

2人零和マルコフ・ゲームについて

新堀大 理 田辺 信男

1 導入

ここでは、特別な形の確率微分方程式で表されるシステムの下での2人零和マルコフ・ゲームについて考える。

費用関数は、2次項と双線形項の期待値からなり、各プレイヤーの戦略空間は、ユークリッド空間の単位球をなしている。1人のプレイヤーは費用関数を最大に、もう一人は最小にするものとする。このとき、ある仮定の下で、鞍点が純粋戦略として存在し、純粋戦略として存在しない場合、ある2つの純粋戦略を確率化することにより得られる *atomic*-混合戦略が鞍点となることを示す。*atomic*-混合戦略の構成法は2人零和2次ゲームに対するWilson [6]の方法による。

2. 2人零和マルコフ・ゲームの構成

システムの状態が、次の確率微分方程式で与えられる2人零和マルコフ・ゲームを考える。 $t \in [0, T]$ に対して

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t, x) + C(t)v(t, x)] dt + \sigma(t)dW(t)$$

$$x(0) = x_0$$

ここで, $A(t), B(t), C(t)$ は t に関して連続で, それぞれ $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ 行列, $a(t) = \sigma(t) \cdot \sigma(t)'$ は $n \times n$ 対称正定値行列で t に関して連続, $W(t)$ は n 次元標準ブラウン運動とする。

C を $[0, T]$ から R^n への連続関数の空間とし, (t, x) を $t \in [0, T] \times t$ における $x \in C$ の値の組とする。 $[0, T] \times R^n$ の σ -field \mathcal{F} を $B([0, T]) \times B(R^n)$ とする。ここで $B([0, T])$ は $[0, T]$ の Lebesgue σ -field, $B(R^n)$ は R^n のボレル σ -field を表す。プレイヤー u と v は, 協力することなく, 現在のシステムの状態を観測し, それぞれ行動 $u \in U = \{u \in R^p : |u|^2 \leq 1\}$,

$v \in V = \{v \in R^q : |v|^2 \leq 1\}$ を選ぶものとする。

$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ をそれぞれ U と V のボレル部分集合の σ -field とする。

各プレイヤーの許容純粋戦略は次のような可測関数である:

$$u : [0, T] \times R^n \rightarrow U, \quad v : [0, T] \times R^n \rightarrow V$$

$C(U)$ を U 上のすべての実数値連続関数の集合とすると, sup norm により導かれる距離により separable-空間となる。

$F(U)$ を $C(U)$ により導かれる弱位相をもつ, (U, \mathcal{U}_1) 上のすべての signed measure の集合とする。すると, U 上のすべてのボレル確率測度の集合 $P(U)$ は $F(U)$ の部分空間となり, さらに $F(U)$ の compact convex 距離部分空間として距離化できる。

同様に $P(V)$ も $F(V)$ の Compact convex 距離空間となる。

プレイヤー u と v の許容混合戦略は次のような可測関数である：
 $u: [0, T] \times R^n \rightarrow P(U)$, $v: [0, T] \times R^n \rightarrow P(V)$
 しかし、以後主にでてくる混合戦略は、純粋戦略の有限集合のそれぞれに正の確率を指定する atomic-混合戦略である。
 1つの純粋戦略に集中している確率測度を $\delta(\cdot)$ で表すと、
 各 $(t, x) \in [0, T] \times R^n$ に対して、確率 $\nu_k, \nu_k > 0, \sum_{k=1}^P \nu_k = 1$ で
 純粋戦略 $u^k, k=1, 2, \dots, P$ を選ぶ混合戦略は $\sum_{k=1}^P \nu_k \delta(u^k)$ で表される。
 次に、費用関数は次のように与えられる。

$$J(u, v) = E_{(u, v)} \left\{ \int_0^T [x(t)' Q(t) x(t) + u'(t, x) R(t) u(t, x) + v(t, x) S(t) v(t, x) + u'(t, x) M(t) v(t, x)] dt + x'(T) F(T) x(T) \right\}$$

ここで $Q(t), R(t), S(t)$ は対称で、 t に関して連続であり、それぞれ、 $n \times n, P \times P, q \times q$ 行列で、 $F(T)$ は対称 $n \times n$ 行列、 $M(t)$ は t に関して連続で $P \times q$ 行列とする。

もし、すべての戦略 u, v について

$J(u, v^*) \leq J(u^*, v^*) \leq J(u^*, v)$ を満たす組 (u^*, v^*) が存在するならば、この (u^*, v^*) をゲームの鞍点と呼ぶ。

3. 純粋戦略における鞍点

ここでは $R(t)$ が negative semi definite で、 $S(t)$ が positive semi definite のとき、ゲームが純粋戦略をもつことを示す。

$\forall p \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$H(t, x, u, v, p) = p'(A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v) + L(t, x, u, v)$$

$$L(t, x, u, v) = x'(t)Q(t)x(t) + u'R(t)u + v'S(t)v + u'M(t)v$$

とおく。

$$W(t, x) = x'(t)K(t)x(t) + \int g(t)x(t) + h(t)$$

$$\text{かつ, } W(T, x) = x'(T)F(T)x(T) \quad \text{とする.}$$

ここで, $K(t)$ は t に関して微分可能な $n \times n$ 行列, $g(t)$ は t に関して微分可能な n 次元ベクトル, $h(t)$ は t に関して微分可能な実数値関数とする。

$$H(t, x, u, v) = H(t, x, u, v, \frac{\partial W(t, x)}{\partial x}) \quad \text{とおく.}$$

補助定理 3.1

もし $R(t)$ が negative semidefinite で, $S(t)$ が positive semidefinite であるならば, 次のような可測関数 u^*, v^* が存在する. \therefore 各 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ に対し, 任意の純粋戦略 u, v について,

$$H(t, x, u, v^*) \leq H(t, x, u^*, v^*) \leq H(t, x, u^*, v)$$

証明 $U \times V$ は convex で compact であり,

$R(t)$ が negative semi-definite であるから, 関数: $u \rightarrow$

$u'R(t)u$ は concave, よって $H(t, x, u, v)$ は固定した $v,$

(t, x) に対して, u に関して concave であり, また $S(t)$ が

positive semi-definite であるから, 関数: $v \rightarrow v'S(t)v$ は Convex, よって $H(t, x, u, v)$ は固定した $u, (t, x)$ に対して v に関して convex となる。また $H(t, x, u, v)$ は固定した (t, x) に対して u と v に関して連続である。従って, 角谷の不動点定理から, 各 (t, x) に対して, 次のような u^0, v^0 が存在する: すべての $u \in \Gamma, v \in V$ に対して

$$H(t, x, u, v^0) \leq H(t, x, u^0, v^0) \leq H(t, x, u^0, v)$$

また, この u^0, v^0 が可測関数 $u^*: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma,$

$v^*: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow V$ で置き換えられる。なぜならば

$H(t, x, u, v^0)$ は u に関して連続で, Γ は separable より,

任意の実数 a に対して

$$\left\{ (t, x) : \max_{u \in \Gamma} H(t, x, u, v^0) < a \right\} = \bigcap_{u \in S_1} \left\{ (t, x) : H(t, x, u, v^0) < a \right\}$$

S_1 は Γ の可算な稠密部分集合とする。

よって, $\max_{u \in \Gamma} H(t, x, u, v^0)$ は \mathcal{J} に関して可測である。従って

Beneš [1] の Lemma 1 から 次のような可測関数 $u^*: [0, T] \times \mathbb{R}^n$

$\rightarrow \Gamma$ が存在する:

$$\max_{u \in \Gamma} H(t, x, u, v^0) = H(t, x, u^*, v^0)$$

同様に, 次のような可測関数 $v^*: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow V$ が存在する。

$$\min_{v \in V} H(t, x, u^0, v) = H(t, x, u^0, v^*)$$

従って 各 (t, x) に対して

$$H(t, x, u, v^*) \leq H(t, x, u^*, v^*) \leq H(t, x, u^*, v) \quad \square$$

次に, [6]の Theorem 2.2 から, 組 $(u^*(t, x), v^*(t, x)) \in U \times V$ が補助定理 3.1 を満たすための必要十分条件は, 次のような

$\lambda(t) \geq \lambda^*(t)$, $\mu(t) \leq \mu_*(t)$ が存在することである;

$$2(R(t) - \lambda(t)) u^*(t, x) + M(t) v^*(t, x) + B'(t) \cdot W_\alpha(t, x) = 0$$

$$(1) \quad M'(t) u^*(t, x) + 2(S(t) - \mu(t)) v^*(t, x) + C'(t) \cdot W_\alpha(t, x) = 0$$

$$\lambda(t) \cdot (1 - |u^*(t, x)|^2) = 0$$

$$\mu(t) \cdot (1 - |v^*(t, x)|^2) = 0$$

$$\text{ここで, } \lambda^*(t) = \max \left(\max_{|u|=1} u' R(t) u, 0 \right)$$

$$\mu_*(t) = \min \left(\min_{|v|=1} v' S(t) v, 0 \right)$$

以下この章では, 次のことを仮定する.

A1. ほとんどすべての $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$(2) \quad W_t(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t, x) + H(t, x, u^*, v^*) = 0$$

ここで, $a_{ij}(t)$ は $a(t) = \sigma(t) \cdot \sigma(t)'$ の (i, j) 成分

$$W_t(t, x) = \frac{\partial W(t, x)}{\partial t}, \quad W_\alpha(t, x) = \frac{\partial W(t, x)}{\partial x}, \quad W_{x_i x_j}(t, x) = \frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial x_i \partial x_j},$$

(u^*, v^*) は, 補助定理 3.1 の戦略とする.

関数 $W(t, x)$ に Ito stochastic differentiable rule を適用し, $E_{(u, v)} \left[\int_0^T |W_\alpha(t, x) \sigma(t)|^2 dt \right] < \infty$ を用いて,

$$(3) \quad W(0, x_0) = E_{(u, v)} \left\{ \int_0^T \left[-W_t(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t, x) - W_\alpha(t, x) (A(t)x(t) + B(t)u(t, x) + C(t)v(t, x)) \right] dt + W(T, x) \right\} \text{ を得る}$$

定理 3.1 ゲームは, 純粋戦略の鞍点をもち

証明 (3) で (u^*, v) をし, (2) と補助定理 3.1 から

$$W(0, x_0) \leq E_{(u^*, v)} \left[\int_0^T L(t, x, u^*, v) dt + W(T, x) \right]$$

また (3) で (u, v^*) をし, (2) と補助定理 3.1 から

$$W(0, x_0) \geq E_{(u, v^*)} \left[\int_0^T L(t, x, u, v^*) dt + W(T, x) \right]$$

また (3) で (u^*, v^*) をし, (2) から

$$W(0, x_0) = E_{(u^*, v^*)} \left[\int_0^T L(t, x, u^*, v^*) dt + W(T, x) \right]$$

よって $L(t, x, u, v)$ の定義と, 上のことから

任意の純粋戦略 u, v に対して

$$\begin{aligned} & E_{(u^*, v)} \left[\int_0^T \left[x'(t) Q(t) x(t) + u^*(t, x) R(t) u^*(t, x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + v(t, x) S(t) v(t, x) + u^*(t, x) M(t) v(t, x) \right] dt + W(T, x) \right] \\ & \geq E_{(u^*, v^*)} \left\{ \int_0^T \left[x'(t) Q(t) x(t) + u^*(t, x) R(t) u^*(t, x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + v^*(t, x) S(t) v^*(t, x) + u^*(t, x) M(t) v^*(t, x) \right] dt + W(T, x) \right\} \\ & \geq E_{(u, v^*)} \left\{ \int_0^T \left[x'(t) Q(t) x(t) + u(t, x) R(t) u(t, x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + v^*(t, x) S(t) v^*(t, x) + u(t, x) M(t) v^*(t, x) \right] dt + W(T, x) \right\} \end{aligned}$$

従って, すべての純粋戦略 u, v に対して

$$J(u, v^*) \leq J(u^*, v^*) \leq J(u^*, v) \quad \square$$

4. 混合戦略における鞍点

$R(t)$ と $S(t)$ に仮定のない一般の場合, $R(t) - \lambda^*(t)$ は常に, *negative semi definite* となり, $S(t) - u_*(t)$ は常に *positive semi definite* となる。

そこで, $H(t, x, u, v)$ を次のように修正する;

$$(4) H^*(t, x, u, v) = H(t, x, u, v) - \lambda^*(t) |u|^2 - \mu_*(t) |v|^2$$

すると, $R(t) - \lambda^*(t)$ が negative semi definite, $S(t) - \mu_*(t)$ が positive semi definite であるから, 補助定理 3.1 から,

次のような純粋戦略 (u^*, v^*) が存在する;

各 $(t, x) \in [0, T] \times R^n$ と任意の純粋戦略 u, v に対して

$$(5) H^*(t, x, u, v^*) \leq H^*(t, x, u^*, v^*) \leq H^*(t, x, u^*, v)$$

(1) から, このような (u^*, v^*) と各 (t, x) に対して

次のような $\lambda(t) \geq \lambda^*(t)$, $\mu(t) \leq \mu_*(t)$ が存在する;

$$2(R(t) - \lambda(t)) u^*(t, x) + M(t) v^*(t, x) + B'(t) W_x(t, x) = 0$$

$$(6) \quad M(t) u^*(t, x) + 2(S(t) - \mu(t)) v^*(t, x) + C'(t) W_x(t, x) = 0$$

$$\left\{ \lambda(t) - \lambda^*(t) \right\} \cdot (1 - |u^*(t, x)|^2) = 0$$

$$\left\{ \mu(t) - \mu_*(t) \right\} \cdot (1 - |v^*(t, x)|^2) = 0$$

以後この章では, 次のことを仮定する

(A.2) ほとんどすべての $(t, x) \in [0, T] \times R^n$ に対して

$$(7) \quad W_t(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t, x) + H^*(t, x, u^*, v^*) = 0$$

ここで (u^*, v^*) は (6) における戦略である。

次に, (6) における (u^*, v^*) を用いて混合戦略を作る。

各 $(t, x) \in [0, T] \times R^n$ に対して, 2つの場合を考える。

(a) もし $|u^*(t, x)| = 1$ または $\lambda^*(t) = 0$ ならば

$$u_1(t, x) = u_2(t, x) = u^*(t, x) \quad \text{とする}$$

(b) 他の場合 $\lambda \in \{ |u^*(t, x)| < 1 \}$ かつ $\lambda^*(t) > 0$ のとき
 $\{ u \in R^P : |u| \leq 1 \}$ は, R^P の compact 部分集合であり, $\lambda^*(t)$ の
 定義から, 次のような $\bar{u}(t) \in R^P$ が存在する ;

$$(8) \quad |\bar{u}(t)|^2 = 1, \quad \bar{u}'(t) R(t) \bar{u}(t) = \lambda^*(t)$$

さらに, $\beta = \beta_1(t, x) \times \beta_2(t, x)$ を次の方程式の解とする.

$$(9) \quad |u^*(t, x) + \beta \bar{u}(t)|^2 = 1$$

そして

$$u_1(t, x) = u^*(t, x) + \beta_1(t, x) \bar{u}(t)$$

$$u_2(t, x) = u^*(t, x) + \beta_2(t, x) \bar{u}(t) \quad \text{とする}$$

$v_1(t, x), v_2(t, x) \in [0, 1]$ で, 次のようなものがとれる :

$$(10) \quad \sum_{k=1}^2 v_k(t, x) = 1, \quad \sum_{k=1}^2 v_k(t, x) u_k(t, x) = u^*(t, x)$$

そして

$$\sigma^*(t, x) = v_1(t, x) \delta(u_1(t, x)) + v_2(t, x) \delta(u_2(t, x)) \quad \text{とおく}$$

(a) の場合, $\sigma^*(t, x)$ は, 純粋戦略 $\delta(u^*(t, x))$ として選ばれる.

同様に,

$$(c) \quad |v^*(t, x)|^2 = 1 \quad \text{または} \quad \mu_*(t) = 1 \quad \text{ならば}$$

$$v_1(t, x) = v_2(t, x) = v^*(t, x)$$

$$(d) \quad \text{他の場合, } |\bar{v}(t)|^2 = 1, \quad \bar{v}'(t) S(t) \bar{v}(t) = \mu_*(t) \quad \text{を}$$

満たす $\bar{v}(t) \in R^q$ が存在し, $\alpha = \alpha_1(t, x) \times \alpha = \alpha_2(t, x)$ を

$$(11) \quad |v^*(t, x) + \alpha \bar{v}(t)|^2 = 1 \quad \text{の解をとる,}$$

$$v_1(t, x) = v^*(t, x) + \alpha_1(t, x) \bar{v}(t)$$

$$v_2(t, x) = v^*(t, x) + d_2(t, x) \widehat{v}(t) \quad \text{とあき}$$

$\xi_k(t, x), k=1, 2$, を次のようにとれる;

$$\sum_{k=1}^2 \xi_k(t, x) = 1, \quad \sum_{k=1}^2 \xi_k(t, x) v_k(t, x) = v^*(t, x)$$

$$\tau^*(t, x) = \xi_1(t, x) \delta(v_1(t, x)) + \xi_2(t, x) \delta(v_2(t, x)) \quad \text{とする}$$

以後, $\sigma^*(t, x), \tau^*(t, x)$ の (t, x) を省略して σ^*, τ^* と書く.

混合戦略 σ^*, τ^* が用いられたときの, $H^*(t, x, \sigma^*, \tau^*)$ は

次のようになる:

$$\begin{aligned} H^*(t, x, \sigma^*, \tau^*) &= H(t, x, \sigma^*, \tau^*) - \lambda^*(t) \int_{\Gamma} |u|^2 d\sigma^*(u) \\ &\quad - \mu_*(t) \int_{\Gamma} |v|^2 d\tau^*(v) \\ &= \int_{\Gamma \times \Gamma} H(t, x, u, v) d\sigma^*(u) d\tau^*(v) - \lambda^*(t) \int_{\Gamma} |u|^2 d\sigma^*(u) \\ &\quad - \mu_*(t) \int_{\Gamma} |v|^2 d\tau^*(v) \end{aligned}$$

補助定理 4.1 すべての $u \in \Gamma$ と $v \in \Gamma$ に対して

$$H^*(t, x, \sigma^*, \delta(v)) = H^*(t, x, u^*, v)$$

$$H^*(t, x, \delta(u), \tau^*) = H^*(t, x, u, v^*)$$

証明 2つの場合を考える

(a) もし $|u^*(t, x)|^2 = 1$ または $\lambda^*(t) = 0$ ならば

$$H^*(t, x, \sigma^*, \delta(v)) = H^*(t, x, u^*, v)$$

(b) 他の場合

$$H^*(t, x, \sigma^*, \delta(v)) = H^*(t, x, u^*, v)$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^2 \beta_k(t, x) v_k(t, x) u^*(t, x) (R(t) - \lambda^*(t)) \widehat{u}(t)$$

$$+ \sum_{k=1}^2 \nu_k(t, \alpha) (\beta_k(t, \alpha))^2 \tilde{u}'(t) (R(t) - \lambda^*(t)) \tilde{u}(t)$$

$$(10) \text{ から } , \sum_{k=1}^2 \nu_k(t, \alpha) \beta_k(t, \alpha) = 0$$

$$(8) \text{ から } \sum_{k=1}^2 \nu_k(t, \alpha) (\beta_k(t, \alpha))^2 \tilde{u}'(t) (R(t) - \lambda^*(t)) \tilde{u}(t) = 0$$

従, て

$$H^*(t, \alpha, \sigma^*, \delta(v)) = H^*(t, \alpha, u^*, v)$$

(a), (b), どちらの場合とも成り立つ.

$$H^*(t, \alpha, \delta(u), \tau^*) = H^*(t, \alpha, u, v^*) \text{ も同様に得られる } \square$$

$$(9) \text{ と } (11) \text{ から } |u_k(t, \alpha)|^2 = 1, |v_k(t, \alpha)|^2 = 1$$

補助定理 4.1 から

$$\begin{aligned} H(t, \alpha, \sigma^*, \tau^*) &= H^*(t, \alpha, \sigma^*, \tau^*) + \lambda^*(t) \int_{\Omega} |u|^2 d\sigma^*(u) \\ &\quad + \mu_*(t) \int_V |v|^2 d\tau^*(v) \\ &= H^*(t, \alpha, \sigma^*, \tau^*) + \lambda^*(t) \sum_{k=1}^2 \nu_k(t, \alpha) |u_k(t, \alpha)|^2 \\ &\quad + \mu_*(t) \sum_{k=1}^2 \nu_k(t, \alpha) |v_k(t, \alpha)|^2 \\ &= H^*(t, \alpha, \sigma^*, \tau^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \\ &= H^*(t, \alpha, u^*, v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} &H^*(t, \alpha, u^*, v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \\ &\leq H^*(t, \alpha, u^*, v) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \quad \forall v \in V \\ &= H(t, \alpha, u^*, v) + \lambda^*(t) \left\{ 1 - \sum_{k=1}^2 \nu_k(t, \alpha) |u_k(t, \alpha)|^2 \right\} \\ &\quad + \mu_*(t) (1 - |v|^2) \end{aligned}$$

$$\mu_*(t) \leq 0 \text{ から } |v|^2 \leq 1, \sum_{k=1}^2 \nu_k(t, \alpha) |u_k(t, \alpha)|^2 = 1 \text{ から}$$

$$\leq H(t, x, \sigma^*, \delta(v))$$

よ、この両辺を v に関して積分して、 $\forall \tau \in P(V)$ に対して

$$(12) \quad H^*(t, x, u^*, v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \leq H(t, x, \sigma^*, \tau)$$

同様に $H^*(t, x, u^*, v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \geq H(t, x, \sigma, \tau^*)$, $\forall \sigma \in P(U)$

定理 4.1, (σ^*, τ^*) は、混合戦略における鞍点である。

証明 (A2) と (4) から

$$\begin{aligned} & W_t(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(x, t) + H(t, x, \sigma^*, \tau^*) \\ &= W_t(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(x, t) + H^*(t, x, \sigma^*, \tau^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \\ &= W_t(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(x, t) + H^*(t, x, u^*, \tau^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \\ &= \lambda^*(t) + \mu_*(t) \end{aligned}$$

$$\text{よ、て、} \quad W_t(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(x, t) + H(t, x, \sigma^*, \tau^*) = \lambda^*(t) + \mu_*(t)$$

従、て、(3) から

$$W(0, x_0) = E_{(\sigma^*, \tau^*)} \left\{ \int_0^T [L(t, x, \sigma^*, \tau^*) dt + W(T, x)] - \left(\int_0^T \lambda^*(t) dt \right) - \left(\int_0^T \mu_*(t) dt \right) \right\}$$

よ、て (12) と A2 から、 $\forall \tau \in P(V)$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda^*(t) + \mu_*(t) &= W_t(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t, x) + H^*(t, x, u^*, v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \\ &\leq W_t(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t, x) + H(t, x, \sigma^*, \tau) \end{aligned}$$

よ、て

$$W(0, x_0) \leq E_{(\sigma^*, \tau)} \left\{ \int_0^T [L(t, x, \sigma^*, \tau) dt + W(T, x)] - \left(\int_0^T \lambda^*(t) dt \right) - \left(\int_0^T \mu_*(t) dt \right) \right\}$$

同様に

$$\begin{aligned} \lambda^*(t) + \mu_*(t) &= W_t(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t, x) + H^*(t, x, u^*, v^*) + \lambda^*(t) + \mu_*(t) \\ &\geq W_t(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) W_{x_i x_j}(t, x) + H(t, x, \sigma, \tau^*) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} W(0, x_0) &\geq E_{(\sigma, \tau^*)} \left\{ \int_0^T L(t, x, \sigma, \tau^*) dt + W(T, x) \right\} \\ &\quad - \left(\int_0^T \lambda^*(t) dt \right) - \left(\int_0^T \mu_*(t) dt \right) \end{aligned}$$

$W(T, x) = x'(T) F(T) x(T)$ であるから,

$$J(\sigma, \tau^*) \leq J(\sigma^*, \tau^*) \leq J(\sigma^*, \tau)$$

Reference

- [1] Beneš, V. E., Existence of optimal strategies based on specific information for a class of stochastic decision problem, *SIAM J. Control and Optimization* 8 (1970) 178-188
- [2] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer-Verlag, Berlin, 1975
- [3] Friedman, A., *Stochastic differential equations and application*, Vol. I, II, Academic press, New York, 1975
- [4] Kakutani, S., A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, *Duke Math. J.* 8 (1941), 457-459
- [5] Tanaka, K., Report on Research under Financial support of the National Sciences Council, Taiwan, Republic of China, 1980
- [6] Wilson, D. J., Mixed strategy solutions for quadratic games, *J. Optimization Theory and Applications*, 13 (1974) 319-333