数理解析研究所講究録
459巻 1982年 10-17

分離正則性について

福岡教育大学　　濃野聖晴

§1. 序.

D, Gをそれぞれ複素空間$\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q$の領域とし，$E\subset D, F\subset G$, $X=(D\times F)\cup(E\times G)$とする。$f(z,w)$を$X$で定義された関数とし，$\{f_m(z,w)\}$, $\mathcal{F}$をそれぞれ$D\times G$で正則な関数列，関数族とする。$H(D\times G)$を$D\times G$で正則な関数全体，$UC(D\times G)$を$D\times G$で広義一様収束する関数列全体，$N(D\times G)$を$D\times G$で正規族である関数族全体とする。

定義1. 各$w\in F$ $(z\in E)$に対して，$f(z,w)$がD (G)で正則であるとき，fはXで分離正則であるといい，$f\in SH(X)$と書く。

定義2. 各$w\in F$ $(z\in E)$に対して，$\{f_m(z,w)\}$がD (G)で広義一様収束するとき，$\{f_m\}$はXで分離広義一様収束するといい，$\{f_m\}\in SUC(X)$と書く。

定義3. 各$w\in F$ $(z\in E)$に対して，$\mathcal{F}$が$D(G)$で正規族であるとき，$\mathcal{F}$はXで分離正規であるといい，$\mathcal{F}\in SN(X)$と書く。

定義1にて$E=D$, $F=G$の場合，

$$\text{“}\ f\in SH(X)\Rightarrow f\in H(D\times G)\ \text{”}$$

が成立する。これはHartogsの正則性定理として良く知られている。定義2, 3にて，$p=q=1$, $E=D$, $F=G$の場合,

$$\text{“}\{f_n\}\in SUC(X)\Rightarrow\{f_n\}\in UC(D\times G)\text{”}$$

$$\text{“}\mathcal{F}\in SN(X)\Rightarrow\mathcal{F}\in N(D\times G)\text{”}$$

が成立する。これはT. Nishino [2] の結果である。次の問題はM. Hukuhara [1] によって差し出された問題である。

問題H1.：定義1にて，$F=G$の場合,

$$\text{“}f\in SH(X)\Rightarrow f\in H(D\times G)\text{”}$$

なる$E\subset D$を特徴付けよ。

この問題はT. Terada [5], [6]によって解決された。次の問題はJ. Siciak [3]によって差し出され，解決された。

問題H2：定義1にて,

$$\text{“}f\in SH(X)\Rightarrow f\text{は}X\text{の近傍}\Omega\text{に接続出来る。”}$$

なる$E\subset D$, $F\subset G$を特徴付けよ。

定義2, 3に対しても問題H1, H2と類似の問題が考えられる。

問題C1.：定義2にて, $F=G$の場合,

$$\{f_n\}\in SUC(X)\Rightarrow\{f_n\}\in UC(D\times G)$$

なる$E\subset D$を特徴付けよ。

問題C2.：定義2において，

$$\{f_n\}\in SUC(X)\Rightarrow{}^{\exists}\Omega:X\text{の近傍};\ \{f_n\}\in UC(\Omega)$$

なる$E\subset D$, $F\subset G$を特徴付けよ。

問題N1.:定義3で$F=G$の場合

$$\mathcal{F}\in SN(X)\Rightarrow \mathcal{F}\in N(D\times G)$$

なる$E\subset D$を特徴付けよ。

問題N2.:定義3において、

$$\mathcal{F}\in SN(X)\Rightarrow \exists\Omega: X\text{の近傍};\ \mathcal{F}\in N(\Omega).$$

なる$E\subset D$, $F\subset G$を特徴付けよ。

問題C1, N1 は T. Terada [6] によって既に解決された。ここでは問題C2, N2 について言及します。

§2. 定義.

$E\subset\mathbb{C}^g$, $a\in\mathbb{C}^g$とする。各$z\in E$に対して $\sup_{P\in\mathcal{F}}|P(z)|<+\infty$ なる任意の多項式の族$\mathcal{F}$と任意の$\varepsilon>0$に対して、

$$|P(z)|\le Me^{\varepsilon\deg P},\quad |z-a|<\delta,\quad P\in\mathcal{F},$$

を満す定数$M=M(a,\varepsilon)>0$, $\delta=\delta(a,\varepsilon)>0$が存在するとき$E$は$a$で条件$(L_0)$を満すという。任意の正数$r$に対して、$E_r\equiv\{z\in E;\ |z-a|\le r\}$が$a$で$(L_0)$をみたすとき, Eはaで条件(L)をみたすという。EがEの各点で条件(L)をみたすとき$E\in(L)$と書く。

Gを$\mathbb{C}^g$の領域とし, FをGのコンパクト集合とする。

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(G,F)\equiv\{u(w);\ u(w)\text{は}G\text{で多重劣調和関数},\ F\text{上で}\ u(w)\le 0,\ G\text{にて}\ u(w)\le 1\}.$$

$$h_G(w,F) \equiv \varlimsup_{w' \to w} \sup \sup \{ u(w') ; u \in \mathfrak{M} \}, \quad w \in G.$$

とする。任意の σ, $0<\sigma<1$ に対して, $G_\sigma \equiv \{w \in G ; h_G(w,F) < \sigma\}$ が $F \subset G_\sigma \subset\subset G$ をみたすとき, (G,F) は条件(A_0)を満すといい, $(G,F) \in (A_0)$ と書く。$G_s \subset\subset G$, $F \subset G_s \subset G_{s+1}$, $G = \bigcup_{s=1}^{\infty} G_s$, $(G_s, F) \in (A_0)$ を満す領域の列 $\{G_s\}$ が存在するとき, (G,F) は条件(A)をみたすといい, $(G,F) \in (A)$ と書く。また $H_G(w,F) \equiv \lim_{s \to \infty} h_{G_s}(w,F)$, $\hat{F} = \hat{F}_G \equiv \{O ; O$ は $G-F$ の連結成分, $O \subset\subset G\}$ とする。

§3. Siciak の結果

問題H2 に関する Siciak の結果を紹介する。

定理 S.1. D を複素平面の領域とし, $E \subset D$ をコンパクト G を $\mathbb{C}^g$ の領域で, $F \subset G$ をコンパクト, $(G,F) \in (A)$ とする。このとき, $f \in SH(X)$, $X \equiv (D \times F) \cup (E \times G)$ ならば,

(1) $\exists \hat{f} \in H(\Omega)$; $\hat{f}|X = f$, $\Omega \equiv \{(z,w) \in D \times G, H_D(z,E) + H_G(w,F) < 1\}$.

(2) Ω は X の正則包である。

定理 S.2. D_k を複素平面の領域 $(k=1,\cdots,n)$ とし, $E_k \subset D_k$ を $\partial \hat{E}_k \in (L)$ なるコンパクト集合, $X = (D_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) \cup \cdots (E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times D_n)$ とする。$f \in SH(X)$ (すなわち, $(z_1, \cdots, z_{k-1}, z_{k+1}, \cdots z_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_n$ に対して f は D_k で正則, $k=1,\cdots n$) ならば

1°) $\exists \tilde{f} \in H(\Omega)$; $\tilde{f}|X = f$. ただし

$\Omega \equiv \{(z_1, \cdots, z_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n ;\ h_{D_1}(z_1, E_1) + \cdots + h_{D_n}(z_n, E_n) < 1\}$

2°) Ω は X の正則包である。

(注) この講演後に判明した事であるが, 定理 S.1. において D が複素空間 $\mathbb{C}^p$ ($p \geqq 1$) の場合に Siciak [4] によって問題 H2 は解決されている。

§4. 問題 C2, N2 について.

定理 1. D を複素平面の領域とし, $E \subset D$ をコンパクト, G を複素空間 $\mathbb{C}^g$ の領域, $F \subset G$ をコンパクトで $(G, F) \in (A)$ をみたすものとする。このとき $\{f_n(z, w)\} \in SUC(X)$, $X = (D \times F) \cup (E \times G)$ ならば,

1°) $\{f_n\} \in UC(\Omega)$, $\Omega \equiv \{(z, w) \in D \times G ;\ H_D(z, E) + H_G(w, F) < 1\}$.

2°) Ω は X の正則包である。

定理 2. D_k を複素平面の領域 ($k = 1, \cdots, m$) とし, $E_k \subset D_k$ を $\partial \hat{E}_k \in (L)$ なるコンパクト集合, $X = (D_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m) \cup \cdots \cup (E_1 \times \cdots \times E_{m-1} \times D_m)$ とする。$\{f_n(z)\} = \{f_n(z_1, \cdots, z_m)\} \in SUC(X)$ (すなわち, $(z_1, \cdots, z_{k-1}, z_{k+1}, \cdots, z_m) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_m$

に対して，$\{f_n(z_k)\}$ は D_k で広義一様収束する。($k=1,\cdots,m$)）ならば

1°) $\{f_n\} \in UC(\Omega)$. ただし $\Omega \equiv \{z \in D_1\times\cdots\times D_m ; h_{D_1}(z_1,E_1)+\cdots + h_{D_m}(z_m,E_m) < 1\}$.

2°) Ω は X の正則包である。

定理3. D, E, G, F, X は定理1のものとする。$\mathfrak{F} \in SN(X)$ ならば次が成り立つ。

1°) $\mathfrak{F} \in N(\Omega)$, $\Omega \equiv \{(z,w) \in D\times G ; H_D(z,E)+H_G(w,F) < 1\}$

2°) Ω は X の正則包である。

定理4. D_k, E_k ($k=1,\cdots,m$) X は定理2のものとする。
$\mathfrak{F} \in SN(X)$ ならば，次が成り立つ。

1°) $\mathfrak{F} \in N(\Omega)$, $\Omega \equiv \{z \in D_1\times\cdots\times D_m ; h_{D_1}(z_1,E_1)+\cdots+h_{D_m}(z_m,E_m) < 1\}$.

2°) Ω は X の正則包である。

定理1〜4の証明の概略.

補題1. D を複素空間 $\mathbb{C}^m$ の領域とし，$E \subset D$ を $E \in (L)$ なるコンパクト集合，$\{f_n(z)\}$ を D で正則な関数列で局所一様有界で，E 上で収束するものとする。このとき，$\{f_n\}$ は D で広義一様収束する。

この補題は次の一致の定理を使うことによって、普通のVitaliの定理と同様に示される。

補題2. D, Eは補題1のものとする。$f \in H(D)$のとき、

$$f \equiv 0 \quad (z \in E) \Longrightarrow f \equiv 0 \quad (z \in D).$$

定理1は定理§1で用いられた正則関数の補間多項式近似とベールの定理を使い、補題1の形にもっていき証明される。

補題3. D, E, G, F, X は定理1のものとする。$\mathfrak{F} \in SN(X)$ならば、$\mathfrak{F}$の中の任意の関数列$\{f_n\}$に対して、その部分列$\{f_{n_k}\}$で$\{f_{n_k}\} \in SUC(X)$なるものが存在する。

この補題は補題1と対角線論法を使うことによって示される。そこで、定理3は補題3と定理1を使うことによって示される。また、定理2、4は数学的帰納法より示される。

文献

[1] M. Hukuhara, L'extensions du theoreme d'Osgood et de Hartogs, Kansuhoteisiki oyobi Oyo-kaiseki (1930) P. 48.

[2] T. Nishino, Sur une propriété des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965) 255-282.

[3] J. Siciak, Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$. Ann. Pol. Mat. 22 (1969) 145-171.

[4] J. Siciak, Extremal plurisubharmonic fonctions in $\mathbb{C}^N$, Ann Pol. Mat. 39, (1981). 175-211.

[5] T. Terada, Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe. Publ. of Reser. Inst. for Math. Sci. Vol. 2 (3) (1967) 383-395.

[6] T. Terada, Analyticités relatives à chaques variable, J. Math. Kyoto Univ. 12 (2) (1972) 263-296.

[7] K. Nôno, Normality of Separately Normal Families, Bull. Fukuoka Univ. of Edu. 31 (3) 13-17 (1981).