数理解析研究所講究録
458巻 1982年 1-10

Listing subtrees of a binary tree

東京都立大学　足田輝雄

1. はじめに

ここでは, rooted ordered binary trees とその subtrees を対象とする. subtree としては, もとの tree と root を共有するもののみを考える. k個の頂点からなる tree や subtree を単に k-tree, k-subtree と書く.

目標は, 1つの tree と k の値とを与えられて, その tree の k-subtrees をすべてリストアップするアルゴリズムを与えることである.

k-trees をすべて生成するアルゴリズムはいろいろ与えられている [1, 3, 4, 6, 7, 8, 9]. 1つの tree を与えられて, 頂点の数は無視して, すべての subtrees を生成するアルゴリズムは Ruskey [5] にある.

我々の方針は単純で, 次の3点に要約できる.

1) k-trees を順にすべて生成して, 与えられた tree の中にそれらが埋め込むことができるかどうかテストし, で

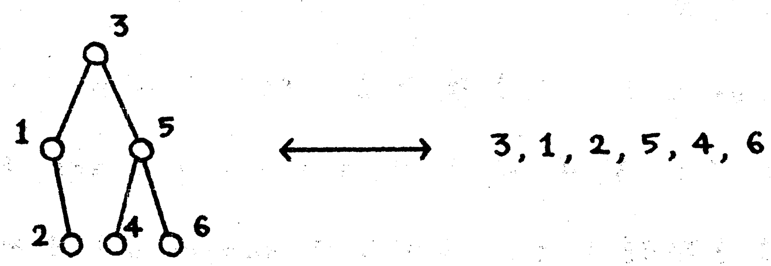
きるものをリストアップする.

2) その際, 1つの k-tree を完全に作り出してから埋め込みをテストするのではなく, 作成と埋め込みのテストとを並行的に行なう. つまり, 埋め込めない時はそのことができるだけ早くわかるようにする.

3) tree の表現方法として tree sequence と称するものを用いる. これにより, k-tree は, 1, 2, …, k を置換した長さ k の列として表現される.

2. tree sequences の生成

tree sequence とは, k-tree の頂点に 1, 2, …, k をこの順に inorder でラベル付けして, それらを今度は preorder で読んで並べたものである.



tree sequences の性質はよくわかっている. 次のような性質が成り立つ.

<u>Property</u> 1.　tree sequence とは，1つのスタックを用いて，列 1, 2, …, k に変換できるような列である．

<u>Property</u> 2.　$a_1, a_2, \cdots, a_k$ が tree sequence

$\Longleftrightarrow$　$i < j < m$,　$a_m < a_i < a_j$　となるような i, j, m は存在しない．

<u>Property</u> 3.　tree sequences 全体と，ordered binary trees 全体とは1対1に対応する．

Remark.　Knuth [2] の，2.2.1 節 Exercise 2（P238）や，2.3.1 節 Ex. 6（P329）の"stack による sequence"は，我々の tree sequence の逆置換にあたる．性質は，従って，ほとんど同様である．

tree sequences（や上の stack sequences）の生成法はすでにいくつかある．我々の Algorithm 1. は単純なもので，基本的には backtracking である．列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ を左から順に決めていくが，1つ要素を決めると，その left son と right son それぞれの，位置と，とる値の範囲とが決まるので，範囲の下限と上限とを p と q とに記録して，先へ進む．

Algorithm 1. Tree permutation generation.

Generate all tree permutations of length k lexicographically in an array a. Auxiliary arrays p and q of length k are used, where p[i] and q[i] together designate the range of values a[i] can currently take.

```
1. (Initialize.)
      i ← 0;
      p[1] ← 1;  q[1] ← k;
2. (Loop.  Proceed one position forward.)
      i ← i + 1;
      a[i] ← p[i];
3. (If reached to the right end, output the current content of a, go back to the
   position where another candidate still exists, and set this candidate to a.)
      if i = k then
            output(a);
            repeat  i ← i - 1;  if i = 0 then stop; endif;  until a[i] < q[i];
            a[i] ← a[i] + 1;
      endif;
4. (Set p and q for the left son of a[i], if it exists.)
      if p[i] < a[i] then
            p[i+1] ← p[i];  q[i+1] ← a[i] - 1;
      endif;
5. (Set p and q for the right son of a[i], if it exists.)
      if a[i] < q[i] then
            p[i+a[i]-p[i]+1] ← a[i] + 1;  q[i+a[i]-p[i]+1] ← q[i];
      endif;
6. (Repeat loop.)
      goto 2.;
```

この方法においても，tree sequences を全部，すなわち $\binom{2k}{k}/(k+1)$ 個生成するとき，1個あたりの平均実行時間は定数で押えられる．証明は略する．

3. k-subtrees のリストアップ

第1節に述べた方針 1)，2)，3) に沿ったアルゴリズムが Algorithm 2. である．説明すべき点はあまりないが，次のことを注意しておく．

イ) 1つの tree sequence において，ある要素の left son は（もしあれば）その直後にある．

ロ) しかし right son はふつう離れた所にある．

ハ) そこで Algorithm 2. では，

i) 与えられた tree b の中での，各頂点の right son の位置，

ii) 生成する k-tree a の中での，(right) son の father の位置，

これらの情報を，a が b に埋め込めることができるかどうかテストしていく際に必要とする．i)，ii) 以外の情報は不要である．なお，i) は，b からのプリプロセスにより，あらかじめ用意されているものとする．

Algorithm 2. Listing all subtrees on k nodes of a binary tree.

This lists all subtrees on k nodes of a given rooted ordered binary tree on n nodes. Subtrees are assumed to share the root with the given tree.

Input: The value k, and arrays b and r of length n.

The tree should be given as a tree permutation in b, and also an array r should be given, where r[j] is the index in b of the right son of b[j] if it exists and 0 otherwise. Subtrees are generated in lexicographical order in an array a of length k as tree permutations.

Auxiliary arrays f, p and q of length k are used, where f[i] is the index in a of the father node of a[i] (used only when a[i] is the right son), and p and q are as in Algorithm 1. An array m of length k is also used, where m[i] indicates the index in b at which a[i] currently matches.

```
1. (Initialize.)
      i ← 0;
      p[1] ← 1;  q[1] ← k;
2. (Loop.  Proceed one position forward.)
      i ← i + 1;
      a[i] ← p[i];
3. (Examine whether a[i] matches to some node in b, and return the result in a
    Boolean variable match and m[i].)
      if i = 1 then                       (Case 1.  a[i] is the root.)
             match ← true;  m[1] ← 1;
      elseif a[i-1] > a[i] then           (Case 2.  a[i] is the left son of a[i-1].)
             if m[i-1] = n then match ← false;
             elseif b[m[i-1]] < b[m[i-1]+1] then match ← false;
             else match ← true;  m[i] ← m[i-1] + 1;
             endif;
      else                                (Case 3.  a[i] is the right son of a[f[i]].)
             if r[m[f[i]]] = 0 then match ← false;
             else match ← true;  m[i] ← r[m[f[i]]];
             endif;
      endif;
```

```
4. (If no node in b matches to a[i], find another candidate.)
      if not match then
           repeat  i ← i - 1;  if i = 0 then stop; endif;  until a[i] < q[i];
           a[i] ← a[i] + 1;
           goto 3.;
      endif;
5. (If reached to the right end, output a, and find another candidate.)
      if i = k then
           output(a);
           repeat  i ← i - 1;  if i = 0 then stop; endif;  until a[i] < q[i];
           a[i] ← a[i] + 1;
      endif;
6. (Set p and q for the left son of a[i], if it exists.)
      if p[i] < a[i] then
           p[i+1] ← p[i];  q[i+1] ← a[i] - 1;
      endif;
7. (Set f, p and q for the right son of a[i], if it exists.)
      if a[i] < q[i] then
           f[i+a[i]-p[i]+1] ← i;
           p[i+a[i]-p[i]+1] ← a[i] + 1;  q[i+a[i]-p[i]+1] ← q[i];
      endif;
8. (Repeat loop.)
      goto 2.;
```

4. 高さ h の k-trees の個数

Algorithm 2. の応用として，高さ h の complete binary tree（頂点数 $n = 2^{h+1} - 1$）の k-subtrees の個数を調べることにより，高さが h 以下の k-trees の個数がわかる．これから，高さがちょうど h の k-trees の個数がわかる．結果は Table 1. の通りである．

k \ h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	total
1	1													1
2	0	2												2
3	0	1	4											5
4	0	0	6	8										14
5	0	0	6	20	16									42
6	0	0	4	40	56	32								132
7	0	0	1	68	152	144	64							429
8	0	0	0	94	376	480	352	128						1430
9	0	0	0	114	844	1440	1376	832	256					4862
10	0	0	0	116	1744	4056	4736	3712	1920	512				16796
11	0	0	0	94	3340	10856	15248	14272	9600	4352	1024			58786
12	0	0	0	60	5976	27672	47104	50784	40576	24064	9728	2048		208012
13	0	0	0	28	10040	67616	140640	172640	156864	110592	58880	21504	4096	742900

Table 1. The numbers of rooted ordered binary trees on k nodes of height h, for $1 \leq k \leq 13$.

References

/1/ G. D. Knott, A numbering system for binary trees, Comm. ACM 20 (1977) 113-115.

/2/ D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Vol. 1, Fundamental Algorithms (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968, Second ed., 1973).

/3/ A. Proskurowski, On the generation of binary trees, J. ACM 27 (1980) 1-2.

/4/ D. Rotem and Y. L. Varol, Generation of binary trees from ballot sequences, J. ACM 25 (1978) 396-404.

/5/ F. Ruskey, Listing and counting subtrees of a tree, SIAM J. Comput. 10 (1981) 141-150.

/6/ F. Ruskey and T. C. Hu, Generating binary trees lexicographically, SIAM J. Comput. 6 (1977) 745-758.

/7/ I. Semba, Generation of stack sequences in lexicographical order, J. Inform. Process., to appear.

/8/ M. Solomon and R. A. Finkel, A note on enumerating binary trees, J. ACM 27 (1980) 3-5.

/9/ A. E. Trojanowski, Ranking and listing algorithms for k-ary trees, SIAM J. Comput. 7 (1978) 492-509.