数理解析研究所講究録
458巻 1982年 47-53

3－連結グラフの連結点被覆問題

広島大 工学部 渡辺敏正
中村 昭

1. Introduction

グラフGを点集合V_Gと辺集合E_Gの対として$G=(V_G, E_G)$と表わす。Gの点部分集合$N \subset V_G$に対し，

(i) 点被覆(node cover)である

$\Longleftrightarrow$ $\{u, v\} \cap N \neq \phi$ for $\forall (u, v) \in E_G$.

(ii) 連結点被覆(connected node cover)である

$\Longleftrightarrow$ 点被覆でしかもGにおいてNにより誘導される部分グラフG(N)が連結である.

Gから何個かの点を除去(つまり点とそれを端点とする辺をすべて除去)すると，Gの連結性が失われて，非連結グラフか自明なグラフができるが，そのような点の最小個数をGの連結度(connectivity)と呼び，$\kappa(G)$と表わす．Gがk－連結(k－connected)であるとは，$k \leqq \kappa(G)$であることをいう．点$v \in V_G$のGでの点次数(node degree)を$\delta_G(v)$と表わ

し，$\delta(G)=\max_{v\in V_G}\delta_G(v)$ と表わす．常に，$\kappa(G)\leqq\min_{v\in V_G}\delta_G(v)$ である [2, 5, 10]．

r 個の点から成る初等閉路 C_r に1点 $v_0\notin V_{C_r}$ と r 本の辺 (v_0, v) $(v\in V_{C_r})$ を付加して構成されるグラフを車輪グラフ (wheel) と呼び，W_{r+1} と表わす．C_r，辺 (v_0, v) 及び点 v_0 をそれぞれリム (rim)，スポーク (spoke) 及びハブ (hub) と呼ぶ。

W.T. Tutte により3－連結グラフの特徴付けがなされている．

Theorem 1 [10].

グラフ G が3－連結であるための必要十分条件は G が車輪グラフであるか，または車輪グラフから次のような2種類の演算 I，II を何回か繰返して得られるグラフになっていることである：

演算 I．新しい辺を付け加える（辺の付加）．

演算 II．点次数が4以上の点 v を新しく隣接した2点 v'，v''（v' と v'' は新しい辺で結ぶ）で置き換えて，それまで v と隣接していた点のそれぞれを，新しいグラフの中では v'，v'' のいずれか1点だけと v'，v'' いずれの点次数も3以上になるように辺で結ぶ（点の分割）．

2. Results

NP－完全な，あるいは多項式時間可解な点被覆または連結点被覆問題についての既知の結果及び新しく得られた結果を以下に述べる．

2．1．既知の結果

下表にまとめておく．

	NP－完全	多項式時間可解
点被覆	∘ 平面, $\delta(G) \leqq 3$ [3] ∘ 平面, 連結, 3次正則 [11, 12, 13]	∘ 2部グラフ $O(n^{5/2})$ [18] ∘ 直並列グラフ $O(n)$ [11]
連結点被覆	∘ 平面, 連結, $\delta(G) \leqq 4$ [3]	

$(n = |V_G|)$

2．2．新しく得た結果

車輪グラフから演算Ⅰまたは Ⅱのいずれか一方のみを用いて構成されるグラフを準車輪グラフと呼ぶ．演算Ⅰのみならば辺付加型，演算Ⅱのみならば点分割型と呼ぶ．

3－連結グラフの点被覆，連結点被覆問題に関して新しく得られた結果を下表にまとめておく．

	NP-完全	多項式時間可解
点被覆	∘ 平面, 3-次正則, 3-連結 ∘ 辺付加型準車輪 $\delta_G(v) \leq 6$, $\forall v \in V_G$	∘ 平面, 辺付加型準車輪
連結点被覆	∘ 平面, 3-連結 [17] ∘ 平面, 3-連結 $\delta_G(v) = 3$ または 4, $\forall v \in V_G$ ∘ 辺付加型準車輪 $\delta_G(v) \leq 6$, $\forall v \in V_G$	∘ 平面, 辺付加型準車輪 ∘ 平面, 点分割型準車輪

（注１）準車輪グラフのリムが定まれば，それから最小点被覆，最小連結点被覆は多項式時間で求められる．

（注２）点分割型準車輪グラフに関しては，平面，非平面いずれについても「最小連結点被覆数」は計算することができる．

（注３）上の表で多項式時間可解な場合について，計算時間は，今のところ，$O(n^2)$ である．但し，$n = |V_G|$ である．これは，注１で述べたように，準車輪グラフのリムを定めることに大きく依存している．

3. Concluding remarks.

3－連結グラフの最小点被覆，最小連結点被覆に関して，新しく得られた結果を簡単に述べた．本稿の一部は文献[17]で既に報告しているが，ここで述べた結果の証明等は，他の特性化と共に別に報告する予定である．

4. References

[1] Aho, Hopcroft & Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

[2] Berge, C., Graphs and Hypergraphs, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] Garey & Johnson, The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete, SIAM J. Appl. Math., 32, 4, 1977, 826-834.

[4] ——————, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, Freeman, San Francisco, 1978.

[5] Harary, F., Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[6] Hopcroft & Tarjan, Efficient planarity testing, J. ACM, 21, 4, 1974, 549-568.

[7] ——————, Dividing a graph into triconnected components, SIAM J. Comput., 2, 3, 1973, 135-158.

[8] Karp, R.M., Reducibility among combinatorial problems, in: Miller, R.E. and Thatcher, J.W., eds., "Complexity of Computer Computations" (85–104), Plenum Press, New York, 1972.

[9] Reingold, Nievergelt & Deo, Combinatorial Algorithms: Theory and Practice, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.

[10] Tutte, W.T., Connectivity in Graphs, University of Tronto Press, London, U.K., 1966.

[11] Watanabe, Ae & Nakamura, On the node cover problem of planar graphs, Proc. of 1979 I.S.C.A.S., 78–81.

[12] 渡辺，阿江，中村，平面グラフの点の除去による直並列グラフの構成について，信学技報AL79-63 (1979-11).

[13] ――――――――，平面グラフの点除去による2端子直並列グラフの構成問題，信学論(D)，J64-D, 4 (昭56-04), 368-369.

[14] ――――――――，辺開放除去問題のNP-困難性について，信学論(D)，J64-D, 11 (昭56-11)，1005-1012.

[15] ――――――――，辺短絡除去問題のNP-困難性について，信学論(D)，J64-D, 11 (昭56-11)，1053-1054.

[16] Watanabe, Ae & Nakamura, On the NP-hardness of Edge-

deletion and -contraction Problems, Discrete Applied Math., to appear.

[17] 渡辺，中村，3－連結グラフの連結点被覆問題，信学技報 AL81－79（1981－11）。

[18] Lawler, E. L., Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Holt, Reinhart & Winston, New York, 1976.