数理解析研究所講究録
462 巻 1982 年 104-122

圧縮性粘性流体の方程式に対するエネルギー法

京大　工　松村昭孝
奈良女大　理　川島秀一
奈良女大　理　岡田真理

1．序

流体の運動は圧縮性，粘性及び熱伝導性すべてを考慮した場合には，次の五つの保存則から成る方程式系で記述される。

$$
(1.1)\quad
\begin{cases}
\rho_t + (\rho u^j)_{x_j} = 0, \\
(\rho u^i)_t + (\rho u^i u^j + p\delta^{ij})_{x_j} \\
\qquad = \{\mu(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}) + \mu' u^k_{x_k}\delta^{ij}\}_{x_j}, \quad i=1,2,3, \\
\{\rho(e+\frac{|u|^2}{2})\}_t + \{\rho u^j(e+\frac{|u|^2}{2}) + pu^j\}_{x_j} \\
\qquad = \{\kappa\theta_{x_j} + \mu u^k(u^j_{x_k} + u^k_{x_j}) + \mu' u^j u^k_{x_k}\}_{x_j},
\end{cases}
$$

ここで ρ：質量密度，$u=(u^1,u^2,u^3)$：速度，θ：絶対温度，p：圧力，e：内部エネルギー，μ：粘性係数，μ'：第二粘性係数，κ：熱伝導係数，δ^{ij}：Kronecker のデルタ。添字はそれぞれ t, $x=(x_1,x_2,x_3)$ に関する偏微分を表わす。系 (1.1) 第一式は質量の保存，第二，三，四式は運動量の保存，

第五式はエネルギーの保存をそれぞれ表わしている。系(1.1)の未知関数として $\rho>0$, $u\in\mathbb{R}^3$, $\theta>0$ を取れば，p 及び e は流体の状態方程式によって $\rho>0$ と $\theta>0$ の既知関数として与えられる。ここでは一般の状態方程式

(1.2) $\quad p=p(\rho,\theta),\quad e=e(\rho,\theta),\quad \partial p/\partial\rho>0,\quad \partial e/\partial\theta>0$

を仮定する。また熱力学の第一法則

(1.3) $\quad de=\theta dS-p\,dV$

も仮定する。ここで S：エントロピー，$V=1/\rho$：単位質量当りの体積である。最後に粘性，熱伝導係数 μ,μ',κ についても $\rho>0$ と $\theta>0$ の既知関数であることを仮定しておく。

系(1.1)に対する初期値(一境界値)問題は，粘性，熱伝導性すべてを考慮した

$(1.4)_1\quad \mu>0,\quad \nu\equiv 2\mu+\mu'>0,\quad \kappa>0$

の場合には，Nash [17]，板谷 [2], [3]，谷 [20], [21] により Hölder 空間で，Vol'pert−Hudjaev [22] により Sobolev 空間で，いずれも t について局所的に解かれている。[22] の（初期値問題の局所解の存在についての）方法は，粘性又は熱伝導性がなくても，即ち

$(1.4)_2\quad \mu=\nu=0,\quad \kappa>0$

$(1.4)_3\quad \mu>0,\ \nu>0\quad \kappa=0$

$(1.4)_4\quad \mu=\nu=\kappa=0$

の場合にも有効であると思われる。尚$(1.4)_4$の場合には，加藤[7]の結果もある。以上はいずれも滑らかな局所解であるが，最近 Majda [13] により，$(1.4)_4$の場合に，ある弱解のtに関する局所存在が示された。

系(1.1)の大域解に関しては局所解ほどにはわかっていない。最近松村－西田[15]，[16] 及び松村[14]により，$(1.4)_1$の場合に初期値が小さければ，Sobolev空間で大域解が存在することが示されたが，これが空間三次元の系(1.1)に対して現在まで得られている唯一の結果であろう。空間一次元に限れば，$(1.4)_1$及び$(1.4)_4$の場合がある程度調べられている。$(1.4)_1$の場合の滑らかな大域解の存在については Kanel' [6]，Kazhikhov－Shelukhin [9]，板倉[4]，川島－西田[8]，岡田－川島[19]，$(1.4)_4$の場合一般に滑らかな大域解が存在し得ないことについては，Lax [10]，John [5]，Liu [12]，$(1.4)_4$の場合に有界変動関数の空間に属する弱解が大域的に存在することについては，Glimm [1]，西田[18]，Liu [11] 等参照。

本小論では，はじめに松村[14]に従って，空間三次元の系(1.1)で$(1.4)_1$の場合に，小さい初期値に対して滑らかな大域解が存在し，$t \to \infty$で定数平衡解に漸近することを述べる。次に空間一次元に限って$(1.4)_1$，$(1.4)_2$，$(1.4)_3$の各場合を考える。そしていずれの場合も，初期値が小さければ滑らかな大域解

が存在することを示す（川島－岡田）。

2．空間三次元の場合の結果

系(1.1)に対して初期値問題を考える。$\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$ を任意に固定した正定数とする。$t=0$ で初期値

(2.1) $\quad (\rho, u, \theta)(0, x) = (\rho_0, u_0, \theta_0)(x)$

を定数状態 $(\bar{\rho}, 0, \bar{\theta})$ の近くに与えて，解 $(\rho, u, \theta)(t, x)$ を (ρ, θ) の値が $\mathcal{O} = \{k_0^{-1} < \rho/\bar{\rho},\ \theta/\bar{\theta} < k_0\}$ に入るように求める。ここで $k_0 > 1$ は固定した定数である。解の評価は Sobolev 空間で与えられるため，Sobolev の補題を用いて 正数 δ_0 を

(2.2) $\quad \|f\|_2 < \delta_0$ ならば $|f|_0 < (1-k_0^{-1}) \cdot \min\{\bar{\rho}, \bar{\theta}\}$

となるように定める。この時 $\|(\rho-\bar{\rho}, u, \theta-\bar{\theta})(t)\|_2 < \delta_0$ なる解を求めることになる。ここで $\|\cdot\|_\ell$, $|\cdot|_0$ はそれぞれ指数 ℓ の Sobolev 空間 $H^\ell = H^\ell(\mathbb{R}^3)$，及び有界連続関数の空間 $\mathcal{B}^0 = \mathcal{B}^0(\mathbb{R}^3)$ のノルムである。

$(1.4)_1$ の場合の解の空間は $T>0$, $\ell = 2, 3, \cdots$ として

(2.3) $\quad X_1^\ell(T) = \{(\rho, u, \theta)(t, x);\ \rho-\bar{\rho} \in Y^\ell(T),$
$\qquad\qquad\qquad (u, \theta-\bar{\theta}) \in Z^\ell(T)\}$

で与えられる。但し $Y^\ell(T) = \{v(t,x);\ v \in C^0(0,T; H^\ell) \cap C^1(0,T; H^{\ell-1}),\ D_x v \in L^2(0,T; H^{\ell-1})\}$, $Z^\ell(T) = \{v(t,x);\ v \in C^0(0,T; H^\ell) \cap C^1(0,T; H^{\ell-2}),\ D_x v \in L^2(0,T; H^\ell)\}$ である。

次の結果が成り立つ。

<u>定理1</u>（松村）　(1.2), (1.3) を仮定する。$(1.4)_1$ 即ち $\mu>0$, $\nu>0$, $\kappa>0$ の場合を考える。初期値は $(\rho_0-\bar{\rho},\ u_0,\ \theta_0-\bar{\theta})\in H^3$ とする。この時、定数 $\delta_1>0$ $(\delta_1\le\delta_0)$ 及び $C_1>0$ が在って、もし初期値が $E(0)\equiv\|\rho_0-\bar{\rho},\ u_0,\ \theta_0-\bar{\theta}\|_3<\delta_1$ を満たすならば、初期値問題 (1.1), (2.1) は一意に大域解 $(\rho,\ u,\ \theta)\in X_1^3(\infty)$ を持つ。そして次が成り立つ。

$$(2.4)\qquad |(\rho-\bar{\rho},\ u,\ \theta-\bar{\theta})(t)|_1\le C_1E(0)(1+t)^{-3/4}$$

ここで $|\cdot|_1$ は一階微分までが有界連続である関数空間 $\mathcal{B}^1=\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^3)$ のノルムである。

証明の概略を第四節で述べるが、その方法はポテンシャル外力がある場合や、初期－境界値問題に対しても適用できる。[16] 参照。

<u>3. 空間一次元の場合の結果</u>

流体の運動が x_2, x_3 軸方向に関して一様であるとすれば、系 (1.1) は次の様に見易い形になる。

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x=0, \\ (\rho u)_t+(\rho u^2+p)_x=(\nu u_x)_x, \\ \{\rho(e+\frac{u^2}{2})\}_t+\{\rho u(e+\frac{u^2}{2})+pu\}_x=(\kappa\theta_x+\nu uu_x)_x \end{cases}$$

ここで x_1, u^1 をそれぞれ x, u と言いた。また $\nu=2\mu+\mu'$ であ

る。今 Euler 座標 (t,x) のかわりに，流体と共に動く座標系（Lagrange 座標）(t',x') で系 (3.1) を書き換えよう。(t',x') は

$$t'=t,\qquad x'=\int_0^x \rho(t,\xi)\,d\xi-\int_0^t \rho(\tau,0)u(\tau,0)\,d\tau$$

で与えられる。変換式は (3.1) 第一式を用いれば，$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}-\rho u\frac{\partial}{\partial x'}$，$\frac{\partial}{\partial x}=\rho\frac{\partial}{\partial x'}$ となる。これで (3.1) を書き換え，(t',x') を改めて (t,x) と書けば，結局次が得られる。

$$(3.2)\quad\begin{cases}\left(\frac{1}{\rho}\right)_t-u_x=0\\ u_t+p_x=(\nu\rho u_x)_x\\ \left(e+\frac{u^2}{2}\right)_t+(pu)_x=(\kappa\rho\theta_x+\nu\rho u u_x)_x\end{cases}$$

系 (3.2) に対する初期値問題を考える。解の空間は $(1.4)_1$ の場合には前と同じく，(2.3) で与えられる。$(1.4)_2$ の場合は

$$(3.3)\quad X_2^{\ell}(T)=\{(\rho,u,\theta)(t,x);\ (\rho-\bar\rho,u)\in Y^{\ell}(T),\ \theta-\bar\theta\in Z^{\ell}(T)\}$$

で与えられる。$(1.4)_3$ の場合には少し変則的であるが，

$$(3.4)\quad X_3^{\ell}(T)=\{(\rho,u,\theta)(t,x);\ \rho>0,\ \theta>0,\ (\rho-\bar\rho,\theta-\bar\theta)\in C^0(0,T;H^{\ell})\cap C^1(0,T;H^{\ell-1}),\ D_x p(\rho,\theta)\in L^2(0,T;H^{\ell-1}),\ u\in Z^{\ell}(T)\}$$

を用いる。この時次が成立する。

<u>定理2</u>（川島－岡田）　(1.2), (1.3) を仮定する。初期値は $(\rho_0-\bar\rho,u_0,\theta_0-\bar\theta)\in H^2$ とする。

(i) $(1.4)_1$ 即ち $\nu>0,\ \kappa>0$ の場合，定数 $\delta_2>0$ $(\delta_2\le\delta_0)$ が存

在して，もし初期値が $E(0) \equiv \| \rho_0 - \bar{\rho}, u_0, \theta_0 - \bar{\theta} \|_2 < \delta_2$ を満たすならば，初期値問題 (3.2), (2.1) は一意に大域解 $(\rho, u, \theta) \in X_1^2(\infty)$ を持つ。そして次が成立する。

$$(3.5)_1 \qquad \lim_{t \to \infty} |(\rho - \bar{\rho}, u, \theta - \bar{\theta})(t)|_1 = 0$$

(ii) $(1.4)_2$ 即ち $\nu = 0$, $\kappa > 0$ の場合，更に条件 $p_\theta(\bar{\rho}, \bar{\theta}) \neq 0$ を仮定すれば (i) と同様 $E(0) < \delta_2$ ならば，大域解 $(\rho, u, \theta) \in X_2^2(\infty)$ が存在して次を満たす。

$$(3.5)_2 \qquad \lim_{t \to \infty} \left(|(\rho - \bar{\rho}, u)(t)|_0 + |(\theta - \bar{\theta})(t)|_1 \right) = 0$$

(iii) $(1.4)_3$ 即ち $\nu > 0$ $\kappa = 0$ の場合，$E(0) < \delta_2$ ならば，大域解 $(\rho, u, \theta) \in X_3^2(\infty)$ が存在して次を満たす。

$$(3.5)_3 \qquad \lim_{t \to \infty} |(p(\rho, \theta) - p(\bar{\rho}, \bar{\theta}), u)(t)|_1 = 0$$

解は $t \to \infty$ で定数状態へ減衰するわけだが，三次元の様にその減衰率が $t^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ の形になるかどうかは，全くわからない。また (iii) の場合に $(\rho, \theta)(t) \to (\bar{\rho}, \bar{\theta})$ が成り立つかどうかもわからない。証明は五節の準備の後，六節で示される。

4. 定理 1 の証明

大域解の存在は，局所解を a. priori 評価により t について接続する方法を用いて示される。ここではその a. priori 評価についてのみ述べ，局所解や解の延長については [14] を参照していただくことにする。$(\rho, u, \theta) \in X_1^3(T)$ に対して $E(T)$ を次で定義する。

$$(4.1)\qquad E(T)^2 = \sup_{0\le t\le T} \|(\rho-\bar\rho,\ u,\ \theta-\bar\theta)(t)\|_3^2 + \int_0^T \|D_x\rho(t)\|_2^2 + \|D_x(u,\theta)(t)\|_3^2\ d\tau\ .$$

この時 a. priori 評価は次で与えられる。

<u>補題1</u>（a. priori 評価）　ある $T>0$ に対して $(\rho,u,\theta)\in X_1^3(T)$ が初期値問題 (1.1), (2.1) の $(1.4)_1$ の場合の解で，$E(T)<\delta_0$ を満たすとする。この時ある定数 $\delta_3>0$（$\delta_3\le\delta_0$）及び $C_2>1$ が在って，もし $E(T)<\delta_3$ であれば，実は a. priori 評価 $E(T)\le C_2E(0)$ が成り立つ。ここで δ_3, C_2 はもちろん T には依存しない。

証明.　(1.3) より $e_\rho=(p-\theta p_\theta)/\rho^2$（但し $e_\rho=\partial e/\partial\rho$ 等）が得られるので，これを用いて系 (1.1) を (ρ,u,θ) について解いた形に書き換える。それを更に定数解 $(\bar\rho,0,\bar\theta)$ で線形化し，非線形部分を右辺に集めた形で書くと，次を得る。

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \rho_t+\bar\rho u^j_{x_j}=f^0\\ u^i_t+\dfrac{\bar p_\rho}{\bar\rho}\rho_{x_i}+\dfrac{\bar p_\theta}{\bar\rho}\theta_{x_i}-\dfrac{\bar\mu}{\bar\rho}u^i_{x_jx_j}-\dfrac{\bar\mu+\bar\mu'}{\bar\rho}u^j_{x_ix_j}=f^i\\ \theta_t+\dfrac{\bar\theta\bar p_\theta}{\bar\rho\bar e_\theta}u^j_{x_j}-\dfrac{\bar\kappa}{\bar\rho\bar e_\theta}\theta_{x_jx_j}=f^4 \end{cases}$$

ここで $\bar p_\rho=p_\rho(\bar\rho,\bar\theta)$ 等と書いた。また非線形項の形は例えば，$f^0=-(\rho-\bar\rho)u^j_{x_j}-u^j\rho_{x_j}$ である。

系 (4.2) は μ,μ',κ を考慮しなければ，条件 (1.2) により，$(\rho,$

u,θ) についての対称化可能双曲系であり，また μ, μ', κ があることで，(u,θ) については放物系と見なせる。以下の評価はこの事実に基づいている。(4.2) の各式に D_x^ℓ $(0\le\ell\le3)$ を作用する。こうして得られた $D_x^\ell(\rho,u,\theta)$ の各々の式にそれぞれ $\frac{\bar P_\rho}{\bar\rho}D_x^\ell(\rho-\bar\rho)$, $\bar\rho D_x^\ell u^i$, $\frac{\bar\rho\bar e_\theta}{\bar\theta}D_x^\ell(\theta-\bar\theta)$, を乗じた後，辺々加える。それを $[0,t]\times\mathbb{R}^3$ 上積分し，更に $0\le\ell\le3$ について加えると次を得る。

(4.3)
$$\|(\rho-\bar\rho,u,\theta-\bar\theta)(t)\|_3^2+\int_0^t\|D_x(u,\theta)(\tau)\|_3^2\,d\tau \le CE(0)^2 + C\sum_{\ell=0}^{3}\int_0^t\left|\int A^\ell(\tau,x)\,dx\right|d\tau,$$

ここで $A^\ell(t,x)=\frac{\bar P_\rho}{\bar\rho}D_x^\ell(\rho-\bar\rho)\cdot D_x^\ell f^0+\bar\rho D_x^\ell u^i\cdot D_x^\ell f^i+\frac{\bar\rho\bar e_\theta}{\bar\theta}D_x^\ell(\theta-\bar\theta)\cdot D_x^\ell f^4$ と置いた。次に(4.2)の u^i の式に D_x^k $(0\le k\le2)$ を作用した後，$D_x^k\rho_{x_i}$ を乗じる。これを $[0,t]\times\mathbb{R}^3$ 上積分し，$0\le k\le2$ について加えれば，$P_\rho>0$ より次を得る。

(4.4)
$$\int_0^t\|D_x\rho(\tau)\|_2^2\,d\tau - C\left\{\|(\rho-\bar\rho,u)(t)\|_3^2+\int_0^t\|D_x(u,\theta)(\tau)\|_3^2\,d\tau\right\} \le CE(0)^2+C\sum_{k=0}^{2}\int_0^t\left|\int B^k(\tau,x)\,dx\right|d\tau$$

ここで $B^k(t,x)=D_x^k\rho_{x_i}\cdot D_x^k f^i - D_x^k u^j_{x_j}\cdot D_x^k f^0$ と置いた。$\varepsilon C<1$ となる $\varepsilon>0$ を取り，(4.3)$+$(4.4)$\times\varepsilon$ を計算する。A^ℓ, B^k の積分の項が部分積分することで，

$$(4.5)\quad C\sum_{\ell=0}^{3}\int_0^t\left|\int A^\ell dx\right|d\tau + C\sum_{k=0}^{2}\int_0^t\left|\int B^k dx\right|d\tau \le C(\delta_0)E(T)^3$$

と評価できる事を使えば，結局　$E(T)^2 \le CE(0)^2 + C(\delta_0)E(T)^3$ なる不等式が得られる。これより直ちに補題の結論を得る。（証明了）

解の減衰則(2.4)のためには t^ℓ ($0\le\ell\le 2$) の重み付きノルム

$$(4.6)\quad N(T)^2 = \sup_{0\le t\le T}\sum_{\ell=0}^{2}(1+t)^\ell\|D_x^\ell(\rho-\bar\rho, u, \theta-\bar\theta)(t)\|_{3-\ell}^2 + \int_0^T\sum_{\ell=0}^{2}(1+t)^\ell\left(\|D_x^{\ell+1}\rho(t)\|_{2-\ell}^2 + \|D_x^{\ell+1}(u,\theta)(t)\|_{3-\ell}^2\right)dt$$

を評価すれば良い。補題1と同様の方法で，$N(T)$ が適当に小さいならば，a. priori 評価として $N(T)\le CE(0)$ が得られる。(2.4)はこの評価と，Nirenberg の不等式 $|f|_0 \le C\|f\|^{\frac{1}{4}}\cdot\|D_x^2 f\|^{\frac{3}{4}}$ から従う。ここで $\|\cdot\|$ は二乗可積分関数の空間 $L^2 = L^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムである。

5. エネルギーの凸性

前節で見たように，空間三次元の場合には，定数係数線形系(4.2)に対する評価だけで充分であった。これは，系(1.1)の解が線形系の解に近い事を意味し，見方によれば易しいともいえる。ところが空間一次元の場合にはこれだけでは不充分で，系(3.2)の持つ非線形構造をある程度考慮して評価する必要がある。即ち解の L^2 評価のためには，技巧的なエネルギー

形式を利用しなければならない（[6]，[19] 等参照）。そのためにまず熱力学量の性質，特に全エネルギー $E=e+\frac{|u|^2}{2}$ 及び負のエントロピー $-S$ の凸性に注意しよう。

<u>補題2</u>（全エネルギー及び負のエントロピーの凸性）(1.2), (1.3)を仮定する。この時次が成り立つ．

(i) 内部エネルギー e は (v,S) の関数とみて凸である。

(ii) (i)と次の①－④ 各々とは同値である。

① 全エネルギー $E=e+\frac{|u|^2}{2}$ は (v,u,S) の関数とみて凸

② 負のエントロピー $-S$ は (v,u,E) の関数とみて凸

③ ρE は $(\rho,\rho u,\rho S)$ の関数とみて凸

④ $-\rho S$ は $(\rho,\rho u,\rho E)$ の関数とみて凸

証明は (1.2), (1.3)を用いて直接二階微分を計算すれば良い（[19]参照）。

定数状態 $(\bar\rho,\bar u,\bar\theta)$ を取る。但し $\bar\rho>0$, $u\in\mathbb{R}^3$, $\bar\theta>0$。$(\bar\rho,\bar\theta)$ に対応する他の熱力学変数 $p, S, \cdots$ の定数状態を，それぞれ $\bar p, \bar S, \cdots$ と書く。$\partial E/\partial v=-p$, $\partial E/\partial u=u$, $\partial E/\partial S=\theta$ だから，E の $(\bar v,\bar u,\bar S)$ での Taylor 展開の一次の項までを E 自身から引き去った残り Δ^2E は

$$(5.1)\qquad \Delta^2E=e-\bar e+\bar p(v-\bar v)-\bar\theta(S-\bar S)+\frac{1}{2}|u-\bar u|^2$$

となる。同様に $\Delta^2(-S)$, $\Delta^2(\rho E)$, $\Delta^2(-\rho S)$ も考えられるが，これらは本質的に Δ^2E と同じものである。即ち

$$\Delta^2 E = \bar\theta \Delta^2(-S) = \frac{1}{\rho}\Delta^2(\rho E) = \frac{\bar\theta}{\rho}\Delta^2(-\rho S)$$

が成り立つ。補題2から$\Delta^2 E$は非負定値であるが，正確には次の評価を満足する。

補題2の系　補題2と同じ仮定のもと，ある定数$k_0>1$と$C_3 = C_3(k_0) > 1$が在って$(\rho, \theta) \in \Theta = \{k_0^{-1} < \rho/\bar\rho,\ \theta/\bar\theta < k_0\}$ならば，$\Delta^2 E$は次の評価を持つ。

$$(5.2)\qquad C_3^{-1}|v-\bar v, S-\bar S|^2 + \frac{1}{2}|u-\bar u|^2 \le \Delta^2 E$$
$$\le C_3|v-\bar v, S-\bar S|^2 + \frac{1}{2}|u-\bar u|^2$$

特に$\bar u = 0$の場合の$\Delta^2 E$を$\mathcal{E}$と書く。即ち

$$(5.3)\qquad \mathcal{E} = e - \bar e + \bar p(v-\bar v) - \bar\theta(S-\bar S) + \frac{|u|^2}{2}.$$

系(3.2)の解に対して$\mathcal{E}$を考えた時，次の等式が成り立つ。

$$(5.4)\qquad \mathcal{E}_t + \{(p-\bar p)u\}_x + \frac{\bar\theta}{\theta}\left(\nu\rho u_x^2 + \frac{\kappa\rho}{\theta}\theta_x^2\right)$$
$$= \left\{\nu\rho u u_x + \left(1-\frac{\bar\theta}{\theta}\right)\kappa\rho\theta_x\right\}_x.$$

解のL^2 a.priori評価は，エネルギー形式$\mathcal{E}$に対する評価(5.2)と等式(5.4)に基づいている。これについては次節で述べる。

6．定理2の証明

解のa.priori評価を与える。各$(\rho, u, \theta) \in X_n^2(T)$ $(n=1,2,3)$に対して$E_n(T)$をそれぞれ次で定義する。

$$(6.1)_1\qquad E_1(T)^2 = \sup_{0\le t\le T}\|(\rho-\bar\rho, u, \theta-\bar\theta)(t)\|_2^2 +$$

$$+\int_0^T \|D_x\rho(t)\|_1^2+\|D_x(u,\theta)(t)\|_2^2\,dt\ ,$$

$$(6.1)_2\qquad E_2(T)^2=\sup_{0\le t\le T}\|(\rho-\bar\rho,u,\theta-\bar\theta)(t)\|_2^2+$$
$$+\int_0^T \|D_x(\rho,u)(t)\|_1^2+\|D_x\theta(t)\|_2^2\,dt\ ,$$

$$(6.1)_3\qquad E_3(T)^2=\sup_{0\le t\le T}\|(\rho-\bar\rho,u,\theta-\bar\theta)(t)\|_2^2+$$
$$+\int_0^T \|D_x p(\rho,\theta)(t)\|_1^2+\|D_x u(t)\|_2^2\,dt\ .$$

補題3（a. priori 評価）　ある $T>0$ に対して $(\rho,u,\theta)\in X_n^2(T)$ が初期値問題(3.2), (2.1) の $(1.4)_n$の場合の解で $E_n(T)<\delta_0$ を満たすものとする。但し $n=1,2,3$。この時ある定数 $\delta_4>0$ ($\delta_4\le\delta_0$) 及び $C_4>1$（いずれも T に依らない）が在って，もし $E_n(T)<\delta_4$ であれば，実は a. priori 評価 $E_n(T)\le C_4E(0)$ が成り立つ。

証明.　$(1.4)_n$ いずれの場合も解の L^2評価は，(5.4) を $[0,t]\times\mathbb{R}$ 上積分し(5.2)を用いることで得られる。これがわかれば，解の微分の L^2評価は空間三次元の場合の様に，対応する線形系（但し$(1.4)_2$に対しては定数係数でない）の評価から，比較的容易に得ることができる。

$(1.4)_2$　即ち $\nu=0$, $\kappa>0$　の場合を示そう。(5.4) を $[0,t]\times\mathbb{R}$ 上積分し(5.2)を用いれば，次の評価を得る。

(6.2) $\|(\rho-\bar\rho, u, \theta-\bar\theta)(t)\|^2 + \int_0^t \|D_x\theta(\tau)\|^2 d\tau \le CE(0)^2$

微分の評価のために系(3.2)$(\nu=0)$を(ρ,u,θ)について解いた形に書き換える。(ρ,u)が組合わさった部分以外を定数解$(\bar\rho,0,\bar\theta)$で線形化し，非線形部分を右辺に集める。その式にD_x^ℓを作用すれば次を得る。

$$
(6.3)_\ell \quad \begin{cases} D_x^\ell \rho_t + \rho^2 D_x^\ell u_x = G_\ell^0 \\ D_x^\ell u_t + p_\rho D_x^\ell \rho_x + \bar p_\theta D_x^\ell \theta_x = G_\ell^1 \\ D_x^\ell \theta_t + \frac{\bar\theta \bar p_\theta}{\bar e_\theta} D_x^\ell u_x - \frac{\bar\kappa\bar\rho}{\bar e_\theta} D_x^\ell \theta_{xx} = D_x^\ell g^2 \end{cases}
$$

ここで例えば $G_\ell^0 = -\{D_x^\ell(\rho^2 u_x) - \rho^2 D_x^\ell u_x\}$ である。系(4.2)と同様，$(6.3)_\ell$は，κがなければ条件(1.2)より$D_x^\ell(\rho,u,\theta)$について対称化可能双曲系であり，またκがあることで$D_x^\ell\theta$については放物型とみなせる。そこで第一式に$\frac{p_\rho}{\rho^2}D_x^\ell\rho$，第二式に$D_x^\ell u$，第三式に$\frac{\bar e_\theta}{\bar\theta}D_x^\ell\theta$を乗じた後，辺々加える。それを$[0,t]\times\mathbb{R}$上積分し，$\ell=1,2$について加えれば，次を得る。

$$
\begin{aligned}
(6.4) \quad & \|D_x(\rho,u,\theta)(t)\|_1^2 + \int_0^t \|D_x^2\theta(\tau)\|_1^2 d\tau \\
& \le CE(0)^2 + C\sum_{\ell=1}^{2} \int\int_0^t |A^\ell(\tau,x)|\, d\tau\, dx
\end{aligned}
$$

ここで $A^\ell(t,x) = \frac{p_\rho}{\rho^2}D_x^\ell\cdot G_\ell^0 + D_x^\ell u\cdot G_\ell^1 - \frac{\bar e_\theta}{\bar\theta}D_x^{\ell+1}\theta\cdot D_x^{\ell-1}g^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p_\rho}{\rho^2}\right)_t \cdot |D_x^\ell\rho|^2 + (p_\rho)_x D_x^\ell\rho\cdot D_x^\ell u$ である。次に$(6.3)_\ell$第二式に$D_x^\ell\rho_x$を乗

じ，$[0,t]\times\mathbb{R}$ 上積分する．$\ell=0,1$ について加えれば，$P_\rho>0$ より次を得る。

$$(6.5)\quad \int_0^t \|D_x\rho(\tau)\|_1^2 d\tau - C\left\{\|(\rho-\bar\rho,u)(t)\|_2^2+\int_0^t\|D_x(u,\theta)(\tau)\|_1^2 d\tau\right\}$$
$$\le CE(0)^2 + C\sum_{\ell=0}^{1}\int_0^t\!\!\int |B^\ell(\tau,x)|\,d\tau dx,$$

ここで $B^\ell(t,x)=D_x^\ell\rho_x\cdot G_\ell^1 - D_x^\ell u_x\cdot G_\ell^0$ と置いた。$(6.3)_\ell$ の第三式に $D_x^\ell u_x$ を乗じ，$P_\theta\neq0$ を用いて同様に評価すれば，任意の $\alpha>0$ に対して

$$(6.6)\quad \int_0^t\|D_xu(\tau)\|_1^2 d\tau - \alpha\int_0^t\|D_x\rho(\tau)\|_1^2 d\tau -$$
$$- C(\alpha)\left\{\|(u,\theta-\bar\theta)(t)\|_2^2+\int_0^t\|D_x\theta(\tau)\|_2^2 d\tau\right\}$$
$$\le CE(0)^2 + C\sum_{\ell=0}^{1}\int_0^t\!\!\int |\tilde B^\ell(\tau,x)|\,d\tau dx$$

を得る。ここで $\tilde B^\ell(t,x)=D_x^\ell u_x\cdot D_x^\ell g^2 - D_x^\ell\theta_x\cdot G_\ell^1$ と置いた。

$\beta C<1$ となる $\beta>0$ を取り，(6.6) の α を $\alpha<\beta$ となる様に選べば，$(6.5)\times\beta+(6.6)$ より次を得る。

$$(6.7)\quad \int_0^t\|D_x(\rho,u)(\tau)\|_1^2 d\tau - C\left\{\|(\rho-\bar\rho,u,\theta-\bar\theta)(t)\|_2^2 +\right.$$
$$\left.+\int_0^t\|D_x\theta(\tau)\|_2^2 d\tau\right\} \le CE(0)^2 +$$
$$+ C\sum_{\ell=0}^{1}\int_0^t\!\!\int |B^\ell(\tau,x)|+|\tilde B^\ell(\tau,x)|\,d\tau dx.$$

$\varepsilon C<1$ となる $\varepsilon>0$ を取り $(6.2)+(6.4)+(6.7)\times\varepsilon$ を計算する。非線形部分が (4.5) と同様 $C(\delta_0)E_2(T)^3$ で評価できる（こ

の評価が得られるように変数係数系$(6.3)_2$を用いた）ので、結局 $E_2(T)$ が小さければ、a priori 評価 $E_2(T) \leq C_4 E(0)$ が成り立つ。以上で$(1.4)_2$の場合が証明された。

$(1.4)_1$，$(1.4)_3$ の場合の証明は省略することにし、$(1.4)_3$の場合、解の微分の L^2 評価のために、系(3.2)（$\kappa=0$）を (p, u, S) について解いた形の系

$$
(6.8)\quad \begin{cases} p_t + \left(\rho^2 p_\rho + \dfrac{\theta p_\theta^2}{e_\theta}\right) u_x = \dfrac{\nu\rho p_\theta}{e_\theta} u_x^2 \\ u_t + p_x - \nu\rho u_{xx} = (\nu\rho)_x u_x \\ S_t = \dfrac{\nu\rho}{\theta} u_x^2 \end{cases}
$$

を用いることのみ注意しておく。（証明了）

解の減衰則$(3.5)_n$は、エネルギー評価 $E_n(t) \leq C_4 E(0)$ と空間一次元の場合の Sobolev の不等式 $|f|_0 \leq \sqrt{2}\,\|f\|^{\frac{1}{2}}\|D_x f\|^{\frac{1}{2}}$ から従う。詳しくは[6]，[19]参照。

References

[1] J. Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965) 697-715.

[2] N. Itaya, On the Cauchy problem for the system of fundamental equations describing the movement of compressible viscous fluids, Kōdai Math. Sem. Rep., 23 (1971) 60-120.

[3] N. Itaya, On the initial value problem of the motion of compressible viscous fluid, especially on the problem of uniqueness, J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976) 413-427.

[4] N. Itaya, A survey on two model equations for compressible viscous fluid, J. Math. Kyoto Univ., 19 (1979) 293-300.

[5] F. John, Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974) 377-405.

[6] Ya.I. Kanel', On a model system of equations for one-dimensional gas motion, Diff. Eq. (Russian) 4 (1968) 721-734.

[7] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rat. Mech. Anal., 58, 3 (1975) 181-205.

[8] S. Kawashima and T. Nishida, Global solutions to the initial value problem for the equations of one-dimensional motion of viscous polytropic gases, J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981) 825-837.

[9] A.V. Kazhikhov and V.V. Shelukhin, Unique global solution

with respect to time of the initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas, J. Appl. Math. Mech., 41 (1977) 273-282.

[10] P.D. Lax, Developement of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, J. Math. Phys., 5 (1964) 611-613.

[11] T.P. Liu, Solutions in the large for the equations of nonisentropic gas dynamics, Indiana Univ. Math. J., 26 (1977) 147-177.

[12] T.P. Liu, Development of singularities in the nonlinear waves for quasi-linear hyperbolic partial differential equations, J. Diff. Eq. 33 (1979) 92-111.

[13] A. Majda, The existence and stability of multi-dimensional shock fronts, Bull. Amer. Math. Soc., 4 (1981) 342-344.

[14] A. Matsumura, An energy method for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, University of Wisconsin-Madison, MRC Technical Summary Report # 2194 (1981).

[15] A. Matsumura and T. Nishida, The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, Proc. Japan Acad., 55 (1979) 337-342.

[16] A. Matsumura and T. Nishida, The initial boundary value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluid, University of Wisconsin-Madison, MRC Technical Summary Report # 2237 (1981).

[17] J. Nash, Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962) 487-497.

[18] T. Nishida, Global solutions for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system, Proc. Japan Acad., 44 (1968) 642-646.

[19] M. Okada and S. Kawashima, The initial and initial-boundary value problems for the equations of one-dimensional motion of compressible viscous fluids, (to appear in J. Math. Kyoto Univ.).

[20] A. Tani, On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 13 (1977) 193-253.

[21] A. Tani, On the free boundary value problem for compressible viscous fluid motion, J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981) 839-859.

[22] A.I. Vol'pert and S.I. Hudjaev, On the Cauchy problem for composite systems of nonlinear differential equations, Math. USSR. Sbornik, 16 (1972) 517-544.