数理解析研究所講究録
458巻 1982年 30-39

付随式を用いる1階述語論理の証明図作成方法

名工大 工　大芝 猛
永田周郎
舟橋 栄

本稿では与えられた論理式Aに対し，冠頭標準形変形を経由せずに妥当性検証を行い（手続きCHK），その検証が肯定的に終了したときに得られる情報をguideとして，論理式AのLK証明図を下から上方へ決定論的に手もどりなく書き上げる（アルゴリズムPAL）方法を述べる。

(0) そのために先づ，任意のLK論理式A（冠頭でなくてよい）に対し，Aのquantifierに以下のようにguide index form (X_i), $[f_j(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})]$ を付してうる<u>Aの付随式 $\tilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$ (adjoint formula)</u>を用意する。

① Aのnegative ∀とpositive ∃全体が左から $\alpha_1 x_1,\cdots,\alpha_n x_n$ であるとき，これらに (X_i) を付し $\alpha_1 \underset{(X_1)}{x_1},\cdots,\alpha_n \underset{(X_n)}{x_n}$ とする。（但し X_i は証明図作成時にtermを代入すべき表示変数である。）また更にAのpositive ∀とnegative ∃全体が左から $\beta_1 y_1,\cdots\beta_\ell y_\ell$

であるとき，$[f_j(\ )]$を付し $\underset{[f_1(\ )]}{\mathcal{R}_1 y_1}, \cdots, \underset{[f_\ell(\ )]}{\mathcal{R}_\ell y_\ell}$ としてうる図式を A' とする．（f_j は A にない関数記号（スコーレム関数））．

② A'内の各 $\underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}$ に対し「$\underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}$ を scope に含むような $\underset{(X_i)}{\alpha_i x_i}$ の全体が $A' = \cdots \underset{(X_{i_1})}{\alpha_{i_1} x_{i_1}}(\cdots \underset{(X_{i_k})}{\alpha_{i_k} x_{i_k}}(\cdots \underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}(\cdots)\cdots)\cdots)\cdots$ と indicate されるならば 表示変数の列 $X_{i_1},\cdots,X_{i_k}$ を f_j の argument に埋めて $\underset{[f_j(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})]}{\mathcal{R}_j y_j}$ とする」これをすべての $j=1,\cdots,\ell$ について行って得られる図式を $\tilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$ と書き，Aの付随式という．

$\alpha_1 x_1$ (negative $\forall$) $\alpha_2 x_2$ (positive $\exists$)

EXAMPLE: $A = \forall y_1(\neg\forall x_1((\exists y_2\, p(x_1,y_2)) \vee p(x_1,y_1)) \vee \exists x_2\, p(y_1,x_2))$

について，$\mathcal{R}_1 y_1$ (positive $\forall$) $\mathcal{R}_2 y_2$ (negative $\exists$)

$$A' = \underset{[f_1(\ )]}{\forall y_1}(\neg \underset{(X_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(\ )]}{\exists y_2}\, p(x_1,y_2)) \vee p(x_1,y_1)) \vee \underset{(X_2)}{\exists x_2}\, p(y_1,x_2))$$

従って $\tilde{A}\langle X_1,X_2\rangle = \underset{[f_1]}{\forall y_1}(\neg \underset{(X_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(X_1)]}{\exists y_2}\, p(x_1,y_2)) \vee p(x_1,y_1)) \vee \underset{(X_2)}{\exists x_2}\, p(y_1,x_2))$

以下論理式Aを任意に1つ固定し関連する定義を述べる．

1° (def.) A-formula（論理式Aの証明図作成の途上現われるpseudo-formula）$H(\tilde{A})$を$\tilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$の関数記号と定数記号（なければ1つ追加）から得られるtermの全体とする．

(0) $\tau_i \in H(\tilde{A})$ のとき $\tilde{A}\langle \tau_1,\cdots,\tau_n\rangle$ は A-formula (1) $B * C$ が A-formula のとき，B と C も A-formula（但し$*$は$\vee,\wedge,\supset$,を表わす）．(2) $\neg B$ が A-formula のとき，B も A-formula．(3) $\underset{(\tau)}{\alpha x}\, B(x)$ が A-formula のとき $B(\tau)$ も A-formula．(4) $\underset{[F]}{\mathcal{R} y}\, C(y)$ が A-formula のとき，$C(F)$ も A-formula.

2° (def) sb-operation: B が $\tilde{A}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ または A-formula のとき, $sb(B) \overset{def.}{=}$ B内の $\left\{\begin{array}{l} \underset{(\tau_i)}{\alpha_i} x_i(\cdots x_i \cdots) \text{ を代入 } (\cdots x_i \cdots)\binom{x_i}{\tau_i} \\ \mathscr{R}_j \underset{[F_j]}{y_j}(\cdots y_j \cdots) \text{ を代入 } (\cdots y_j \cdots)\binom{y_j}{F_j} \end{array}\right\}$ とみなしてうる quantifire free の論理式.

(EXAMPLE: $sb(\neg\exists \underset{[f_2(f_1)]}{y_2}\ p(f_1,y_2)) = \neg p(f_1, f_2(f_1))$, 前例で, $sb(\tilde{A}\langle x_1,x_2\rangle) = \neg(p(x_1,f_2(x_1))\vee p(x_1,f_1))\vee p(f_1,x_2)$)

3° (def) cl-operation: $cl(B)$ = B 内の $\alpha_i \underset{(\tau_i)}{x_i}$ を $\alpha_i x_i$ に, $\mathscr{R}_j \underset{[F_j]}{y_j}$ を $\mathscr{R}_j y_j$ に戻してうる LK-formula.

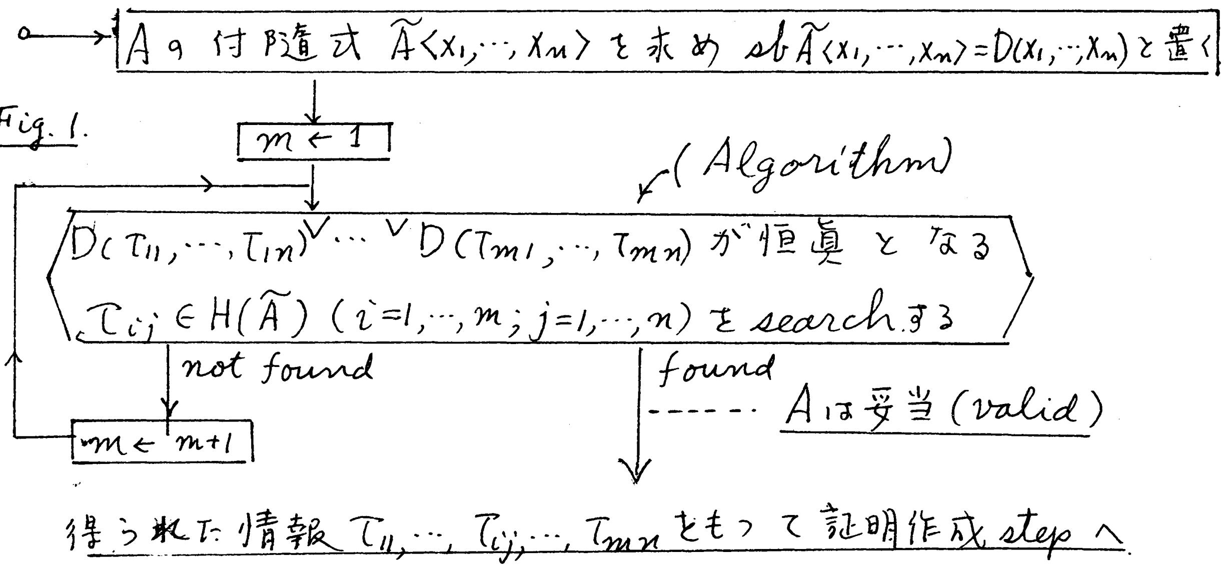
(EXAMPLE: 前例につき $cl(\tilde{A}\langle x_1,x_2\rangle)=A$, $cl(\neg\exists \underset{[f_2(f_1)]}{y_2}\ p(f_1,y_2)) = \neg\exists y_2\, p(f_1,y_2)$, また $cl(\tilde{A}\langle f_1, f_2(f_1)\rangle)=A$.)

Herbrand の定理 は次の形で表現される:

$\underset{LK}{\vdash} A \rightleftarrows \exists_{m\geq 1}\ \exists\ \tau_{ij}\in H(\tilde{A})$:

$sb\tilde{A}\langle\tau_{11},\cdots,\tau_{1n}\rangle\vee\cdots\vee sb\tilde{A}\langle\tau_{m1},\cdots,\tau_{mn}\rangle$ が恒真

(I) 妥当性検証step (CHK procedure) (P. 9. 例参照)



得られた情報 $\tau_{11},\cdots,\tau_{ij},\cdots,\tau_{mn}$ をもって証明作成step へ

(II) LK-proof作成step（アルゴリズムPAL）

《phase 1》pseudo-proofの作成：　前stepの肯定時に得られるτ_{ij}から，end sequent $\mathfrak{S}_0 = \to \tilde{A}\langle T_{11}, \cdots, T_{1n}\rangle, \cdots, \tilde{A}\langle T_{m1}, \cdots, T_{mn}\rangle$をつくり，これにUS-operation（上式決定操作）を逐次ほどこしてうるsequentを上方へ積み上げtree型のpseudo-proof $\mathcal{P}_1 = \mathbb{US}[\to \tilde{A}\langle T_{11}, \cdots, T_{1n}\rangle, \cdots; \tilde{A}\langle T_{m1}, \cdots, T_{mn}\rangle]$を作る。US-operationは下式$\Gamma \to \Delta$に対し2つ以下の上式

$$US(\Gamma \to \Delta) = \left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 \to \Delta_1 \\ \text{or} \\ \Gamma_1 \to \Delta_1 ; \Gamma_2 \to \Delta_2 \\ \text{or} \\ \text{undefined} \end{array}\right\}$$

を決定する操作で，詳細はP. 6～に記載されるが，各段階で下式$\Gamma \to \Delta$内のguide-index (τ)'s, $[\overline{n}]$'sを調べることにより，どのformulaをどのように分解し上式を作るかが一意に決定される。

《phase 2》Index clear step：　phase 1で求めたpseudo-proof $\mathcal{P}_1$内の不要となったguide-indexを$\mathcal{d}$-operationで消去すれば，$\to \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$に到るLK*-proof：$\mathcal{P}_2 = \mathcal{d}(\mathcal{P}_1) = \mathcal{d}(\mathbb{US}[\to \tilde{A}\langle T_{11}, \cdots, T_{1n}\rangle, \cdots; \tilde{A}\langle T_{m1}, \cdots, T_{mn}\rangle]$をうる。但しLK*ではLKの$\forall$right, $\exists$leftにおけるeigen-variableの代りにSkolem term $f_j(T_1, \cdots, T_k)$が用いられている点がLKと異なる。

《phase 3》eigen variable adjustment（α-operation）

phase 2で得た$\to \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$に到るLK*-proof $\mathcal{P}_2$内の各formula内のmaximal Skolem term $f_j(T_1, \cdots, T_k)$を自由変数$\alpha_{f_j(T_1, \cdots, T_k)}$でおきかえる操作により，$\to \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$に到るLK－

proof $\mathcal{P} = \alpha(\mathcal{P}_2) = \alpha(d(\mathbb{US}[\to \tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle]$ を得る. 従って contruction により $\to A$ に到る(cut-free な) LK-proof をうる. (但し, ある formula B 内の Skolem term $f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)$ は $f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)$ を真に含む他の $f_d(\sigma_1,\cdots,\sigma_p)$ term が B 内にないとき, B で maximal であるという.)

上記証明図作成手続の妥当性は次の定理の形で述べられる.

【Theorem】 仮定 "$sb\,\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle \vee\cdots\vee sb\,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle$ が恒真" の下で, $\mathcal{P} = \alpha(d(\mathbb{US}[\to \tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle]))$ は $\to \underbrace{A,\cdots,A}_{m}$ に到る LK-proof である.

(証明) の概要: $\mathfrak{S}_0 = \to \tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle$ に対し US-operation を逐次適用して pseudo-proof $\mathcal{P}_1$ を作るとき各段階で得られる sequent $\Gamma\to\Delta$ につき, $\Gamma\to\Delta$ に論理記号が残っているかぎり必らず上式 $US(\Gamma\to\Delta)$ が定義され,

① 各上式 $\Gamma_1\to\Delta_1$ (or $\Gamma_2\to\Delta_2$) の記号は下式 $\Gamma\to\Delta$ より減小.

② $\dfrac{\alpha\, d(US(\Gamma\to\Delta))}{\alpha\, d\,(\Gamma\to\Delta)}$ は LK-deduction となる.

③ $\dfrac{sb(US(\Gamma\to\Delta))}{sb\,(\Gamma\to\Delta)}$ は quantifier-free な LK deduction で下式から上式へ向って恒真性が保存される. (但し, sequent $B_1,\cdots,B_m\to C_1,\cdots,C_n$ が恒真であるとは $\neg B_1 \vee\cdots\vee \neg B_m \vee C_1 \vee\cdots\vee C_n$ が恒真であることとする.). しからば ①より, $\mathcal{P}_1 = \mathbb{US}[\mathfrak{S}_0]$ の最上部の sequent は原始論理式の列 $P_1,\cdots,P_p\to Q_1,\cdots,Q_q$ なる形であり, しかも仮定と

③より，$P_i = Q_j$ (for some i,j) となる（何故ならば，$sb(\mathcal{P}_1)$ の最下式 $\to sb\tilde{A}\langle \tau_{11},\cdots,\tau_{1n}\rangle,\cdots,sb\tilde{A}\langle\tau_{m1},\cdots,\tau_{mn}\rangle$ は仮定より恒真であり，③に従えば 最上部の式 $sb(P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q)$ 即ち $P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q$ も恒真となる．即ち $\neg P_1 \vee\cdots\vee \neg P_m \vee Q_1 \vee\cdots\vee Q_n$ が恒真故，直ちに $P_i = Q_j$ (for some i,j) を導びく．従って(i) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ の最上式である所の $\alpha d(P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q)$ 即ち $P_1,\cdots,P_m \to Q_1,\cdots,Q_n$ は公理 $P_i \to P_i$ $(P_i = Q_j)$ から導びかれ，(ii) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ の各段階 $\dfrac{\alpha d(US(\Gamma\to\Delta))}{\alpha d(\Gamma\to\Delta)}$ は②より LK-deduction であり，(iii) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ は最下式 $\to A,\cdots,A$ に到る．従って $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ は目的の LK-proof を導くことがわかる．

<u>US-operation</u> を定義するに当って <u>term, sequent の degree</u> を定義する：f_j を Skolem 関数 g を A に始めからある関数記号とするとき．

(i) $deg(f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = \omega\cdot lg(f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)) + j$,

(ii) $deg(g(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = \omega\cdot lg(g(\tau_1,\cdots,\tau_k))$ とする．但し

$lg(h(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = lg(\tau_1)+\cdots+lg(\tau_k)+1$, $lg(c)=1$ とする．

また $deg(\Gamma\to\Delta)\begin{cases} = min\{deg(F) \mid \mathcal{R}_{y[F]} \text{ in } \Gamma\to\Delta\} ;(\Gamma\to\Delta \text{ が少くとも１つの } \mathcal{R}_{y[F]} \text{ form をもつとき}) \\ = 0 \ (\text{その他}) \end{cases}$

[<u>US-operation の定義</u>]

Case 0. Γ または Δ が同じ formula をもつとき：

0.1. $\underline{US(\Gamma \to \Delta)} \overset{\text{def}}{=} \underline{\Gamma_0, D, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_k \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_0, D, \Gamma_1, D, \cdots, D, \Gamma_k \to \Delta$ $(k \geqq 2,\ D \notin \Gamma_i)$

0.2 $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_0, D, \Delta_1, \cdots, \Delta_l}$.

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_0, D, \Delta_1, D, \cdots, D, \Delta_l$ (Γに同じformulaなく, $l \geqq 2,\ D \notin \Delta_i$)

<u>Case 1.</u> <u>Case 0でなく, Γ, Δが $B \vee C$, $B \wedge C$, $B \supset C$, $\neg B$ のいずれかをもつとき</u>, その最も左のものをDとする

1.l.1. $\Gamma \ni D = B \vee C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{\Gamma_1, B, \Gamma_2 \to \Delta\ ;\ \Gamma_1, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \vee C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.2. $\Gamma \ni D = B \wedge C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{\Gamma_1, B, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \wedge C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.3. $\Gamma \ni D = B \supset C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{\Gamma_1, \Gamma_2 \to B, \Delta\ ;\ \Gamma_1, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \supset C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.4. $\Gamma \ni D = \neg B$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{\Gamma_1, \Gamma_2 \to B, \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, \neg B, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.r.1 $\Delta \ni D = B \vee C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_1, B, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \vee C, \Delta_2$.

1.r.2. $\Delta \ni D = B \wedge C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_1, B, \Delta_2\ ;\ \Gamma \to \Delta_1, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \wedge C, \Delta_2$.

1.r.3. $\Delta \ni D = B \supset C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{B, \Gamma \to \Delta_1, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \supset C, \Delta_2$.

1.r.4. $\Delta \ni D = \neg B$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{\text{def}}{=} \underline{B, \Gamma \to \Delta_1, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, \neg B, \Delta_2$.

<u>Case 2:</u> <u>Case 0, Case 1 でないとき</u>. 即ち Γ が同じ formula をもたず Δ も同じ formula をもたず. Γ, Δ が $B \vee C$, $B \wedge C$, $B \supset C$, $\neg B$ なる型の formula をもたないとき.

2.1. $\deg(\Gamma \to \Delta) > 0$: (このとき $\Gamma \to \Delta$ は $\mathcal{Q}y_{[F]}$ form をもつ).

2.1.1. $\Gamma \to \Delta$ が $\deg(\tau) < \deg(\Gamma \to \Delta)$ なる $\mathcal{Q}x_{(\tau)} B(x)$ をもつとき:

D をかゝる $\mathcal{Q}x_{(\tau)} B(x)$ の最も左のものとする.

2.1.1.l. $\Gamma \ni D = \forall x_{(\tau)} B(x)$ ⊛1 のとき: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \dfrac{\Gamma_1, B(\tau), \Gamma_2 \to \Delta}{}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, \forall x_{(\tau)} B(x), \Gamma_2 \to \Delta$.

2.1.1.r. $\Delta \ni D = \exists x_{(\tau)} B(x)$ のとき: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \dfrac{\Gamma \to \Delta_1, B(\tau), \Delta_2}{}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, \exists x_{(\tau)} B(x), \Delta_2$

2.1.2. $\Gamma \to \Delta$ が $\deg(\tau) < \deg(\Gamma \to \Delta)$ なる $\mathcal{Q}x_{(\tau)} B(x)$ をもたないとき:

このとき, $\deg(\Gamma \to \Delta) = \deg(F)$ なる $\mathcal{Q}y_{[F]}$ form は $\Gamma \to \Delta$ 内のある1つの formula に $\mathcal{Q}y_{[F]} B(y)$ と(冠頭に)現われる. これらのうち最も左のものを $D = \mathcal{Q}y_{[F]} B_1(y)$ とする.

2.1.2.l. $\Gamma \ni D = \exists y_{[F]} B_1(y)$ のとき: Γ 内の $\exists y_{[F]} B_i(y)$ を列挙し.

$US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \dfrac{\Gamma_0, B_1(F), \Gamma_1, B_2(F), \cdots, B_k(F), \Gamma_k \to \Delta}{}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_0, \exists y_{[F]} B_1(y), \Gamma_1, \exists y_{[F]} B_2(y), \cdots, \exists y_{[F]} B_k(y), \Gamma_k \to \Delta$.

(⊛2 このとき $d(B_1(F)) = \cdots = d(B_k(F))$ が示される.)

2.1.2.r. $\Delta \ni D = \forall y_{[F]} B_1(y)$ のとき: Δ 内の $\forall y_{[F]} B_i(y)$ を列挙し.

$US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \dfrac{\Gamma \to \Delta_0, B_1(F), \Delta_1, B_2(F), \cdots, B_k(F), \Delta_k}{}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_0, \forall y_{[F]} B_1(y), \Delta_1, \forall y_{[F]} B_2(y), \cdots, \forall y_{[F]} B_k(y), \Delta_k$.

2.2. $\deg(\Gamma \to \Delta) = 0$ のとき：($\Gamma \to \Delta$ は $\mathcal{R}\underset{[F]}{y}$ form をもたない.)

2.2.1. $\Gamma \to \Delta$ が $\mathcal{Q}\underset{(\tau)}{x} B(x)$ をもつとき：最も左のものをDとする.

2.2.1.l. $\Gamma \ni D = \forall \underset{(\tau)}{x} B(x)$ のとき： 2.1.1.l と同様に定義する.

2.2.1.r. $\Delta \ni D = \exists \underset{(\tau)}{x} B(x)$ のとき： 2.1.1.r と同様に定義する.

2.1.2. $\Gamma \to \Delta$ が $\mathcal{Q}\underset{(\tau)}{x} B(x)$ form をもたないとき：(このとき $\Gamma \to \Delta$ は原始論理式のみとなる) $US(\Gamma \to \Delta)$ は定義しない.

[註]※1. $\mathfrak{S}_0 = \to \tilde{A}\langle \tau_{11}, \cdots, \tau_{1n}\rangle, \cdots, \tilde{A}\langle \tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn}\rangle$ に US-operation を適用するとき 2.1.1.l. $\Gamma \ni D = \mathcal{Q}x_{(\tau)} B(x)$ の case で $D = \exists x_{(\tau)} B(x)$ とは決してならない. 2.1.1.r. 2.1.2.l. 2.1.2.r も記述した case のみ起る.

[註]※2.

$$
\begin{array}{ll}
 & cl(US(\Gamma \to \Delta)) = cl\,\Gamma_0, cl\,B_1(F), cl\,\Gamma_1, cl\,B_2(F), \cdots, cl\,B_k(F), cl\,\Gamma_k \to cl\,\Delta \\
\text{contractions, Exchanges} & \overline{\overline{\quad cl\,B_1(F), cl\,\Gamma_0, \cdots, cl\,\Gamma_k \to cl\,\Delta \quad}} \\
 & \overline{\quad \exists y\, cl\,B_1(y), cl\,\Gamma_0, \cdots, cl\,\Gamma_k \to cl\,\Delta \quad} \ \exists^{*}\text{left. } (LK^{*}) \\
\text{weakenings, Exchanges} & \overline{\overline{\quad cl\,\Gamma_0, cl\,\exists \underset{[F]}{y} B_1(y), cl\,\Gamma_1, cl\,\exists \underset{[F]}{y} B_2(y), \cdots, cl\,\exists \underset{[F]}{y} B_k(y), cl\,\Gamma_k \to cl\,\Delta \quad}} \\
 & cl(\Gamma \to \Delta)''
\end{array}
$$

と adjust される. see→ A Method for Obtaining Proof Figures of Valid Formulas in the First Order Predicate Calculus Comm. Math. Univ. St. Pauli by T. Oshiba. P.49-61. Vol.30. No.1. 1981

<u>EXAMPLE</u> $A = \forall y_1(\neg \forall x_1((\exists y_2 P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, y_1)) \vee \exists x_2 P(y_1, x_2))$

(0) A の付随式 $\tilde{A}\langle X_1, X_2\rangle = \forall \underset{[f_1]}{y_1} (\neg \forall \underset{(X_1)}{x_1}((\exists \underset{[f_2(X_1)]}{y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, y_1)) \vee \exists \underset{(X_2)}{x_2} P(y_1, x_2))$

を作り, $sb\,\tilde{A}\langle X_1, X_2\rangle = \neg(P(X_1, f_2(X_1)) \vee P(X_1, f_1)) \vee P(f_1, X_2)$ を $D(X_1, X_2)$ とおく.

(I) $D(\tau_{11}, \tau_{12}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \tau_{m2})$ が恒真となる $m \geq 1$ と $\tau_{ij} \in H(\tilde{A})$ を探す.

肯定的に "$m=2$, $D(f_1, f_2(f_1)) \vee D(f_1, f_1)$ が恒真" とみつかる.

(実際 $(\neg(P(f_1, f_2(f_1)) \vee P(f_1, f_1)) \vee P(f_1, f_2(f_1))) \vee (\neg(P(f_1, f_2(f_1)) \vee P(f_1, f_1)) \vee P(f_1, f_1))$

は $\neg(P_0 \vee P_1) \vee P_0) \vee (\neg(P_0 \vee P_1) \vee P_1)$ 故恒真)

(II) そこで $\mathfrak{S}_0 = \to \tilde{A}\langle f_1, f_2(f_1)\rangle, \tilde{A}\langle f_1, f_1\rangle$ を最下式とし

((phase 1)) $\mathfrak{S}_0$ に US-operation を適用し, pseudo-proof $\mathcal{P}_1 = \mathbb{US}[\mathfrak{S}_0]$ を作る.

pseudo-proof $\mathcal{P}_1 = \mathcal{WS}[\mathfrak{S}_0]$ Fig. 2

rul No. ↓

draw upwards ↑

$$P(f_1, f_2(f_1)) \to P(f_1, f_2(f_1))$$
--- weakening
$$P(f_1,f_2(f_1)) \to P(f_1,f_2(f_1)),\ P(f_1,f_1)$$
2.2.1.r ——— $\exists$r.
$$P(f_1,f_2(f_1)) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ P(f_1,f_1)$$
2.1.2.l ——— $\exists^*$l.
$$\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1,y_2) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ P(f_1,f_1)$$
2.1.1.r ——— $\exists$r.
$$\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1,y_2) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$

$$P(f_1,f_1) \to P(f_1,f_1)$$
--- weakening
$$P(f_1,f_1) \to P(f_1,f_2(f_1)),\ P(f_1,f_1)$$
2.2.1.r ——— $\exists$r
$$P(f_1,f_1) \to P(f_1,f_2(f_1)),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$
2.2.1.r ——— $\exists$r.
$$P(f_1,f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$

1.l.1. ——— $\vee$l.
$$(\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1,y_2)) \vee P(f_1,f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$
2.1.1.l ——— $\forall$l.
$$\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$
0.1 ——— weakening l.
$$\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)),\ \underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$
1.r.4. ——— $\neg$r
$$\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \neg\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$
1.r.1 ——— $\vee$r.
$$\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \neg\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$
1.r.4. ——— $\neg$r.
$$\to \neg\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)),\ \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \neg\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$
1.r.1 ——— $\vee$r.
$$\to \neg\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)) \vee \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1,x_2),\ \neg\underset{(f_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1,x_2)$$
(※) 2.1.2.r ——— $\forall^*$r
$$\mathfrak{S}_0 = \to \underbrace{\underset{[f_1]}{\forall y_1}\{\neg \underset{(\frac{f_1}{x_1})}{\forall x_1}((\underset{[\frac{f_2(f_1)}{x_1}]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,y_1)) \vee \underset{(\frac{f_2(f_1)}{x_2})}{\exists x_2} P(y_1,x_2)}_{\widetilde{A}\langle \frac{f_1}{x_1},\ \frac{f_2(f_1)}{x_2}\rangle},\ \underbrace{\underset{[f_1]}{\forall y_1}\{\neg \underset{(\frac{f_1}{x_1})}{\forall x_1}((\underset{[\frac{f_2(f_1)}{x_1}]}{\exists y_2} P(x_1,y_2)) \vee P(x_1,y_1)) \vee \underset{(\frac{f_1}{x_2})}{\exists x_2} P(y_1,x_2)\}}_{\widetilde{A}\langle \frac{f_1}{x_1},\ \frac{f_1}{x_2}\rangle}$$

((phase 2)) cl-op. により ( )'s, [F]'s を除き
((phase 3)) α-op. により max. Skolem term
f_1, $f_2(f_1)$ を α_{f_1}, $\alpha_{f_2(f_1)}$ におきかえれば
$\to \underbrace{A, A}_{m=2}$ に到る cut-free LK proof を得る.

但し(※)は
$$\frac{\to cl(B_1(f_1)),\ cl(B_2(f_1))}{\to cl(B_1(f_1))}\ \text{contraction}\quad (\because)\ cl(B_1(f_1)) = cl(B_2(f_1))$$
$$\frac{\to cl(B_1(f_1))}{\to \forall y_1 cl(B_1(y_1))}\ \forall\text{right}$$
$$\frac{\to \forall y_1 cl(B_1(y_1))}{\to \forall y_1 cl(B_1(y_1)),\ \forall y_1 cl(B_2(y_1))}\ \text{weakening}$$
を挿入する. (rule 2.1.2 の註参照)