

擬微分作用素の浜田-Wagschal の問題への応用

都立大 理 小林 隆夫

複素平面 \mathbb{C}^{n+1} ($\ni x=(x_0, x')$, $x'=(x_1, \dots, x_n)$) の原点の近傍において次の Cauchy 問題を考えよう。

$$(0.1) \quad \begin{cases} a(x, D) u(x) = 0, & (D = (\partial/\partial x)) \\ D_j^\alpha u|_S = w_j(x'), & j=0, 1, 2, \dots, m-1. \end{cases}$$

ここで $a(x, D)$ は $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ の近傍 Ω で正則な関数を係数とする m 階の線型偏微分作用素で、初期面 $S: x_0=0$ は非特性的とする。Cauchy-Kovalevskaja の定理により、初期値 $w_j, j=0, \dots, m-1$, が $p \in S \cap \Omega$ で正則であれば (0.1) の解 $u(x)$ は $p \in \mathbb{C}^{n+1}$ における正則関数の芽を定める。我々の問題は、この芽が初期値の特異点の近傍でどのように振舞うかを調べることである。詳しくは初期値については次の場合を考える。

《mero》 初期値 w_j が $T: x_0 = x_1 = 0$ に極を持つ。

《rami》 初期値 w_j が $\Omega \cap \{S \setminus T\}$ で多価正則。

もちろん 《mero》 \subset 《rami》 であるが、双曲型方程式の基本解の構成においては 《mero》 の詳しい情報が有用である。

又、作用素については、

《simp》 特性根がすべて異なる。

《cons》 特性根の重複度が一定。

《inv》 特性根の重複度が変わる。そのかわり、特性根が正則かつ包合的を仮定。

の場合に分けると次のような結果が得られている。

まず、最も基本的な結果は、この問題を最初に 《mero》, 《simp》 について考察した Y. Hamada [1] のものである。彼は

(P) 初期値の特異性が T から出る特性曲面達に沿って伝播する。

さらに、解は極と対数分岐の特異性を持つことを示した。

《mero》, 《cons》 の場合は、Y. Hamada [2], L. Lempert [9] が (P)

の成立を示している。ただし、解は真性特異点と対数分岐を持つ。(解が極の特異性ですむのは、一般には「simp」の時のみ。)

「nami」については C. Wagschal [13] が最初に「simp」を考察し、最終的には、Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal [3] が {「nami」, «coms»} の場合に (P) を示した。

以上は、特性根の重複度が一定の場合であるが、重複度の変化すると状況はかなり複雑になる。

Y. Hamada and G. Nakamura [4] は {«mero», «inv», 重複度 ≤ 2 } の場合に 解を多重相関数をつか、て積分で表現しその特異性を調べている。この結果は筆者 [7] が重複度の仮定のない場合に拡張した。

D. Shil'g, J. Vaillat et C. Wagschal [10] は {«nami», «inv», 重複度 ≤ 3 } の場合に同様な解の積分表示を与えている。彼らは微分作用素の中だけで計算しているため一般の重複度に対する見通しは非常に悪い。

ここでは、{«nami», «inv»} について 擬微分作用素の計算をつか、て 重複度の仮定なしに解の [10] と同様な積分表示が与えられることを示す。

いずれにせよ «inv» の場合には、多重相関数を使、て解を積分表示するわけだが、被積分関数は 多重相関数 = 0

上に特異性を持ったため、積分後の特異性については明らかではない。この積分の特異性については筆者の[8]を参照していただきたい。

T. Ishii [5], [6] («memo»), 最近の C. Wagschal [15] («rami») は特性根の正則性を仮定するのみで、解と上と同様の積分の無限和で表現しているが、一項ごとについては[8]の結果は使えても全体の特異性については残念ながらわからぬ。こゝない。又、非包含的な場合を扱った Y. Unabe [11], [12]の結果と興味深い。

§1. 仮定と結果

さて $a(x, D)$ は以前のとうりとし、 D_0^m の係数は 1 とする。(0.1) の初期値 w_j ($j=0, 1, \dots, m-1$), T に沿って分岐するとする、つまり、連結な $0 \in \mathbb{C}^m$ の近傍 $\Omega_1 \subset S$ があり、 $p \in \Omega_1 \setminus T$ の近傍で w_j は正則であり y を始点とする $\Omega_1 \setminus T$ の中の任意の道に沿って解析接続可能とする。こゝで $y \in \Omega_1 \setminus T$ のとりかたは重用ではない。

$p(x, \xi)$ を $a(x, D)$ の特性多項式、 λ_i , $i=1, \dots, m$ を p の特性根としよう：

$$(1.1) \quad p(x, \xi) = \prod_{i=1}^m (\xi_0 - \lambda_i(x, \xi')) .$$

我々は特性根 $\lambda_i, i=1, \dots, m$, に次の二つの仮定をおく。

(H.1) $\lambda_i(x, \xi')$ は $(x; \xi') = (0; e_i)$ ($e_i = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$) の近傍で正則
(かつ ξ' に関して 1 次斉次)。

(H.2) もし点 $(0; e_i)$ において $\lambda_i = \lambda_j$ となる時は, $(0, e_i)$
の近傍において正則かつ ξ' に関して 0 次斉次な関数
 $b(x, \xi'), c(x, \xi')$ が存在して次をみたす。

$$(1.2) \quad \{ \xi_0 - \lambda_i, \xi_0 - \lambda_j \} = b \cdot (\xi_0 - \lambda_i) + c \cdot (\xi_0 - \lambda_j).$$

一つ注意しておくと, $\lambda_i \neq \lambda_j$ at $(0; e_i)$ の時に $b = -c =$
 $\{ \xi_0 - \lambda_i, \xi_0 - \lambda_j \} / (\lambda_j - \lambda_i)$ とおくことにより (1.2) が成り立って
いるとしてよい。これは, [4], [10] のように (1.2) に Poisson
bracket $\{ \cdot, \cdot \}$ が恒等的に消えることを要請すると成立しない。

多重相関数 $\varphi^{1, 2, \dots, \ell} = \varphi^{1, 2, \dots, \ell}(\sigma_{\ell-1}, x)$ ($\sigma_{\ell} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\ell}) \in \mathbb{C}^k$) を帰
納的に次の *eigenal* 方程式 解として定める:

$$(1.3) \quad \begin{cases} D_0 \varphi^1 - \lambda_1(x, D_x \varphi^1) = 0 \\ \varphi^1(0, x') = x_1 \\ \vdots \\ D_0 \varphi^{1, \dots, \ell} - \lambda_{\ell}(x, D_x \varphi^{1, \dots, \ell}) = 0 \\ \varphi^{1, \dots, \ell}(\sigma_{\ell-1}, x) \Big|_{x_0 = \tau_{\ell-1}} = \varphi^{1, \dots, \ell-1}(\sigma_{\ell-2}, x) \Big|_{x_0 = \tau_{\ell-1}} \end{cases}$$

同様にして 整数の列 $I_e = (i_1, \dots, i_e)$, $1 \leq i_k \leq m$ (上は $I_e = (1, 2, \dots, e)$ の場合) についても多重相関数 $\varphi^{I_e}(\sigma_{e-1}, x)$ を定める。これらは (H.1) により各変数の原点の近傍で正則である。

もう一つの記号を使う。 $D_\omega = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \omega\}$ ($\omega > 0$)
 $\dot{D}_\omega = D_\omega \setminus \{0\}$, $R_\omega = \dot{D}_\omega$ の普遍被覆空間。(一般に $R(X)$ は X の普遍被覆空間を表わすことにする。) 我々の主要結果は次のとおりである。

定理 1. (H.1), (H.2) を仮定する。この時、連結かつ単連結な $0 \in \mathbb{C}^n$ の近傍 $\Omega' \subset S$, 定数 $\omega, \eta > 0$, 正則関数 $W(t; x) \in \mathcal{O}(R_\omega \times D_\eta \times \Omega')$, $\tilde{u}(t; \sigma_{m-1}, x) \in \mathcal{O}(R_\omega \times D_\eta^m \times \Omega')$ が存在して次をみたす。($D_\eta^k = D_\eta \times \dots \times D_\eta \subset \mathbb{C}^k$)

(i) $\varphi^1(D_\eta \times \Omega') \subset D_\omega$, $\varphi^{1 \dots m}(D_\eta^m \times \Omega') \subset D_\omega$

(ii) $\forall p \in \Omega' \setminus T$ に対し, p の近傍で正則な (0.1) の解 $u(x)$ は次のように表わされる。

$$(1.4) \quad u(x) = W(\varphi^1(x); x) + \int_0^{\lambda_0} dt_{m-1} \int_0^{t_{m-1}} dt_{m-2} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m}(\sigma_{m-1}, x); \sigma_{m-1}, x)$$

定理 1 では特性根をすべて一緒に扱っているが, (0.e1) において異なる特性根は別々に扱うこともできる。つまり

特性根の番号をつけかえて次のようになつておくとしよう。

$$(i) \quad p(x, \xi) = \prod_{\kappa \in K} \prod_{i=1}^{d_{\kappa}} (\xi_0 - \lambda_i^{\kappa}(x, \xi'))$$

$$(ii) \quad \text{各 } \kappa \in K \text{ には } \lambda_1^{\kappa}(0, e_1) = \dots = \lambda_{d_{\kappa}}^{\kappa}(0, e_1)$$

$$(iii) \quad \alpha_{\kappa} \equiv \lambda_1^{\kappa}(0, e_1) \text{ とすると } \alpha_{\kappa} \neq \alpha_{\kappa'} \quad \kappa \neq \kappa'$$

$\lambda_1^{\kappa}, \dots, \lambda_{d_{\kappa}}^{\kappa}$ によつて (1.3) と同様にして定まる多重相関数を $\varphi_{\kappa}^{I_{\ell}} = \varphi_{\kappa}^{I_{\ell}}(\sigma_{\ell-1}, x)$ と書くことにする。以上の記号を用ひると、定理 1 と部分積分により次の定理を得る。

定理 2. (H.1), (H.2) を仮定すると、連結かつ単連結な $0 \in \mathbb{C}^n$ の近傍 $\Omega' \subset S$, 定数 $\omega, \eta > 0$, 正則関数 $u_{\kappa}^{I_{\ell}}(t; \sigma_{\ell-1}, x) \in \mathcal{O}(D_{\omega} \times D_{\eta}^{\ell} \times \Omega')$, $\kappa \in K$, $I_{\ell} \in J(d_{\kappa})$, が存在して次をみたす。

$$(i) \quad \varphi_{\kappa}^{I_{\ell}}(D_{\eta}^{\ell} \times \Omega') \subset D_{\omega}, \quad \kappa \in K, \quad I_{\ell} \in J(d_{\kappa})$$

(ii) $\forall p \in \Omega' \setminus T$ に対して、 p の近傍で正則な (0.1) の解 $u(x)$ は次のように表わされる。

$$(1.5) \quad u(x) = \sum_{\kappa \in K} \sum_{I_{\ell} \in J(d_{\kappa})} \int_0^{t_0} dt_{\ell-1} \int_0^{t_{\ell-1}} dt_{\ell-2} \dots \int_0^{t_2} dt_1 u_{\kappa}^{I_{\ell}}(\varphi_{\kappa}^{I_{\ell}}; \sigma_{\ell-1}, x)$$

ただし $J(d) = \bigcup_{\ell=1}^d \{ I_{\ell} = (i_1, \dots, i_{\ell}) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{\ell} \leq d \}$ である。

定理 1, 2 により解 $u(x)$ の特異性は (1.4) 又は (1.5) の積分の特異性を調べればよい。(1.4) (又は (1.5)) の被積分関数は明らかに $D^m \times \Omega' \setminus \{\varphi^{1 \dots m}(\sigma_{m-1}, x) = 0\}$ ($D_0^e \times \Omega' \setminus \{\varphi_k^{I_e}(\sigma_{e-1}, x) = 0\}$) で多価解析的。つまり $\varphi^{1 \dots m} = 0$ ($\varphi_k^{I_e} = 0$) に沿って分岐するので積分の特異性はさほど明らかではない。この問題については [8] を参照していただきたい。[8] では (1.4), (1.5) の解析接続の問題を, チェインの連結変形の問題に帰着させて考察している。

§2. Wagschal による (0.1) の reduction.

任意の $i=1, \dots, m$ を 1 つ固定すると $\Omega \setminus \{\varphi^i(x) = 0\}$ で多価正則な関数 $w(x)$ を取り、 $D_0^j w|_S = w_j(x)$, $j=0, \dots, m-1$ とすることが出来る。 $i=1$ とし $\tilde{v}(x) = -a(x, D)w$ と置くと $\tilde{v}(x)$ は $\Omega \setminus \{\varphi^1(x) = 0\}$ で多価正則となる。さらに \tilde{v} は適当な $\mathcal{R}_\omega \times \Omega$ で正則な関数 $v(t; x)$ とつかって

$$\tilde{v}(x) = v(\varphi^1(x); x)$$

と書ける。(実際には上で Ω を小さく取り直すなければならないが、原点の近傍での話なのでわざわざことわらなかつた。以下でも明らかになる時は同様である。) 従って $u-w$ を新たな未知関数とすれば (0.1) は次の問題に帰着される。

$$(2.1) \quad \begin{cases} a(x, D) u(x) = v(\varphi'(x), x) \\ D_0^j u|_S = 0 \quad j=0, 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

我々は (2.1) の解を先験的に

$$(2.2) \quad u(x) = \underbrace{\int_0^{x_0} dt_{m-1} \int_0^{t_{m-1}} dt_{m-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1}_{m-1} \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m}(t_{m-1}, x); t_{m-1}, x)$$

と求めて求める。この時、 $u(x)$ は明らかに (2.1) の初期条件
 $j=0, \dots, m-2$ についてみたし、 $D_0^{m-1} u|_S = \tilde{u}(x_1; 0 \dots 0, 0, x')$ となる。

§3. 擬微分作用素

この章では多価正則関数に働く擬微分作用素を定義しよう。
 $\varphi(x)$ と $0 \in \mathbb{C}^n$ の単連結な開近傍 Ω で正則な関数で、 $\varphi(0) = 0$
 かつ $\varphi(\Omega) \subset D_\omega$ 、 $\omega > 0$ としよう。(簡単のために $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$
 ...等前と記号が異なるものもある。) $\mathcal{R}_\omega \times \Omega$ で正則な関数
 $u(t; x)$ に対し

$$(3.1) \quad u_\varphi(x) = u(\varphi(x), x)$$

とおくと、 $u_\varphi(x)$ は $\Omega \setminus \{\varphi=0\}$ で多価正則な関数となる。

微分作用素の u_φ の働きは次の補題で与えられる。

補題 1. $p(x, D)$ を Ω で正則な周数を係数とする k 次齊次な微分作用素としよう。このとき次の公式が成立する。

$$(3.2) \quad p(x, D) u_\varphi(x) = \sum_{l=0}^k L_l(p, \varphi | x, D) D_t^{k-l} u(t, x) \Big|_{t=\varphi(x)}$$

ただし $L_l(p, \varphi | x, D)$ は p と φ に依って定まる Ω で正則な周数を係数とする l 階の (x) についての微分作用素で次の式で与えられる。

$$(3.3) \quad L_l(p, \varphi | x, D) v(x) = \sum_{l \leq |\alpha| \leq 2l} \frac{1}{\alpha! (|\alpha| - l)!} p^{(\alpha)}(x, \nabla_x \varphi(x)) \cdot \left\{ D_x^\alpha (\tilde{\varphi}(x, \tilde{x}))^{|\alpha| - l} v(x) \Big|_{\tilde{x}=x} \right\}$$

$$(3.4) \quad \tilde{\varphi}(x, \tilde{x}) = \varphi(x) - \varphi(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\tilde{x}) \cdot (x_i - \tilde{x}_i)$$

($p^{(\alpha)}(x, \xi) = D_\xi^\alpha p(x, \xi)$), $L_l(p, \varphi)$ の主シンボルは

$$(3.5) \quad \bar{O}_l(L_l(p, \varphi))(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(x, \nabla_x \varphi(x))$$

となる。

$\Omega^* \in T^*\mathbb{C}^n \setminus 0$ の開集合とすると、 φ は

$$(3.6) \quad (x, \nabla_x \varphi(x)) \in \Omega^*, \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{特に } \nabla_x \varphi(x) \neq 0)$$

をみたすとしよう。この時 (3.3) は多項式に限らず Ω^* で正

則な任意の正則関数 $p(x, \xi)$ に対して意味を持つ。そこで Ω^* 上の擬分作用素の定義を思い出そう。

定義 1. 形式的無限和 $P(x, \xi) = \sum_{k=-\infty}^m p_k(x, \xi)$ ($m \in \mathbb{Z}$) が Ω^* 上の擬微分作用素の表象であるとは

(i) $p_k(x, \xi) \in \mathcal{O}(\Omega^*)$ かつ ξ に関して k 次序次

(ii) $\forall K^* \ll \Omega^*$ に対し 定数 $C, h > 0$ が存在して

$$(3.7) \quad |p_{m-k}(x, \xi)| \leq C \cdot h^k k! \quad \forall k=0, 1, 2, \dots, \forall (x, \xi) \in K^*.$$

となることで定める。 Ω^* 上の表象全体を $\mathcal{E}(\Omega^*)$ と書く。

\mathbb{R}_ω のかつてな点 $b \in \mathbb{R}$ を取って固定しよう。 \mathbb{R}_ω 上の正則関数 $u(t)$ に対し $D_t^{-1} u(t) \in \mathcal{U}$ の不定積分を b で消えよと定める、つまり、 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_\omega$ $\gamma(0) = b, \gamma(1) = t$ となる滑らかな道とするとき

$$(3.8) \quad D_t^{-1} u(t) = \int_0^1 u(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) ds$$

である。 $t \in \mathbb{R}$ に対し $\tilde{\gamma}: [0, 1] \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathbb{R}_\omega \xrightarrow{\text{notn. proj}} D_\omega$ 。一般に $l \geq 1$ なる自然数に対し $D_t^{-l} = D_t^{-1} \circ \dots \circ D_t^{-1}$ (l 回) で定める。

定義 2. $P(x, \xi) = \sum_{j=-\infty}^m p_j(x, \xi) \in \mathcal{E}(\Omega^*)$ の擬微分作用素の表象とするとき $u_\varphi(x)$ への $P(x, D)$ の作用を

$$(3.9) \quad P(x, D)u_\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^m \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(P_\ell, \varphi | x, D) D_t^{k-\ell} u(t, x) \Big|_{t=\varphi}$$

で定義する。

命題 1. 任意の $\Omega_1 \subset \Omega$ に対して $u(t, x) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_+ \times \Omega_1)$ に独立な定数 $\eta > 0$ が存在して (3.9) の右辺の無限和は $\mathbb{R}_+ \times \Omega_1$ で絶対一様収束する。さらに

$$(3.10) \quad L_\ell(P, \varphi) = \sum_{\mu=0}^{\ell} L_\mu(P_{m-\ell+\mu}, \varphi) \quad , \quad \ell=0, 1, 2, \dots$$

とおくと

$$(3.11) \quad P(x, D)u_\varphi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(P, \varphi) D_t^{m-\ell} u(t, x) \Big|_{t=\varphi}$$

となる。

この命題は Wagschal [14] の方法を用いて証明できる。

$L_\ell(P, \varphi)$ の始めの二つは次で与えられ、有益である。

$$(3.12) \quad \begin{cases} L_0(P, \varphi) = L_0(P_m, \varphi) = P_m(x, D)\varphi(x) \\ L_1(P, \varphi) = \sum D_{x_i} P_m(x, D)\varphi + \frac{1}{2} \sum D_{x_i} D_{x_j} P(x, D)\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + L_0(P_{m-1}, \varphi) \end{cases}$$

又 $L_\ell(P, \varphi)$ は t に依存しないので D_t^g ($g \in \mathbb{Z}$) と可換となることも注意しておこう。命題 1 により擬微分作用素が well-

defined となったが、その計算においては次の命題が基本的である。

命題 2. $P, Q \in E(\Omega^*)$ とそれぞれ m_1, m_2 階の表象,
 $R \in E(\Omega^*)$ と P と Q の合成表象 $P \circ Q$ とする。とし

$$(3.13) \quad L_\ell(Q, \varphi) = 0 \quad 0 \leq \ell \leq m_2 - 1$$

($m_2 \leq 0$ なら無条件) なら 任意の $u(x) \in C(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ に対し

$$(3.14) \quad P(x, D) \cdot Q(x, D) u_\varphi(x) = R(x, D) u_\varphi(x)$$

が成立する。

証明は本質的に [7, Th'm 3.16] のと同じであるが $D_t^{-1} D_t \neq id$ であるため (3.13) の条件が必要である。

§4. 定理の証明

第 1, 2 節の記号にもどろう。まず多重相関教の基本的な性質を述べよう。(詳しくは [7] の第 2 節をみよ。)

補題 2. (H.1), (H.2) を仮定すると 原点の近傍で正則な

関数の集合 $\{a_{k,\nu}^{I_k} = a_{k,\nu}^{I_k}(\sigma_{\nu-1}, x) : I_k \in J(m), 1 \leq k \leq l-1, k \leq \nu \leq l-1\}$ が存在して $k=1, \dots, l-1$ に対して 辺Eみたす。

$$(4.1) \quad D_0 \varphi^{I_k} - \lambda_{I_k}(x, \sigma_{\nu-1} \varphi^{I_k}) = - \sum_{\nu=k}^{l-1} a_{k,\nu}^{I_k} \frac{\partial \varphi^{I_k}}{\partial \tau_{\nu}}$$

(注) (H.2) で Poisson bracket が恒等的に消えることを仮定すると $a_{k,\nu}^{I_k} \equiv 1$ とできる。

いよいよ (2.2) の \tilde{u} のみたす方程式を求めよう。簡単のため $h_i(x, \xi) = \xi_0 - \lambda_i(x, \xi')$, $i=1, \dots, m$ とおく。

$h_m(x, D)$ を (2.2) に作用させると

$$h_m(x, D) u(x) = \int_{\tau_{m-1}}^{x_0} h_m(x, D) \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m}, \sigma_{m-1}, x) + \int_{\tau_{m-2}}^{x_0} \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m-1}; \sigma_{m-2}, x_0, x)$$

(1.3), (3.12) より $L_0(h_m; \varphi^{1 \dots m}) = 0$ であることを注意しよう。

さらに $h_{m-1}(x, D)$ を作用させると

$$\begin{aligned} h_{m-1}(x, D) h_m(x, D) u(x) &= \int_{\tau_{m-1}}^{x_0} h_{m-1}(x, D) h_m(x, D) \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m}) + \\ &+ \int_{\tau_{m-2}}^{x_0} h_m(x, D) \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m}) \Big|_{\tau_{m-1}=x_0} + \int_{\tau_{m-2}}^{x_0} h_{m-1}(x, D) \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m-1}) \\ &+ \int_{\tau_{m-3}}^{x_0} \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m-2}; \sigma_{m-3}, x_0, x_0, x) \end{aligned}$$

ここで $L_0(h_{m-1}, \varphi^{1 \dots m}) = - a_{m-1, m-1}^{1 \dots m} \frac{\partial \varphi^{1 \dots m}}{\partial \tau_{m-1}}$ を使, 部分積分すれば

$$\begin{aligned}
h_{m-1}(x, D) \circ h_m(x, D) u(x) &= \int_{\dots}^{x_0} \underbrace{h_{m-1}(x, D) + D_{\tau_{m-1}} \cdot a_{m-1, m-1}^{1-m}}_{m-1} h_m(x, D) \tilde{u}(\varphi^{1-m}; \sigma_{m-1}, x) \\
&+ \int_{\dots}^{x_0} \underbrace{h_m(x, D) \tilde{u}(\varphi^{1-m}; \sigma_{m-2}, \sigma_{m-2}, x)}_{m-2} + \int_{\dots}^{x_0} \underbrace{h_{m-1}(x, D) \tilde{u}(\varphi^{1-m-1}; \sigma_{m-1}, x_0, x)}_{m-2} \\
&+ \int_{\dots}^{x_0} \underbrace{\tilde{u}(\varphi^{1-m-2}; \sigma_{m-3}, x_0, x_0, x)}_{m-3} \quad \text{を得る。} \quad \text{一般には帰納法} \\
&\text{により}
\end{aligned}$$

$$(4.2) \quad h_1(x, D) \circ \dots \circ h_m(x, D) u(x)$$

$$= \sum_{I_\ell \in J(m)} \int_{\dots}^{x_0} \underbrace{\left(h_{i_1}(x, D) + \sum_{\nu=1}^{\ell-1} D_{\tau_\nu} \cdot a_{i_1, \nu}^{I_\ell} \right)}_{\ell-1} \circ \dots \circ h_{i_\ell}(x, D) \tilde{u}(\varphi^{I_\ell}; \sigma^{I_\ell}, x)$$

となる。ただし $\sigma^{I_\ell} = (0 \dots 0, \tau_1, \dots, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_3, \dots, \tau_{\ell-1}, x_0, \dots, x_0)$ 。

$$(4.2) \text{ において補題 2 より } h_{i_k}(I_\ell | \sigma_{\ell-1}, x, D) = h_{i_k}(x, D) + \sum_{\nu=k}^{\ell-1} D_{\tau_\nu} \cdot a_{i_k, \nu}^{I_\ell}$$

$$H^{I_\ell} = h_{i_1}(I_\ell) \circ \dots \circ h_{i_\ell}(I_\ell) \quad \text{とあくと}$$

$$(4.3) \quad L_0(h_{i_k}(I_\ell); \varphi^{I_\ell}) = 0$$

従って

$$(4.4) \quad L_\mu(H^{I_\ell}, \varphi^{I_\ell}) = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, \ell-1$$

となることが重要である。(4.3), (4.4) を考慮して命題 2 を

適用すれば 高々 $m-1$ 階の擬微分作用素 (D_0 については微分

作用素) $B_{m-1}(x, D)$ が存在して

$$(4.5) \quad a(x, D)u(x) = [p_1(x, D) \circ \dots \circ p_m(x, D) - B_{m-1}(x, D)]u(x)$$

となる。 $B_{m-1}(x, D)u(x)$ を計算すれば

$$(4.6) \quad B_{m-1}(x, D)u(x) = \sum_{i=1}^m \int_{\tau_{i-1}}^{x_0} \dots \int_{\tau_{i-1}} B_{i-1}(x, D_\sigma, D_x) \tilde{u}(\varphi^{i \dots m}, \sigma_{m-1}, x) \Big|_{\tau_i = \tau_{m-1} = x_0}$$

となる。ただし B_{i-1} は高々 $i-1$ 階の擬微分作用素である。従って \tilde{u} が次の方程式系をみたせば u は (2.1) をみたす。

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1(x, D) \tilde{u}(\varphi^1, x_0 \dots x_0, x) = B_0 \tilde{u} \Big|_0 + v(\varphi^1, x) \\ p_i(x, D) \tilde{u}(\varphi^i; 0 \dots 0, x_0 \dots x_0, x) = 0 \quad 2 \leq i \leq m \\ \vdots \\ H^{I_2}(x, D_\sigma, D_x) \tilde{u}(\varphi^{I_2}, \sigma^{I_2}, x) = \sum_{l=1}^{I_2} B_{l-1}(x, D_\sigma, D_x) \tilde{u} \Big|_0 \quad l \geq 2 \\ \vdots \\ H^{1 \dots m}(x, D_\sigma, D_x) \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m}, \sigma_{m-1}, x) = B_{m-1}(x, D_x) \tilde{u}(\varphi^{1 \dots m}, \sigma_{m-1}, x) \end{array} \right.$$

$$(4.8) \quad u(x_i; 0 \dots 0, x') = 0$$

結局、与えられた $w(t, \sigma^{I_2}, x)$ に対して次の方程式が解ければよい。

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} H^{I_2}(x, D_\sigma, D_x) \tilde{u}(\varphi^{I_2}, \sigma^{I_2}, x) = B_{l-1}(x, D_\sigma, D_x) \tilde{u} \Big|_{\tau_l = \tau_{l+1} = \dots = \tau_{m-1} = x_0} \\ \tilde{u}(t, \sigma^{I_2}, x) - w(t, \sigma^{I_2}, x) \Big|_{\tau_i - \tau_{i-1} = 0} = 0 \end{array} \right.$$

$\tilde{\tau} = x_0 - \tau_{i-1}$, $\tilde{\tau}_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, \dots , $\tilde{\tau}_1 = \tau_1$ と座標変換し

(4.4) に注意すると次の方程式を解けばよい ($\tilde{x} = (\tilde{\sigma}_l, x')$,

$\tilde{\sigma}_l = (\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_l)$ とおく)

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{aligned} D_{\bar{t}_i} \cdots D_{\bar{t}_2} \bar{u}(t; \bar{x}) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\ell+\mu} D_{\bar{t}}^{-\mu} u(t, \bar{x}) \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} B_i D_{\bar{t}}^{m-1-i} u(t, \bar{x}) + v(t; \bar{x}) \\ u(t; \bar{x}) - w(t; \bar{x}) \Big|_{\bar{t}_i=0} &= 0 \quad i=1, \dots, \ell \end{aligned} \right.$$

$A_{\ell}, (B_i)$ は高々 ℓ 階 (i 階) の微分作用素で、本質的にはある表象から (3.3) によって与えられる。

逐次近似により (4.10) の可解性が示せるので 定理 1 が証明される。

定理 2 は次の補題をつかう。

補題 3. (H.1) を仮定する。もし $\lambda_{i_k(0, e_1)} \neq \lambda_{i_{k-1}(0, e_1)}$ であれば 原点の十分小さな近傍を取れば $\frac{\partial \varphi^{I_k}}{\partial \tau_k} \neq 0$ としてよい。

τ_k の共役変数 ζ_k とすれば 補題より ζ_k^{-1} を表象とする擬微分作用素 $D_{\tau_k}^{-1}$ は well-defined となり、しかも、

$$(4.11) \quad \int_a^b v(\varphi^{I_k}; \tau_k, x) d\tau_k = \left[D_{\tau_k}^{-1} v(\varphi^{I_k}; \tau_k, x) \right]_a^b$$

となる。つまり左辺の積分は $\varphi^{I_k}(b, x) = 0$ と $\varphi^{I_k}(a, x) = 0$ に特異性を持つ二つの関数の和で表わせる。

(1.4) において積分順序を交換して上の事実を使えば 定理 2 が得られる。

REFERENCES

1. Y. Hamada, The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 5(1969), 21-40.
2. Y. Hamada, Probleme analytique de Cauchy a caracteristiques multiples dont les donnees de Cauchy ont des singularites polaires, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. 276(1973), 1681-1684.
3. Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, Systemes d'equations aux derivees partielles a caracteristiques multiples: probleme de Cauchy ramifies; hyperbolicite partielle, J. Math. pures et appl., 55(1976). 297-352.
4. Y. Hamada and G. Nakamura, On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristics, Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, 4(1977), 725-755.
5. T. Ishii, On a representation of the solution of the Cauchy problem with singular initial data, proc. Japan Acad., 56 (1980), 59-61.
6. T. Ishii, 特異初期値問題の解の表示について. 数理研究 講究録 410
7. T. Kobayashi, On the singular Cauchy problem for operators with variable involutive characteristics, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo SEc. IA, 29(1982), 97-142.

8. T. Kobayashi, On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain, to appear.
9. L. Lampion, An extension of a theorem of Hamada on the Cauchy problem with singular data, Bull. Amer. Math Soc. 79(1973) 776-779.
10. D. Shiltz, J. Vailllant et C. Wagschal, Problème de Cauchy ramifié racine caractéristique double ou triple en involution to appear.
11. J. Urabe, On the theorem of Hamada for a linear second order equation with variable multiplicities, J. Math. Kyoto Univ. 19-1(1978), 153-169.
12. J. Urabe, On Hamada's theorem for a certain class of the operators with double characteristics, Jour. Math. Kyoto Univ., 21(1981), 517-535.
13. C. Wagschal, Sur le problème de Cauchy ramifié, J. Math. pures et appl. 53(1974), 147-164.
14. C. Wagschal, Une généralisation du problème de Gourst pour des systèmes d'équation intégral-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes, J. Math. pures et appl., 53 (1974), 99-132.
15. C. Wagschal, Problème de Cauchy à caractéristiques multiples de multiplicité variable, C. R. Acad. Sc. Paris, 293(1981) 641-644.