば、$\theta_i\cap\theta_j=\phi$ かつ

各 θ_j に対して、$|\theta_j|<\ell$

<u>系1</u>　$m=p^r$ とする。

この時、単射である線型局所関数はすべて位数有限である。

<u>系2</u>　$m=p_1p_2\cdots p_\ell$　$(\ell>1)$

となることである。

<u>定理3'</u>　$f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して

f が位数有限になるための

必要十分条件は、

$\exists j$,　$\theta_j=\{1,2,\cdots,\ell\}$

かつ $i\neq j$ ならば、$\theta_i=\phi$

となることである。

<u>定理4'</u>　$f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して

f が位数無限になるための

必要十分条件は、

$\bigcup_{j=1}^{n}\theta_j=\{1,2,\cdots,\ell\}$ かつ

$i\neq j$ ならば、$\theta_i\cap\theta_j=\phi$ かつ

各 θ_j に対して、$|\theta_j|<\ell$

<u>系1'</u>　Rを局所環とする。

この時、単射である線型局所関数はすべて位数有限である。

<u>系2'</u>　Rを2個以上の有

とする。この時、スコープ中2以上の線型局所関数は、すべて位数無限である。

定理5　スコープ中n以下の全射である線型局所関数の個数$\varphi_n(m)$は次式で与えられる。

$$\varphi_n(m)=m^n\prod_{i=1}^{\ell}\left(1-\frac{1}{P_i^{\,n}}\right)$$

定理6　スコープ中n以下の単射である線型局所関数の個数$\psi_n(m)$は次式で与えられる。

$$\psi_n(m)=n^{\ell}\left(\frac{m}{\prod_{i=1}^{\ell}P_i}\right)^n\prod_{i=1}^{\ell}(P_i-1)$$

定理7　スコープ中n以下の位数有限の線型局所関数の個数$F_n(m)$は次式で与えられる。

限体からなる直和環とする。この時、スコープ中2以上の線型局所関数は、すべて位数無限である。

定理5′　スコープ中n以下の全射である線型局所関数の個数$\varphi_n(R)$は次式で与えられる。

$$\varphi_n(R)=|R|^n\prod_{i=1}^{\ell}\left(1-\frac{1}{|R/A_i|^n}\right)$$

定理6′　スコープ中n以下の単射である線型局所関数の個数$\psi_n(R)$は次式で与えられる。

$$\psi_n(R)=n^{\ell}\left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^{\ell}|R/A_i|}\right)^n\prod_{i=1}^{\ell}(|R/A_i|-1)$$

定理7′　スコープ中n以下の位数有限の線型局所関数の個数$F_n(R)$は次式で与えられる。

$$F_n(m) = n\left(\frac{m}{\prod_{i=1}^{l} p_i}\right)^n \prod_{i=1}^{l}(p_i-1)$$

系3　スコープ巾n以下の位数無限の線型局所関数の個数$I_n(m)$は次式で与えられる。

$$I_n(m)=(n^l-n)\left(\frac{m}{\prod_{i=1}^{l} p_i}\right)^n \prod_{i=1}^{l}(p_i-1)$$

系4　位数無限の線型局所関数が存在しないための必要十分条件は、スコープ巾が1であるか又は$m=p^r$かのいずれかが成立する。

系5　スコープ巾n以下の単射、全射の線型局所関数の個数の比は次式で与えられる。

$$\frac{\psi_n(m)}{\varphi_n(m)} = \frac{n^l}{\prod_{i=1}^{l}(1+p_i+\cdots+p_i^{n-1})}$$

系6　次式が成立する。

$$F_n(R) = n\left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^{l} |R/A_i|}\right)^n \prod_{i=1}^{l}(|R/A_i|-1)$$

系3′　スコープ巾n以下の位数無限の線型局所関数の個数$I_n(R)$は次式で与えられる。

$$I_n(R)=(n^l-n)\left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^{l} |R/A_i|}\right)^n \prod_{i=1}^{l}(|R/A_i|-1)$$

系4′　位数無限の線型局所関数が存在しないための必要十分条件は、スコープ巾が1であるか又はRが局所環であるかのいずれかが成立する。

系5′　スコープ巾n以下の単射、全射の線型局所関数の個数の比は次式で与えられる。

$$\frac{\psi_n(R)}{\varphi_n(R)} = \frac{n^l}{\prod_{i=1}^{l}(1+|R/A_i|+\cdots+|R/A_i|^{n-1})}$$

系6′　次式が成立する。

$$F_n(m)/\varphi_n(m) = \frac{1}{n^{e-1}}$$

性質1　$m=p_1^{r_1}\cdots p_e^{r_e}$ とする。Z_mにおいてイデアル$(p_i^{r_i})$はべき等イデアルであり
$(p_i)\supsetneqq(p_i)^2\supsetneqq\cdots\supsetneqq(p_i)^{r_i}=(p_i)^{r_i+1}$
である。

定理8　1次元セル空間において、全射である $f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して、その並列写像は定数対1写像であり、この定数を$|f|_m$で表わすと$|f|_m$は次式によって与えられる。

$$|f|_m=\prod_{i=1}^{e}(p_i^{r_i})^{n_i-1}$$

但し、n_iはmod p_iにおけるfのスコープ巾である。

定理9　1次元セル空間において、$K=\prod_{i=1}^{e}(p_i^{r_i})^{n_i-1}$とする。K対1写像となるスコープ巾

$$F_n(R)/\varphi_n(R) = \frac{1}{n^{e-1}}$$

定義3'　Rの極大イデアルA_iに対して、A_iによって生成されるべき等イデアルB_iとは
$A_i\supsetneqq A_i^2\supsetneqq\cdots\supsetneqq A_i^s=A_i^{s+1}$
なる時のA_i^sを表わす。

定理8'　1次元セル空間において、全射である $f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ に対して、その並列写像は定数対1写像であり、この定数を$|f|_R$で表わすと$|f|_R$は次式によって与えられる。

$$|f|_R=\prod_{i=1}^{e}|R/B_i|^{n_i-1}$$

但し、n_iはR/A_iにおけるfのスコープ巾である。

定理9'　1次元セル空間において、正の整数Kに対して$(n_1^*, n_2^*, \ldots, n_e^*)$を次式を満足

n以下の線型局所関数の個数は次式で与えられる。

$$\left(\frac{m}{\prod_{i=1}^{\ell} p_i}\right)^n \prod_{i=1}^{\ell}(n-n_i+1)(p_i-1)^{2-\left[\frac{1}{n_i}\right]} p_i^{\frac{|n_i-2|+n_i-2}{2}}$$

ここで[ ]はガウス記号

定理10 2次元以上のセル空間において、fを全射である線型局所関数とする時、次の(1)〜(4)は互いに等価である。

(1) fは単射である

(2) $|f|_m < \infty$

(3) $\forall x \in C,\ |f_\infty^{-1}(x)| < \infty$

(4) $\exists x \in C,\ |f_\infty^{-1}(x)| < \infty$

するS個の正の整数のℓ組とする。$1 \leq j \leq S$

$$K = \prod_{i=1}^{\ell} |R/B_i|^{n_i^j - 1}$$

この時K対1写像となるスコープ巾n以下の線型局所関数の個数は次式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^{\ell}|R/A_i|}\right)^n \prod_{i=1}^{\ell}(n-n_i^j+1)(|R/A_i|-1)^{2-\left[\frac{1}{n_i^j}\right]} |R/A_i|^{\frac{|n_i^j-2|+n_i^j-2}{2}}$$

ここで[ ]はガウス記号

定理10' 2次元以上のセル空間において、fを全射である線型局所関数とする時、次の(1)〜(4)は互いに等価である。

(1) fは単射である

(2) $|f|_R < \infty$

(3) $\forall x \in C,\ |f_\infty^{-1}(x)| < \infty$

(4) $\exists x \in C,\ |f_\infty^{-1}(x)| < \infty$

4、まとめ

$\mathbb{Z}_m$ 上とR上の線型セル構造オートマトンは、次のような対応が考えられる。

$\mathbb{Z}_m$	R
$m = p_1^{r_1} \cdots p_\ell^{r_\ell}$	$\lvert R \rvert$
(p_i)	A_i（極大イデアル）
p_i	$\lvert R/A_i \rvert$
$(p_i^{r_i})$	B_i（べキ等イデアル）
$p_i^{r_i}$	$\lvert R/B_i \rvert$
ℓ	Rの極大イデアルの個数
n（スコープ巾）	n（スコープ巾）
$p_i \mid a_j$	$a_j \in A_i$

5、結論

$\mathbb{Z}_m$ 上の線型セル構造オートマトンを調べれば、R上のそれは、ほぼ推定される。