数理解析研究所講究録
460巻 1982年 160-183

3つの逆配分過程について

九大 経済　岩本誠一

1. はじめに

ある資源(resource)を2つの部門に多段的に配分して得られる総利益を最大にすることを考える。単一の資源を2つの事業A, Bに配分して投入すると，その量に応じてそれぞれ利益が得られるものとする。資源は資金，エネルギー等でもよい。事業は工場などの生産活動部門または投資活動部門でもよい。ただし，事業A, Bに投入された量は年度末には減価償却されて，それぞれ一定の割り合いで減少するものとする。次年度始めに減少した2つの資源を回収・合算して，再度2つに配分して投入するとそれぞれ利益が得られる。ここで，この配分・投入・回収・合算過程をN期間繰り返して得られる総利益を最大にするには各期において事業A, Bにいかに配分すればよいかという問題が考えられる。これを主過程(main process)という。

主過程は利益最大化問題である。これは高度成長時代の発想である。しかし，低成長・安定成長時代では，コスト最小化の逆発想が優先するであろう。すなわち，総利益は一定あるいは一定以上に確保していて，消費する資源の全体を最小

化するにはどのように配分すればよいかという問題である。これを逆過程(inverse process)という。

逆過程には再帰型，加法型，ベルマン型の3つが考えられる。3過程ともそのダイナミックスは総利益が毎期減少しているという意味で共通している。しかし，再帰型と加法型の両逆過程では総資源を表わす効用関数の生成過程に，したがってその型に，再帰性，加法性の違いがある。両逆過では各期にA，Bに配分される量の合計は主過程の総利益によって一意に固定されていて選択の余地がない。Aへの配分量の決定は同時にBへの配分量の決定でもあり，逆も成り立つ。これに対してベルマン型逆過程では各期のA，Bへの配分量は独立に選択できるようになっている。この意味でベルマン型が逆発想本来の産物であろう。

再帰型および加法型逆過程と主過程との間には，それぞれ逆関係が成立して，両逆過程の最適構造は一致して，それは主過程の最適構造より逆の意味で完全に定まる。ベルマン型は本来の逆過程にもかかわらず，主過程との間にはいわゆる逆対応はつかない。その自由度の大きさより，ベルマン型逆過程の最小資源量は再帰型・加法型逆過程のそれを超えない。

2. 主配分過程

単一初期“資源”が $s_1 > 0$ だけ与えられているとき，2つの事業A,Bに $N(\geqq 2)$ ケ年計画で投入することを考える。s_1 のうち，まず事業Aに a_1 $(0 \leqq a_1 \leqq s_1)$ だけ投入し，残り $(s_1 - a_1)$ を事業Bに投入すると，Aからは利益 $g(a_1)$ が，Bからは利益 $h(s_1 - a_1)$ がそれぞれ得られるとする。ただし $g, h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ はそれぞれ事業A,Bの利益関数である。利益は投入量に応じて定まるものとする。第1期では合計 $g(a_1) + h(s_1 - a_1)$ だけの利益が得られる。さて，Aに投入した量 a_1 は第1期末には，その実際的価値は減少して $a a_1$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ になる。同じく $(s_1 - a_1)$ は $b(s_1 - a_1)$ $(0 \leqq b \leqq 1)$ に減少する。a, b はそれぞれ事業A,Bに対する割引き率である。したがって，初期量 s_1 は第1期末には $a a_1 + b(s_1 - a_1) = s_2$ に減少している。次に，第2期首にはこの s_2 を $s_2 = a_2 + (s_2 - a_2)$ に分割して a_2 をAに，$(s_2 - a_2)$ をBにそれぞれ投入して合計利益 $g(a_2) + h(s_2 - a_2)$ が得られる。資源の量は s_2 から第2期末には $a a_2 + b(s_2 - a_2) = s_3$ になる。以下，s_3 を分割して・・・というように，この過程をN回繰り返すと，第N期末には資源の量は $a a_N + b(s_N - a_N) = s_{N+1}$ になっている。このとき $s_1 \geqq s_2 \geqq \cdots \geqq s_N \geqq s_{N+1} \geqq 0$ である。第N期末には残った量 s_{N+1} に応

じて終端利益 $k(s_{N+1})$ が得られるものとする。ただし k：$[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ は<u>終端利益関数</u>である。s_1 から始まり s_{N+1} で終るこのN段過程の<u>総利益</u>は

$$\sum_{n=1}^{N}\left[g(a_n)+h(s_n-a_n)\right] + k(s_{N+1}) \tag{1}$$

である。

N段配分過程とは，資源の初期量が $s_1 > 0$ のとき，各期において事業A, Bにいかに配分すれば総利益(1)が最大になるかということである。この過程を簡単に<u>主過程</u>という。利益関数 g, h, k，割り引き率 a, b，計画期間Nが与えられたとき，主過程の問題は，初期量 s_1 に対して総利益を最大にするA, Bへの配分 $a_1, s_1-a_1, a_2, s_2-a_2, \cdots, a_N, s_N-a_N$ すなわちAへの配分 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ を決めることである。これを数学的に

(主過程)

$$\mathrm{Max} \sum_{n=1}^{N}\left[g(a_n)+h(s_n-a_n)\right] + k(s_{N+1})$$

$$\text{s.t. (i)} \quad a a_n + b(s_n - a_n) = s_{n+1} \qquad 1 \leqq n \leqq N \tag{2}$$

$$\text{(ii)} \quad 0 \leqq a_n \leqq s_n$$

で表わす。主過程に対して<u>n部分過程</u>とは，第n期に $s_n > 0$ なる“初期”量が与えられていて第n期から第N期までの事業Aへの最適配分 $a_n, a_{n+1}, \cdots, a_N$ を決める問題をいう。

(n部分過程)

$$\mathrm{Max} \sum_{m=n}^{N} \left[g(a_m) + h(s_m - a_m) \right] + k(s_{N+1})$$

$$\text{s.t. (i)} \quad a a_m + b(s_m - a_m) = s_{m+1} \qquad n \leqq m \leqq N \qquad (3)$$

$$\text{(ii)} \quad 0 \leqq a_m \leqq s_m$$

n部分過程の最大値は，初期量 s_n と才n期からN期までの期間 $(N-n+1)$ に依存して定まるから，これを $u^{N-n+1}(s_n)$ で表わす。特に，$n=N+1$ のとき，すなわち $(N+1)$ 部分過程の最大値 $u^0(s_{N+1})$ は

$$u^0(s_{N+1}) = k(s_{N+1})$$

とする。関数 $u^{N-n+1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を才n最大利益関数といい，列 $\{u^0, u^1, \cdots, u^{N-n}, u^{N-n+1}, \cdots, u^N\}$ を主過程の最大利益関数列という。$n=1$ のとき，すなわち1部分過程は主過程そのものであるから，$u^{N-n+1}(s_n)$ に $n=1$ を代入すると，主過程の最大総利益 $u^N(s_1)$ が得られる。

いわゆる動的計画法（Dynamic Programming [1]）では，次の再帰式に基づいて関数 $u^0 = k$ から始めて $u^1, u^2, \cdots, u^{N-n}, u^{N-n+1}, \cdots$ と逐次計算し，最後に u^N を計算して，これに s_1 を代入して，主過程の最大総利益 $u^N(s_1)$ が求められることになっている。

定理1（主過程の再帰式）

$$u^{N-n+1}(s_n) = \underset{0 \leqq a_n \leqq s_n}{\mathrm{Max}} \left[g(a_n) + h(s_n - a_n) + u^{N-n}(a a_n + b(s_n - a_n)) \right] \quad s_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$$

$$u^0(s_{N+1}) = k(s_{N+1}) \qquad s_{N+1} \geqq 0 \tag{4}$$

この再帰式は才n,$(n+1)$最大利益関数 u^{N-n+1}, u^{N-n} の間の関係を述べたものであるが,これは次に述べるベルマン(R. Bellman [1])の最適性の原理に基づいても証明される。

最適性の原理:最適政策は「最初の状態(資源量)とその決定(配分)が何であれ,最適政策の残りの決定列はその結果生じる状態に関して最適政策を構成しなければならない」という性質をもつ。

さて意志決定者は才n期ではs_nに応じて事業A,Bへの配分量a_n, $s_n - a_n$を決める必要がある。これは各$s_n \geqq 0$に対して $0 \leqq \pi_n(s_n) \leqq s_n$ を満たす関数 $\pi_n : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ で表わされる。これを才n配分関数という。このπ_nは,才n期首にs_nだけあるとき,Aに $a_n = \pi_n(s_n)$ だけ配分し,残り $s_n - a_n = s_n - \pi_n(s_n)$ をBに配分することを意味する。配分関数列 $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N\}$ を主過程の配分政策という。配分政策は,いついかなる量があるかに応じてA(したがってA,B両方)への配分量を決めるものである。配分政策πが

定まれば，初期資源の量s_1とともに，以下N期末までの資源の量ならびにA, Bへの配分量

$$
\begin{aligned}
&s_1 \longrightarrow a_1 = \pi_1(s_1),\ s_1 - a_1 = s_1 - \pi_1(s_1) \longrightarrow a a_1 + b(s_1 - a_1) = s_2 \longrightarrow \\
&a_2 = \pi_2(s_2),\ s_2 - a_2 = s_2 - \pi_2(s_2) \longrightarrow a a_2 + b(s_2 - a_2) = s_3 \longrightarrow \qquad (5)\\
&\cdots \longrightarrow s_N \longrightarrow a_N = \pi_N(s_N),\ s_N - a_N = s_N - \pi_N(s_N) \longrightarrow a a_N + b(s_N - a_N) = s_{N+1}
\end{aligned}
$$

が一意に決定する。特に各$s_1 \geqq 0$に対して効用関数(1)を最大にする配分量を与える配分政策を<u>最適配分政策</u>という。各nと各s_nに対して(4)のMaxに到達するa_nを$\pi_n^*(s_n)$とすれば，$\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_N^*\}$が最適配分政策になる。

以上より，主過程の問題を解くにはその最大利益関数列$\{u^0, u^1, \cdots, u^N\}$と最適配分政策$\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_N^*\}$を求めればよいことがわかる。このとき求める最大総利益は$u^N(s_1)$で，π^*から(5)によって各期の資源の量ならびに最適配分量が定まる。

次に，<u>逆過程</u>を導入するために利益関数$g, h, k : [0, \infty) \to [0, \infty)$に仮定

(a) $g(0) = h(0) = k(0) = 0$, g, h, kは連続関数である。

(b) g, h, kは狭義増加関数である。

(c) $g(\infty) = h(\infty) = k(\infty) = \infty$ すなわち $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} k(x) = \infty$ である。

(d) g, h, kは凸関数である。

(e) g, h, k は 凹 関数である。

を設ける。次の定理が示すように g, h, k の性質はそのまま最大利益関数列 $\{u^0, u^1, \cdots, u^N\}$ にも伝播している。

定理2 (i) 仮定 (a) のもとでは，$\{u^n\}_0^N$ は 0 で 値 0 をもち，連続である。

(ii) 仮定 (a), (b) のもとでは，$\{u^n\}_0^N$ は 0 で 値 0 をもち，連続かつ狭義増加関数である。

(iii) 仮定 (a), (b), (c) のもとでは，$\{u^n\}_0^N$ は 0 で 値 0 をもち，連続かつ狭義増加関数で，∞ で ∞ の"値"をとる。

(iv) 仮定 (a), (d) のもとでは，$\{u^n\}_0^N$ は 0 で 値 0 をもち，連続かつ 凸 関数である。このとき，最適配分政策 π^* の第 n 配分関数 π_n^* は $\pi_n^*(s_n) = 0$ または s_n である。

(v) 仮定 (a), (e) のもとでは，$\{u^n\}_0^N$ は 0 で 値 0 をもち，連続かつ 凹 関数である。

これらの結果の経済的解釈は自明であろう。われわれは結果 (iii) に着目する。以下，仮定

(a), (b), (c) 利益関数 g, h, k は $g(0) = h(0) = k(0) = 0$，連続狭義増加かつ $g(\infty) = h(\infty) = k(\infty) = \infty$ である。 (6)

のもとで議論を進める。したがって，仮定 (a), (b), (c) より，

g, h, k にはもちろん，定理２(iii)より最大利益関数列 u^0, $u^1, \cdots, u^N$ にも逆関数 g^{-1}, h^{-1}, k^{-1}, $(u^0)^{-1}$, $(u^1)^{-1}$, $\cdots$, $(u^N)^{-1}$ が存在して g, h, k, u^0, u^1, $\cdots$, u^N と同じ性質(6)をもつことに注意する。

3. 再帰型逆配分過程

才n期における資源の量 s_n のうち A に a_n，B に $(s_n - a_n)$ だけ配分すると，才$(n+1)$期の量 s_{n+1} との間には関係式

$$s_{n+1} = a\,a_n + b(s_n - a_n) \tag{7}$$

すなわち

$$s_n = -\frac{a-b}{b}a_n + \frac{1}{b}s_{n+1} \tag{7'}$$

が成り立つ*。他方，才n期に s_n あったとき，それ以後 A に a_n, a_{n+1}, $\cdots$, a_N（したがって B には $s_n - a_n$, $s_{n+1} - a_{n+1}$, $\cdots$, $s_N - a_N$）を配分して，才n期から N 期末までに得られる総利益を r_n とする。すなわち

$$r_n = \sum_{m=n}^{N}\left[\,g(a_m) + h(s_m - a_m)\right] + k(s_{N+1}) \tag{8}$$

とする。このとき，r_{n+1} は s_{n+1} なる量を配分していって$(n+1)$期から得られる総利益だから，関係式

$$r_n = g(a_n) + h(s_n - a_n) + r_{n+1} \tag{9}$$

すなわち

* ただし $0 < b \leqq 1$ とする。

$$r_{n+1} = r_n - g(a_n) - h(s_n - a_n) \tag{9'}$$

が得られる。ただし r_{N+1} は N期末の量 s_{N+1} の終端利益

$$r_{N+1} = k(s_{N+1}) \tag{10}$$

である。これは逆関数

$$s_{N+1} = k^{-1}(r_{N+1}) \tag{10'}$$

で表わされる。(7) は相隣る期での資源の推移を表わしている。これを状態変換という。これに対して総利益の変化を示している (9′) を利得変換という。

さて逆過程を導入しよう。第1期からのすなわち全期間の総利益 $r_1 > 0$ が与えられたとき，$a_1, a_2, \cdots, a_N$ を選んで第1期に備えておくべき資源の量 s_1 を最小にする問題が考えられる。ただし途中からの総利益 $r_2, r_3, \cdots, r_{N+1}$ は利得変換 (9′) で決まるが，分配される資源量 s_n は r_n から $(u^{N-n+1})^{-1}(r_n) = s_n$ として一意に定まり選択の余地はないものとする。このとき s_1 は (7′), (10′) より $a_1, a_2, \cdots, a_N, r_{N+1}$ で次のように再帰的に表わされる。

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{a-b}{b} a_1 + \frac{1}{b} s_2 \\ &= -\frac{a-b}{b} a_1 + \frac{1}{b}\left(-\frac{a-b}{b} a_2 + \frac{1}{b} s_3\right) \\ &= -\frac{a-b}{b} a_1 - \frac{a-b}{b^2} a_2 + \frac{1}{b^2} s_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{11}$$

$$= -\frac{a-b}{b}a_1 - \frac{a-b}{b^2}a_2 - \cdots - \frac{a-b}{b^N}a_N + \frac{1}{b^N}s_{N+1}$$

$$= -\frac{a-b}{b}a_1 - \frac{a-b}{b^2}a_2 - \cdots - \frac{a-b}{b^N}a_N + \frac{1}{b^N}k^{-1}(r_{N+1})$$

したがって次の再帰型逆配分過程が得られる。

(再帰型逆過程)

$$\mathrm{Min}\ -\frac{a-b}{b}a_1 - \frac{a-b}{b^2}a_2 - \cdots - \frac{a-b}{b^N}a_N + \frac{1}{b^N}k^{-1}(r_{N+1}) \tag{12}$$

$$\text{s.t. (i)}\quad r_n - g(a_n) - h(s_n - a_n) = r_{n+1} \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

$$\text{(ii)}\quad 0 \leqq a_n \leqq s_n = (u^{N-n+1})^{-1}(r_n)$$

これは次のように解釈される。全期間を通じて与えられた目標総利益 r_1 を達成するためには各期に事業 A, B にいかに配分して行けば最初に準備しておくべき資源の量を最も少なくて済ますことができるかという構造になっている。第1期では $s_1 = (u^N)^{-1}(r_1)$ のうち a_1 (ただし $0 \leqq a_1 \leqq (u^N)^{-1}(r_1)$) を A に、残り $((u^N)^{-1}(r_1) - a_1)$ を B に配分すると、この期では合計利益 $g(a_1) + h((u^N)^{-1}(r_1) - a_1)$ が得られる。したがって、第2期からの総利益 r_2 は

$$r_2 = r_1 - g(a_1) - h((u^N)^{-1}(r_1) - a_1) \tag{13}$$

になればよい。これが逆過程の第1期における利得変換(i)である。第2期以降も同様である。ここで $s_1 = (u^N)^{-1}(r_1)$ に注意する必要がある。逆過程では第n期からの総利益が r_n のと

き逆関数 $(u^{N-n+1})^{-1}(r_n)=s_n$ で定まる量 s_n のうち $a_n,\ s_n-a_n$ をそれぞれ事業 A, B に配分することになっている。

逆過程に対する n 部分過程は，第 n 期からの総利益 r_n に対して事業Aに $a_n,\ a_{n+1},\ \cdots,\ a_N$ を投入するのに必要な，第 n 期首に調達しておくべき資源量を最小にする問題である。

(n 部分過程)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}\ -\frac{a-b}{b}a_n-\frac{a-b}{b^2}a_{n+1}-\cdots-\frac{a-b}{b^{N-n+1}}a_N+\frac{1}{b^{N-n+1}}k^{-1}(r_{N+1})\\ &\text{s.t. (i) } r_m-g(a_m)-h(s_m-a_m)=r_{m+1}\\ &\qquad\text{(ii) } 0\leqq a_m\leqq s_m=(u^{N-m+1})^{-1}(r_m)\end{aligned}\qquad n\leqq m\leqq N \tag{14}$$

この最小値を $v^{N-n+1}(r_n)$ とする。関数 $v^{N-n+1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を逆過程の第 n 最小資源関数といい，その列 $\{v^0,v^1,\cdots,v^N\}$ を最小資源関数列という。ただし

$$v^0(r_{N+1})=k^{-1}(r_{N+1}).$$

この逆過程に対しては，各 $r_n\geqq 0$ について

$$0\leqq\sigma_n(r_n)\leqq(u^{N-n+1})^{-1}(r_n)$$

となる関数 $\sigma_n:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を第 n 配分関数といい，その列 $\sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N\}$ を配分政策という。第1期首に目標総利益 r_1 が設定されると，配分政策 σ は以下の配分列を一意に決定する。(12) を最小にする配分列を定める配分政策を最適配分政策という。

相隣る n, $(n+1)$ 部分過程の最小資源関数 v^{N-n+1}, v^{N-n} の間

には次の漸化式が成立する。

定理３（再帰型逆過程の再帰式）

$$v^{N-n+1}(r_n)=\underset{0\leqq a_n\leqq s_n=(u^{N-n+1})^{-1}(r_n)}{\mathrm{Min}}\left[-\frac{a-b}{b}a_n+\frac{1}{b}v^{N-n}(r_n-g(a_n)-h(s_n-a_n))\right]$$

$$r_n\geqq 0 \qquad 1\leqq n\leqq N \qquad (15)$$

$$v^0(r_{N+1})=k^{-1}(r_{N+1}) \qquad r_{N+1}\geqq 0$$

各 n, 各 r_n に対して (15) の Min に到達する a_n を $\hat{\sigma}_n(r_n)$ で表わすと, 配分政策 $\hat{\sigma}=\{\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\cdots,\hat{\sigma}_N\}$ は最適配分政策になっている。

逆理論は主・逆両過程の関係, 特に最大利益関数列・最小資源関数列, 最適配分政策間の対応関係を追求することにある。その対応はいわゆる逆対応といわれているもので, 次の逆定理に要約されている。

定理４（逆定理）(i) 主過程が, 0で値0, ∞で値∞をもつ連続・狭義増加な最大利益関数列 $\{u^0,u^1,\cdots,u^N\}$ と, 最適配分政策 $\pi^*=\{\pi_1^*,\pi_2^*,\cdots,\pi_N^*\}$ をもつならば, 逆過程は, 0で値0, ∞で値∞をもつ連続・狭義増加な最小資源関数列 $\{(u^0)^{-1},(u^1)^{-1},\cdots,(u^N)^{-1}\}$ と, 最適配分政策 $\pi^*\circ u^{-1}=\{\pi_1^*\circ(u^N)^{-1},\pi_2^*\circ(u^{N-1})^{-1},\cdots,\pi_N^*\circ(u^1)^{-1}\}$ をもつ。

(ii) 主過程が, 0で値0, ∞で値∞をもつ連続・狭義増加な最大利益関数列 $\{u^0,u^1,\cdots,u^N\}$ と, 最適配分政策 $\pi^*=\{\pi_1^*,\pi_2^*,\cdots,\pi_N^*\}$ をもつとする。このとき, 逆過程が, 0で値0, ∞で値∞をもつ連続・狭義増加な最小資源関数列 $\{v^0,v^1,\cdots,v^N\}$ と, 最適配分政

$\hat{\sigma}=\{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_N\}$ をもつならば,

$$(v^{N-n+1})^{-1} = u^{N-n+1} \qquad 1\leq n\leq N+1$$

で, 配分政策 $\hat{\sigma}\circ v^{-1}=\{\hat{\sigma}_1\circ(v^N)^{-1}, \hat{\sigma}_2\circ(v^{N-1})^{-1}, \cdots, \hat{\sigma}_N\circ(v^1)^{-1}\}$ は主過程の最適配分政策である。ただし $\circ$ は関数の合成を表わす。

逆定理より両過程の最適関数列と最適配分政策には逆関係

$$(u^{N-n+1})^{-1} = v^{N-n+1}, \quad (v^{N-n+1})^{-1} = u^{N-n+1} \qquad 1\leq n\leq N+1$$
$$\hat{\sigma}_n = \pi_n^*\circ(u^{N-n+1})^{-1}, \quad \pi_n^* = \hat{\sigma}_n\circ(v^{N-n+1}) \qquad 1\leq n\leq N \tag{16}$$

が成立していることがわかる。すなわち最大利益関数と最小資源関数はお互に逆関数の関係にあるばかりでなく, お互の最適配分関数にも(16)で示されるように極めて一意的な逆対応が生じている。

4. 加法型逆配分過程

才n期における資源の量s_nは A, B にそれぞれ a_n, s_n-a_n を投入すると, 才$(n+1)$期には

$$aa_n+b(s_n-a_n)=s_{n+1} \tag{7}$$

になる。この差

$$\begin{aligned} s_n-s_{n+1} &= a_n+(s_n-a_n)-aa_n-b(s_n-a_n) \\ &=(1-a)a_n+(1-b)(s_n-a_n) \\ &=(1-b)s_n+(b-a)a_n \end{aligned} \tag{7''}$$

は第n期の活動または生産によって利益 $g(a_n)+h(s_n-a_n)$ を生み出すためにのみ消費された資源量である。すなわち s_n のうちAに投入された a_n は $(1-a)a_n$ を用いて利益 $g(a_n)$ をあげ，残り aa_n は次期の資源として活用される。Bに投入された (s_n-a_n) もそのうち $(1-b)(s_n-a_n)$ を消費して利益 $g(s_n-a_n)$ をあげ，残りの $b(s_n-a_n)$ は次期に廻される。各期に消費された資源の総計は (7″) を $n=1$ から $n=N$ まで加えて

$$\sum_{n=1}^{N}(s_n-s_{n+1})=\sum_{n=1}^{N}\left[(1-a)a_n+(1-b)(s_n-a_n)\right]$$

すなわち

$$s_1-s_{N+1}=\sum_{n=1}^{N}\left[(1-a)a_n+(1-b)(s_n-a_n)\right] \tag{17}$$

で表わされる。s_{N+1} は最終N期末の残高資源量である。これは (10′) でも表わされている。

$$s_{N+1}=k^{-1}(r_{N+1}) \tag{10'}$$

したがって各期に消費された資源の総計とN期末の残高との和すなわち総資源量は (17), (10′) より

$$s_1=\sum_{n=1}^{N}\left[(1-a)a_n+(1-b)(s_n-a_n)\right]+k^{-1}(r_{N+1}) \tag{18}$$

になる。(11) の代りに (18) を目的関数にする逆過程

(加法型逆過程)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}\ \sum_{n=1}^{N}\left[(1-a)a_n+(1-b)(s_n-a_n)\right]+k^{-1}(r_{N+1})\\ &\text{s.t. (i) } r_n-g(a_n)-h(s_n-a_n)=r_{n+1}\\ &\qquad\ \text{(ii) } 0\leqq a_n\leqq s_n=(u^{N-n+1})^{-1}(r_n)\end{aligned}\qquad 1\leqq n\leqq N \tag{19}$$

を加法型逆過程という。(7″)よりこの目的関数は

$$\sum_{n=1}^{N}\left[(1-b)s_n + (b-a)a_n\right] + k^{-1}(r_{N+1})$$

とも表わされる。再帰型・加法型の両逆過程とも総利益 r_1 を一定に確保していて消費される総資源を最小にする問題であるが，加法型逆過程は，その目的関数(18)の加法性故，再帰型よりも総資源の意味をより直感的に表わしているといえる。加法型逆過程については主過程との間に

定理5（加法型逆過程の再帰式）

$$v^{N-n+1}(r_n) = \underset{0\leq a_n\leq s_n=(u^{N-n+1})^{-1}(r_n)}{\mathrm{Min}}\left[(1-a)a_n+(1-b)(s_n-a_n)+v^{N-n}(r_n-g(a_n)-h(s_n-a_n))\right] \quad r_n\geq 0 \quad 1\leq n\leq N \quad (20)$$

$$v^0(r_{N+1}) = k^{-1}(r_{N+1}) \qquad r_{N+1}\geq 0$$

が成立する。両逆過程間には

定理6　再帰型逆過程と加法型逆過程は，その目的関数型は異なるが，最小資源関数列，最適配分政策は等しい。

が成立し，その最適構造は一致している。しかも加法型についても逆定理

定理7（主過程と加法型逆過程との間の逆定理）主過程と加法型逆過程との間には，主過程と再帰型逆過程との間の逆

定理（定理4）がそのまゝ成り立つ.

が成り立つ。

5. ベルマン型逆配分過程

前述の両逆過程における才n期の資源量s_nは，才n期からの総利益r_nと才n最大利益関数$u^{N-n+1}(\cdot)$の逆関数によって一意的に

$$s_n=(u^{N-n+1})^{-1}(r_n) \tag{21}$$

で定まっていた。逆定理の成立は基本的には(21)を制約に課して両逆過程を定義したことに依ると考えられる。これに対してR. Bellman (1957)は主著[1]で(21)を制約から除いて次のように逆過程を導入している。もっともBellman自身逆過程という用語は用いていないが，ここでは敢えて逆過程とよぶことにする。

(ベルマン型逆過程)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\ \sum_{n=1}^{N}\left[(1-a)a_n+(1-b)(s_n-a_n)\right]+k^{-1}(r_{N+1})\\
&\text{s.t.}\ \ \text{(i)}\ \ r_n-g(a_n)-h(s_n-a_n)=r_{n+1}\\
&\qquad\ \text{(ii)}\ \ 0\leqq a_n\leqq s_n<\infty \qquad\qquad 1\leqq n\leqq N\\
&\qquad\ \text{(iii)}\ \ g(a_n)+h(s_n-a_n)\leqq r_n
\end{aligned}
\tag{22}
$$

ベルマン型逆過程では総利益$r_1>0$が与えられたとき，s_1

, a_1, s_2, a_2, …, s_N, a_N を選択して，すなわち各期における資源の量 s_n とAへの配分量 a_n（したがってBへの配分量 (s_n-a_n)）をいかに定めれば，各期に費やされる資源の総計と才N期末に残った資源との和（総資源）を最小にするかということである。この過程に対しては

定理8（ベルマン型逆過程の再帰式）

$$w^{N-n+1}(r_n) = \underset{\substack{0 \leq a_n \leq s_n < \infty \\ g(a_n)+h(s_n-a_n) \leq r_n}}{\mathrm{Min}} \left[(1-a)a_n + (1-b)(s_n-a_n) + w^{N-n}(r_n - g(a_n) - h(s_n-a_n))\right] \quad r_n \geq 0 \quad 1 \leq n \leq N \tag{23}$$

$$w^0(r_{N+1}) = k^{-1}(r_{N+1}) \qquad r_{N+1} \geq 0$$

が成立する。ここで Min は2変数 (s_n, a_n) について (22) の条件 (i) (ii) (iii) を満たす範囲で最小化することを示している。再帰型および加法型の両逆過程ではともに1変数について条件

$$\text{(i)} \quad 0 \leq a_n \leq s_n = (u^{N-n+1})^{-1}(r_n)$$

を満たす区間上で最小化している。ここでは区間の右端 s_n は選択の余地がない。したがって，ベルマン型逆過程の才n最小資源関数は他の両逆過程のそれを超えない。

$$w^0 = v^0, \quad w^1 \leq v^1, \quad w^2 \leq v^2, \quad \cdots, \quad w^N \leq v^N \tag{24}$$

すなわち，主過程とベルマン型逆過程との間には逆定理は成

立しないが，最大利益関数列と最小資源関数列との間には不等式関係

$$w^0 = (u^0)^{-1}, \quad w^1 \leqq (u^1)^{-1}, \quad w^2 \leqq (u^2)^{-1}, \quad \cdots, \quad w^N \leqq (u^N)^{-1} \qquad (25)$$

は成り立つ。両過程の最適配分政策間には(16)のような逆関係は成立しない。ただしベルマン型逆過程の第n配分関数は $\mu_n : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) \times [0, \infty)$ で表わされる。

6. ある凹配分過程

ここでは利益関数 g, h, k，割り引き率 a, b を持に

$$\begin{aligned} & g(x) = h(x) = k(x) = \sqrt{x}, \qquad x \geqq 0 \\ & a = 0, \qquad 0 < b < 1 \end{aligned} \qquad (26)$$

として前述の4過程の最適構造を b をパラメータとして具体的に求めてみよう。このとき，まず主過程

主過程

$$\begin{aligned} & \mathrm{Max} \sum_{n=1}^{N} \left[\sqrt{a_n} + \sqrt{s_n - a_n} \right] + \sqrt{s_{N+1}} \\ & \text{s.t. (i)} \quad b(s_n - a_n) = s_{n+1} \qquad 1 \leqq n \leqq N \\ & \quad\ \ \text{(ii)} \quad 0 \leqq a_n \leqq s_n \end{aligned}$$

の最大利益関数列 $\{u^0, u^1, \cdots, u^N\}$ と最適配分政策 $\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_N^*\}$ は再帰式

$$\begin{cases} u^{N-n+1}(s_n) = \underset{0 \leqq a_n \leqq s_n}{\mathrm{Max}} \left[\sqrt{a_n} + \sqrt{s_n - a_n} + u^{N-n}(b(s_n - a_n)) \right] & s_n \geqq 0 \\ & 1 \leqq n \leqq N \\ u^0(s_{N+1}) = \sqrt{s_{N+1}} & \end{cases}$$

を解いて

$$u^{N-n+1}(s_n) = p_{N-n+1}\sqrt{s_n}, \qquad \pi_n^*(s_n) = \alpha_n s_n \tag{27}$$

になる。ただし $p_0, p_1, \cdots, p_N, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ は次式で逐次決まる。

$$\begin{aligned} & p_0 = 1 \\ & p_{N-n+1} = \sqrt{1 + (1 + \sqrt{b}\, p_{N-n})^2} \end{aligned}, \qquad \alpha_n = \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{b}\, p_{N-n})^2} \tag{28}$$

したがって，(27) の $u^{N-n+1}(s_n)$ の逆関数 $(u^{N-n+1})^{-1}(r_n)$ は (28) の係数 p_{N-n+1} を用いると

$$(u^{N-n+1})^{-1}(r_n) = \frac{1}{p_{N-n+1}^2} r_n^2$$

で表わされる。次に，この関数を用いると，再帰型，加法型の両逆過程

(再帰型逆過程)

$$\mathrm{Min} \quad a_1 + \frac{1}{b} a_2 + \cdots + \frac{1}{b^{N-1}} a_N + \frac{1}{b^N} r_{N+1}^2$$

$$\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad r_n - \sqrt{a_n} - \sqrt{s_n - a_n} = r_{n+1}$$

$$\text{(ii)} \quad 0 \leqq a_n \leqq s_n = \frac{1}{p_{N-n+1}^2} r_n \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

(加法型逆過程)

$$\mathrm{Min} \sum_{n=1}^{N} \left[a_n + (1-b)(s_n - a_n) \right] + r_{N+1}^2$$

$$\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad r_n - \sqrt{a_n} - \sqrt{s_n - a_n} = r_{n+1}$$

$$\text{(ii)} \quad 0 \leqq a_n \leqq s_n = \frac{1}{p_{N-n+1}^2} r_n^2 \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

が得られる。この最小資源関数列 $\{u^0, u^1, \cdots, u^N\}$ と最適配分政策 $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \cdots, \hat{\sigma}_N\}$ はともに等しく

$$v^{N-n+1}(r_n) = q_{N-n+1} r_n^2, \qquad \hat{\sigma}_n(r_n) = \beta_n r_n$$

になる。ただし

$$q_0 = 1$$

$$q_{N-n+1} = \frac{1}{1 + \left(1 + \sqrt{\frac{b}{q_{N-n}}}\right)^2} \qquad \beta_n = \frac{1}{1 + \left(1 + \sqrt{\frac{b}{q_{N-n}}}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{p_{N-n+1}}\right)^2 \tag{29}$$

主・逆の両過程間には逆関係は (28), (29) の係数間の関係

$$q_{N-n+1} = \frac{1}{p_{N-n+1}^2}, \qquad \beta_n = q_{N-n+1} \alpha_n$$

で表わされる。

他方，ベルマン型逆過程は，最大利益関数列 $\{u^0, u^1, \cdots, u^N\}$ に無関係に，したがって係数 $\{p_0, p_1, \cdots, p_N\}$ にも無関係に

(ベルマン型逆過程)

$$\mathrm{Min} \sum_{n=1}^{N} \left[a_n + (1-b)(s_n - a_n) \right] + r_{N+1}^2$$

$$\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad r_n - \sqrt{a_n} - \sqrt{s_n - a_n} = r_{n+1}$$

$$\text{(ii)} \quad 0 \leqq a_n \leqq s_n < \infty \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

$$\text{(iii)} \quad \sqrt{a_n} + \sqrt{s_n - a_n} \leqq r_n$$

になるが，その再帰式

$$
\begin{cases}
w^{N-n+1}(r_n) = \displaystyle\min_{\substack{0 \leqq a_n \leqq s_n < \infty \\ \sqrt{a_n}+\sqrt{s_n-a_n} \leqq r_n}} \left[a_n + (1-b)(s_n - a_n) + w^{N-n}\left(r_n - \sqrt{a_n} - \sqrt{s_n - a_n}\right) \right] & \begin{array}{l} r_n \geqq 0 \\ 1 \leqq n \leqq N \end{array} \\
w^0(r_{N+1}) = r_{N+1}^2
\end{cases}
$$

を解くと，第n最小資源関数，第n最適配分関数はそれぞれ

$$
w^{N-n+1}(r_n) = \tilde{q}_{N-n+1}\, r_n^2 , \qquad \hat{\mu}_n(r_n) = (\varepsilon_n r_n^2,\ \delta_n r_n^2)
$$

になる。ただし

$$
\tilde{q}_0 = 1 \qquad \varepsilon_n = \left(\frac{(1-b)\,\tilde{q}_{N-n}}{(1-b)+(2-b)\,\tilde{q}_{N-n}} \right)^2
$$

$$
\tilde{q}_{N-n+1} = \frac{(1-b)\,\tilde{q}_{N-n}}{(1-b)+(2-b)\,\tilde{q}_{N-n}} \qquad \delta_n = \frac{(1+(1-b)^2)\,\tilde{q}_{N-n}^2}{((1-b)+(2-b)\,\tilde{q}_{N-n})^2}
$$

係数列 $\{p_n\}_0^N$，$\{q_n\}_0^N$，$\{\tilde{q}_n\}_0^N$ の行動を見てみると次のグラフのようになる。

(主過程) $u^N(s_1) = p_N \sqrt{s_1}$

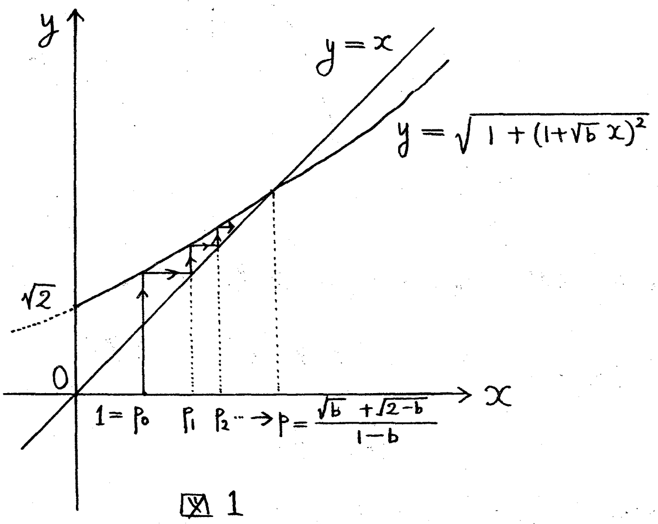

図1

(再帰型・加法型逆過程)

$v^N(r_1) = q_N r_1^2$

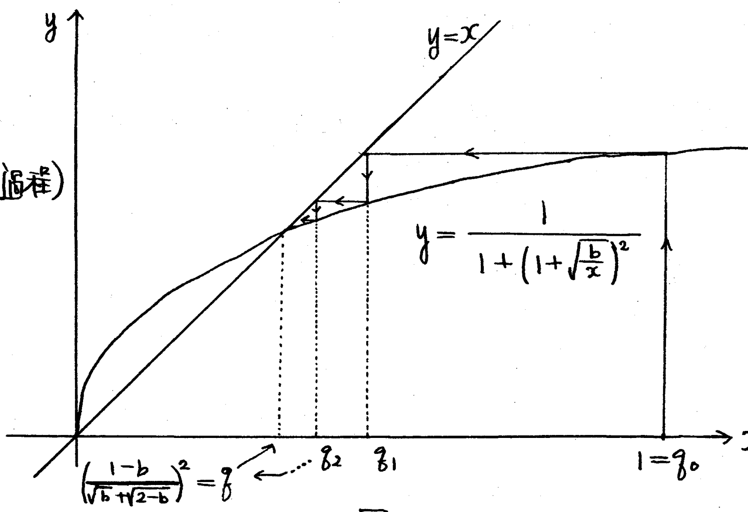

図 2

(ベルマン型逆過程)

$w^N(r_1) = \tilde{q}_N r_1^2$

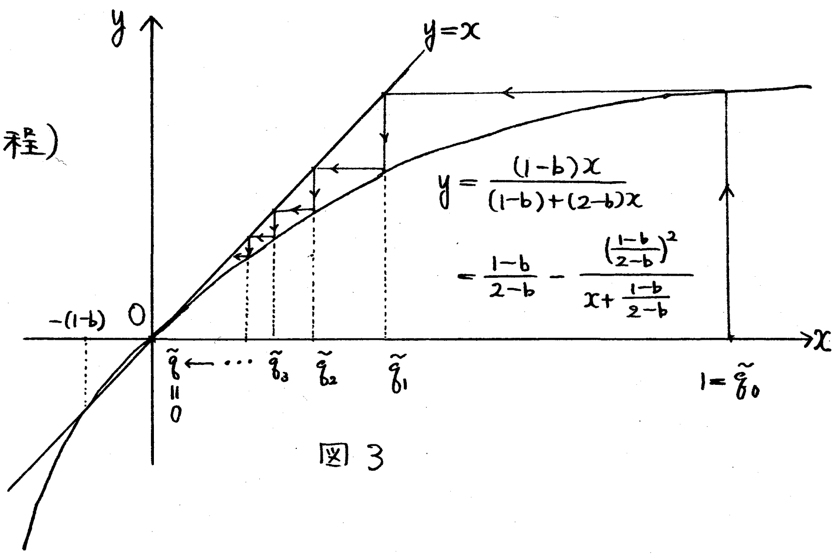

図 3

N段過程の最大利益関数 $u^N(s_1) = p_N\sqrt{s_1}$，最小資源関数 $v^N(r_1) = q_N r_1^2$, $w^N(r_1) = \tilde{q}_N r_1^2$ の係数 $p_N, q_N, \tilde{q}_N$ については

$$q_N = \frac{1}{p_N^2}, \quad q_N > \tilde{q}_N \quad (N \geqq 2)$$

が成立している(図1,2,3)。

特に $N \to \infty$ のとき，すなわち無限段過程に対しては，主過程，再帰型および加法型の両逆過程ではその係数はそれぞれ正の値 p, q に収束している（図1,2）．

$$p_N \longrightarrow p = \frac{\sqrt{b}+\sqrt{2-b}}{1-b} > 0 \quad (N \to \infty)$$

$$q_N \longrightarrow q = \left(\frac{1-b}{\sqrt{b}+\sqrt{2-b}}\right)^2 > 0 \quad (N \to \infty).$$

このとき $q = \frac{1}{p^2}$ である。しかしベルマン型逆過程の係数 $\{\tilde{q}_N\}$ は 0 に収束する（図 3)。

$$\tilde{q}_N \longrightarrow \tilde{q} = 0 \qquad (N \to \infty).$$

参考文献

1. R.BELLMAN, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1957.
2. S. IWAMOTO, An inverse control process and an inverse allocation process, J. Operations Res. Soc. Japan 24(1981), 1-18.
3. S. IWAMOTO, Inversion of dynamic programs and its applications to allocation processes, J. Math. Anal. Appl. 81(1981), 474-496.
4. S.IWAMOTO, A new inversion of continuous-time optimal control processes, J. Math. Anal. Appl. 82(1981), 49-65.