

最小切点集合を求めるための  $O(n^2)$  アルゴリズム

電通大 戸田 誠之助  
笠井 琢美

## 1. 序 論

有限有向グラフによって定式化される計算機のフローグラムなどの解析に於いて、切点集合と呼ばれる頂点の集合が必要となる。また、切点集合の頂点の数を減らすことにより、より単純で効率のよい解析法を導くことができる。しかし、最小切点集合を求める問題はNP完全であることが知られている。<sup>4)</sup> また、可約グラフ<sup>5)</sup>と呼ばれるクラスに対しては、線型時間アルゴリズムが知られている。しかし、フローグラムの解析などでは、可約グラフのクラスでは制限が強すぎると考えられる。従って、本論文では、可約グラフやモジュラグラフ<sup>6)</sup>などのグラフを含む弱可約グラフと呼ばれるより広いクラスを導入し、このクラスに対して効率のよいアルゴリズムを与える。このアルゴリズムの中心的役割を演ずるのはグラフ間の変換規則であり、変換規則の基本的性質を用いて弱可約が

グラフのクラスが定義される。変換規則を  $O(n^2)$  アルゴリズムとして実現できる。ここで、 $n$  は頂点の数である。

## 2. 最小切点集合

本節では、グラフ理論の基本的概念を述べ、最小切点集合、変換規則及びグラフ間の関係を定義する。また、変換規則の重要な性質について述べる。

〔定義 2.1〕 有限有向グラフ (以後、単にグラフと呼ぶ)  $G$  を対  $(V, A)$  で表わす。ここで、 $V$  は 頂点の集合、 $A$  は 辺の集合 である。頂点  $v, w$  に対し、辺  $(v, w)$  が存在するならば、 $v$  を  $w$  の 前者、 $w$  を  $v$  の 後者 と呼ぶ。頂点  $v$  の 入次数  $\text{indeg}(v)$  は  $v$  に入る辺の数であり、 $v$  の 出次数  $\text{outdeg}(v)$  は  $v$  から出ている辺の数である。辺  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ ,  $k > 0$ , が存在するとき、頂点の系列  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  を長さ  $k$  の 路 と呼ぶ。閉路 は  $v_0 = v_k$  なる路である。閉路  $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$  が 単純 であるとは、 $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$  が全て異なるときをいう。長さ 1 の閉路  $(v, v)$  を ループ と呼び、このとき頂点  $v$  はループを持つという。頂点の集合  $V$  が空集合であるとき、グラフ  $G$  を 空グラフ と呼び重で表わす。 ■

〔定義 2.2〕 グラフ  $G = (V, A)$  の単純閉路の全体を  $S(G)$  で表わす。路  $P$  に含まれる頂点の集合を  $\lambda_P$  で表わす。

頂点の集合  $K \subseteq V$  が 切点集合 であるとは、 $G$  の任意の単純閉路が  $K$  の少なくとも1つの頂点を含む(すなわち、 $(\forall C \in S(G)) \lambda C \cap K \neq \emptyset$ ) ときをいう。 $G$  の切点集合で要素数が最小のものを  $G$  の 最小切点集合 と呼ぶ。 ■

次に、与えられたグラフに対して適用される変換規則を定義する。以後の議論で  $\Sigma$  を可算無限集合とし、任意の頂点の集合は  $\Sigma$  の部分集合とする。

[定義 2.3]  $G=(V, A)$  をグラフとし、 $K$  を頂点の集合とする。変換規則  $R_i (1 \leq i \leq 5)$  は  $G$  及び  $K$  に対して次のように適用される。

(R<sub>1</sub>)  $\text{indeg}(v) = 0$  なる頂点  $v$  が存在するとき、 $v$  を  $V$  から削除し、 $v$  から出ている辺を  $A$  から削除する。

(R<sub>2</sub>)  $\text{outdeg}(v) = 0$  なる頂点  $v$  が存在するとき、 $v$  を  $V$  から削除し、 $v$  に入る辺を  $A$  から削除する。

(R<sub>3</sub>) ループを持つ頂点  $v$  が存在するとき、 $v$  を  $K$  に加えて  $V$  から削除する。また、 $v$  に入る辺、 $v$  から出ている辺を  $A$  から削除する。

(R<sub>4</sub>)  $\text{outdeg}(v) = 1$  でかつループを持たない頂点  $v$  が存在するとき、 $v$  の唯一の後者を  $v^*$  とすると、 $v$  の任意の前者から  $v^*$  への辺を  $A$  に加える。また、 $v$  を  $V$  から削除し、 $v$  に入る辺及び辺  $(v, v^*)$  を  $A$  から削除する。

(R5)  $\text{indeg}(v) = 1$  ばかりのフルーノを持たない頂点  $v$  が存在するとき、 $v$  の唯一の前者を  $v^P$  とすると、 $v^P$  から  $v$  の任意の後者への辺を  $A$  に加える。また、 $v$  を  $V$  から削除し  $v$  から出ている辺及び辺  $(v^P, v)$  を  $A$  から削除する。 ■

[定義 2.4]  $G = (V, A)$  をグラフとし、 $K$  を頂点の集合とする。 $V \cap K = \emptyset$  のとき、対  $(G, K)$  を 適用可能な対 と呼ぶ。 ■

定義 2.3 から明らかのように、変換規則は適用可能な対に対して適用される。次に、適用可能な対の間の関係を定義する。

[定義 2.5] ある集合  $X$  上の 2 項関係  $R, R'$  に対し、 $R$  と  $R'$  の 和  $R \cup R'$  を  $x(R \cup R')y \leftrightarrow xRy \vee xR'y$  で定める。また、 $R$  の 中  $R^i$  ( $i \geq 0$ ) を  $xR^0y \leftrightarrow x=y$ 、 $i \geq 1$  に対し  $xR^iy \leftrightarrow (\exists z \in X) xR^{i-1}z \wedge zRy$  で定め、 $R$  の 反射的推移的閉包  $R^*$  を  $xR^*y \leftrightarrow x(R^0 \cup R \cup R^2 \cup \dots)$  で定める。 $R$  の完備化  $\hat{R}$  は、 $x\hat{R}y \leftrightarrow xR^*y \wedge (\forall z \in X) yRz$  で定義される。対  $(X, R)$  が 有限 であるとは、任意の要素  $x \in X$  に対し、 $xR^iy$  ならば  $i \leq k_x$  なる整数  $k_x$  が存在するときをいう。 ■

[定義 2.6]  $(G, K), (G', K')$  を適用可能な対とする。 $(G, K)$  に変換規則を適用して  $(G', K')$  が得られるとき、 $(G, K) \Rightarrow (G', K')$  で表わす。とくに、規則  $R_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) を

明記するときは、 $(G, K) \xrightarrow{\phi} (G', K')$  で表わす。更に、適用された頂点をも明記するときは、 $(G, K) \xrightarrow{\phi(v)} (G', K')$  で表わす。また、 $\xrightarrow{\sim}$ ,  $\xrightarrow{*}$ ,  $\xrightarrow{\hat{=}}$  については定義 2.5 に従う。 ■

最後に、変換規則の重要な性質を示す。以後、グラフ  $G$  と  $G'$  が同形であることを  $G \simeq G'$  で表わす。

<補題 2.1> 適用可能な対の間の関係  $\Rightarrow$  に対し、次が成り立つ。

(1)  $\Pi$  を適用可能な対の全体とすると、対  $(\Pi, \Rightarrow)$  は有限である。(2)  $(G_i, K_i)$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) を適用可能な対とする。任意のグラフ  $G$  に対し、 $(G, \phi) \Rightarrow (G_1, K_1)$  かつ  $(G, \phi) \Rightarrow (G_2, K_2)$  ならば  $(G_1, K_1) \xrightarrow{*} (G_3, K_3)$  かつ  $(G_2, K_2) \xrightarrow{*} (G_4, K_4)$  かつ  $G_3 \simeq G_4$  なる  $(G_3, K_3)$ ,  $(G_4, K_4)$  が存在する。

(3) また、任意のグラフ  $G$  に対し、 $(G, \phi) \Rightarrow (G_1, K_1)$  かつ  $(G, \phi) \Rightarrow (G_2, K_2)$  ならば  $(G_1, K_1) \xrightarrow{\hat{=}} (G_3, K_3)$  かつ  $(G_2, K_2) \xrightarrow{\hat{=}} (G_4, K_4)$  かつ  $G_3 \simeq G_4$  なる  $(G_3, K_3)$ ,  $(G_4, K_4)$  が存在する。

(証明略) □

<定理 2.1> 任意のグラフ  $G$  に対し、 $(G, \phi) \xrightarrow{\hat{=}} (G_1, K_1)$  かつ  $(G, \phi) \xrightarrow{\hat{=}} (G_2, K_2)$  ならば  $G_1 \simeq G_2$  である。

(証明略) □

### 3. 弱可約グラフ

本節では、弱可約グラフと呼ばれるクラスを導入し、このクラスに含まれるグラフに関して変換規則が最小切点集合を与えることを示す。

[定義3.1] グラフ  $G$  に対し、 $(G, \phi) \Rightarrow (G', K')$  なるとき、 $G'$  を  $G$  の 極限グラフ、 $K'$  を  $G$  の 極限集合 と呼ぶ。グラフ  $G$  が 弱可約 であるとは、 $G$  の極限グラフが空グラフ重であるときをいう。 ■

<補題3.1>  $(G, K), (G', K')$  を適用可能な対とする。

$(G, K) \xrightarrow{(uv)} (G', K')$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) のとき次が成り立つ。

(1)  $i \neq 3$  のとき、任意の閉路  $C \in S(G)$  に対し  $\lambda_C = \lambda_{C'}$  かまたは  $\lambda_C = \lambda_{C' \cup \{uv\}}$  なる閉路  $C' \in S(G')$  が存在する。(2) 逆に、任意の閉路  $C' \in S(G')$  に対し、 $\lambda_{C'} = \lambda_C$  かまたは  $\lambda_{C' \cup \{uv\}} = \lambda_C$  なる閉路  $C \in S(G)$  が存在する。

(証明略) □

<補題3.2>  $(G, K), (G', K')$  を適用可能な対とする。

$(G, K) \xrightarrow{\subseteq} (G', K')$  ( $i \neq 3$ ) のとき、次が成り立つ。

(1)  $K = K'$  (2)  $G'$  の切点集合  $\tilde{K}'$  は  $G$  の切点集合である。

(略証) (1) 変換規則の定義より明らか。(2) 補題3.1の(1)より  $G$  の任意の閉路  $C$  に対し  $\lambda_{C'} \leq \lambda_C$  なる閉路  $C' \in S(G')$  が存在する。よって、 $\emptyset \neq \lambda_{C'} \cap \tilde{K}' \subseteq \lambda_C \cap \tilde{K}'$  となり、

$\tilde{K}$  は  $G$  の切点集合である。  $\square$

<定理 3. 1>  $G = (V, A)$ ,  $G' = (V', A')$  をグラフとし,  $(G', K')$  を適用可能な対とする。  $(G, \phi) \rightsquigarrow (G', K')$  なるとき,  $G'$  の切点集合を  $\tilde{K}'$  とすると,  $\tilde{K} \cup \tilde{K}'$  は  $G$  の切点集合である。

(略証) 変換規則の適用回数に関する帰納法で証明する。

(i)  $(G, \phi) = (G', K')$  のときは明らか。 (ii)  $(G, \phi) \rightsquigarrow (G_1, K_1) \xrightarrow{\text{②}} (G', K')$  ( $1 \leq i \leq 5$ ,  $v \in V$ ) とする。  $G_1$  の切点集合を  $\tilde{K}_1$  とするとき  $\tilde{K}_1 \cup K_1$  は  $G$  の切点集合であると仮定する。  $i \neq 3$  ならば, 補題 3. 2 より, 明らかに  $\tilde{K} \cup K'$  は  $G$  の切点集合である。  
 $i = 3$  のとき,  $S(G') = S(G_1) - \{c \in S(G_1); v \in \lambda_c\}$  となるので,  $\tilde{K} \cup \{v\}$  は  $G_1$  の切点集合である。 また,  $K' = K_1 \cup \{v\}$  であるから,  $\tilde{K} \cup K' = (\tilde{K} \cup \{v\}) \cup K_1$  となり,  $\tilde{K} \cup K'$  は  $G$  の切点集合である。  $\square$

<系> 弱可約グラフ  $G$  の極限集合  $K_\phi$  は  $G$  の切点集合である。  $\square$

以上より, 弱可約グラフ  $G$  に変換規則を適用することにより,  $G$  の切点集合  $K_\phi$  が得られることが示された。 以下では,  $K_\phi$  が  $G$  の最小切点集合であることを示す。 以後,  $G$  の最小切点集合の要素数を  $\mu(G)$  で表わす。

<補題 3. 3>  $(G, K)$ ,  $(G', K')$  を適用可能な対とする。  
 $(G, K) \xrightarrow{\text{②}} (G', K')$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) なるとき, 次が成り立つ。

(1)  $i=3$  のとき,  $\nu(G) = \nu(G') + 1$

(2)  $i \neq 3$  のとき,  $\nu(G) = \nu(G')$

(略証)  $G$  の最小切点集合を  $\tilde{K}$  とする。

(1) 頂点  $v$  は  $G$  に於いてループを持つので  $v \in \tilde{K}$  である。また,  $S(G') = S(G) - \{c \in S(G); v \in \lambda c\}$  であるから,  $\tilde{K} - \{v\}$  は  $G'$  の最小切点集合である。よって,  $\nu(G) = \nu(G') + 1$ 。

(2)  $i=1, 2$  のとき明らか。  $i=4$  のとき, 補題 3.2 より

$\nu(G) \leq \nu(G')$  である。また,  $v \in \tilde{K}$  ならば  $\tilde{K}$  は  $G$  の切点集合である。一才, このような  $\tilde{K}$  が少なくとも 1 つは存在する (∵)  $v \in \tilde{K}$  ならば,  $(\tilde{K} - \{v\}) \cup \{v^s\}$  は  $G$  の最小切点集合である。ここで,  $v^s$  は  $v$  の  $G$  に於ける唯一の後者である)。よって  $\nu(G) \geq \nu(G')$  となる。以上より,  $\nu(G) = \nu(G')$ 。□

<定理 3.2> 弱可約グラフ  $G$  の極限集合  $K_\phi$  は  $G$  の最小切点集合である。

(略証) 補題 3.3 より,  $\nu(G) = \nu(\Phi) + |K_\phi|$  である。一才,  $\nu(\Phi) = 0$  であるから,  $\nu(G) = |K_\phi|$  となり,  $K_\phi$  は  $G$  の最小切点集合である。□

#### 4. 結論

有限有向グラフに対し適用される変換規則を定義し, 変換規則の重要な性質を導いた。この性質をもとに, 弱可約グラフ



フと呼ばれるクラスを定義し，変換規則が弱可約グラフに対して最小切点集合を与えることを示した。現在，変換規則をもとに  $O(|V|^2)$  アルゴリズムが考えられている。

興味ある問題として，弱可約グラフであるための必要十分条件を求めることが残されている。また，任意のグラフに対し最小切点集合の近似解を求めるアルゴリズムを設計することなども考えられる。

〔謝 辞〕 本論文を書くにあたり，有益な助言を与え，また文献(10)の存在をいち早く知らせて致いただいた 電気通大学 町田元さんに心から感謝します。

#### 〈参考文献〉

- (1) Adachi, A., T. Kasai and E. Moriya: "A theoretical study on the time analysis of programs", Lecture Notes in Computer Science 74, pp 201-207, 1979.
- (2) Even, S., "Graph Algorithms", Computer Science Press, Inc., pp 223-224, 1979.
- (3) Floyd, R.W.: "Assigning meanings to programs", proc. symp. Appl. Math., 19, pp 19-32, 1967.

(4) Garey, M. R. and D. S. Johnson: "Computer and Intractability", A Guide to Theory of NP-completeness, W. H. Freeman and Company, pp 191-192, 1979.

(5) Hecht, M. S. and J. D. Ullman: "Flow Graph Reducibility", SIAM J. Comput, Vol. 1, No. 2, pp 188-202, 1972.

(6) Iwata, S.: "Programs with minimal goto statement", Inf & Control, Vol. 37, No. 1, pp 105-114, 1978.

(7) Kasai, T.: "Translatability of flowcharts into while programs", J. Comput & System Sci., Vol. 9, No. 2, pp 177-195, 1974.

(8) Kasai, T. et al: "An automatic time analysis system - TIMER", Technical Rept., RIMS-335, Research Institute for Math. Sci., Kyoto Univ., 1980.

(9) Manna, Z.: "Mathematical and Theory of Computation", McGraw-Hill Inc, 1974.

(10) Shamir, A.: "A linear Time Algorithm for Finding Minimum Cutsets in Reducible Graphs.", SIAM J. Comput, Vol. 8, No. 4, pp 645-655, 1979.