数理解析研究所講究録
462巻 1982年 58-71

非線形固有値問題に対する変分的方法についての一注意、

電気通信大学　海津 聰

§1. まえがき. 本稿では, φ_n ($n\in\mathbb{N}_0=\{0\}\cup\mathbb{N}$) は無限次元実可分ヒルベルト空間H上の下半連続、偶かつ凸関数で、$\varphi_n\not\equiv\infty$ とする. φ_nの劣微分に関する固有値問題 E_n^*: $\partial\varphi_n^{-1}(v)\ni\nu v$, $|v|=R(>0)$, $n\in\mathbb{N}_0$, を考えよう. φ_nのある条件のもとでE_n^*は可算無限ケの解をもつ (P. Clément [2]). E_n^*の解の一部をある方法 (§2, 定義参照) を用いて、genus k で、整列化し、$\{\nu_k^n, v_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ であらわす. $\{\nu_k^n, v_k^n\}$, ν_k^nをそれぞれ、E_n^*の第k解, 固有値第kと呼ぼう (§2, 定義). 本稿では$\varphi_n\nearrow\varphi_0$ (又は、$\varphi_n\searrow\varphi_0$), $n\nearrow\infty$ なる仮定のもとで、番号kが不変に保たれることを示す. 詳しくは、(i) 第k解の任意の部分列 $\{\nu^{n_j}{}_k, v^{n_j}{}_k\}_{j\in\mathbb{N}}$ ($\subset\mathbb{R}\times H$) は収束部分列をもつ. (ii) 第k解の任意の収束部分列の極限$\{\nu_k^0, v_k^0\}$はE_0^*の第k解である、(iii) 特にE_0^*が線形問題のとき、$\{\nu_k^0\}_{k\in\mathbb{N}}$ はE_0^*の全ての固有値を大小順に重複をこめて整列化したものに一致し、部分列をとら

ずに、$\nu_k^0 = \lim_{n\to\infty} \nu_k^n$、がなりたつことが示される。

φ_nについて、単調収束より弱い仮定：$\varphi_n \to \varphi_0$ (Mosco), $n\to\infty$（φ_nはφ_0にMoscoの意味で収束する）、のもとで、問題 $E_n : \partial\varphi_n(u) \ni \mu u, |u| = R$、の第k解の列$\{\mu_k^n, u_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} (\subset \mathbb{R}\times H)$は収束部分列をもつ、さらに、第k解の任意の収束部分列の極限$\{\mu^0, u^0\}$はE_0の解である（西山［５］）、しかし、E_0の第k解であるかについては不明である．西山（［５］）の結果は、$\mathbb{R}^n$の有界領域Ωで定義されたある種の非線形固有値問題の有限要素法の処罰法による近似解の収束性、および、同種の固有値問題の解$\{\mu^\Omega, u^\Omega\}$の領域Ωに関する連続性の基礎となる．
本稿は西山明成氏との共同研究の報告である．

genusについて復習する．$\Sigma = \{\Gamma \subset H\setminus\{0\} : \Gamma$は閉かつ対称$\}$とおく．genus $\gamma : \Sigma \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$、を、$\gamma(\Gamma) = \inf\{n\in\mathbb{N} : g\in C(\Gamma, \mathbb{R}^n\setminus\{0\}), g(x) = -g(x)\}$とおく、ただし、$\inf\phi = \infty$, $\gamma(\phi) = 0$とおく．
$B^R = \{x\in H : |x| \le R\}$、$\gamma_k^R = \{\Gamma \subset \partial B^R : \Gamma(\in\Sigma)$、コンパクト、$\gamma(\Gamma) \geqq k\}$、とおく．凸関数$\varphi_n$のconjugate function φ_n^*は、$\varphi_n^*(x) = \sup_{y\in H}\{(x,y) - \varphi_n(y)\}$、で定義される．このとき、$\partial\varphi_n^* = \partial\varphi_n^{-1}$、である．$\varphi_n^*$の$\partial B^R$上の臨界値の候補 c_k^n を次式で定義する．

$$c_k^n = \sup_{\gamma_k^R \ni \Gamma} \inf_{\Gamma \ni x} \varphi_n^*(x).$$

実際にφ_n^*がC^1級である条件をみたせば、c_k^nは、$\varphi_n^*|_{\partial B_R}$の臨界値で対応臨界点は$E_n^*$の解である（P.H.Rabinowitz［６］）．又、

φ_n^*がC¹級でなくとも，φ_n^*がある条件をみたす凸関数であればC_k^nは，$\varphi_n^*|_{\partial B_R}$の（劣微分の接平面微分が零になる意味で）臨界値で対応臨界点はE_n^*の解である（P. Clément [2]）．本稿では，$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$に対してつぎの条件A1、又は、A2を仮定する．

A1 ：（a） $\varphi_1(0)=0$、かつ、$\partial\varphi_1(0)=0$.

（b） 任意非負数λに対して、$\varphi_0^{-1}(-\infty,\lambda]$はコンパクトである．

（c） $\lim_{x\in D(\varphi_0),|x|\to\infty}\varphi_0(x)/|x|=\infty$.

（d） $\varphi_n\searrow\varphi_0$，$n\nearrow\infty$.

A2 ：（a） $\varphi_0(0)=0$、かつ、$\partial\varphi_0(0)=0$.

（b） 任意非負数λに対して、$\varphi_1^{-1}(-\infty,\lambda]$はコンパクトである．

（c） $\lim_{x\in D(\varphi_1),|x|\to\infty}\varphi_1(x)/|x|=\infty$.

（d） $\varphi_n\nearrow\varphi_0$，$n\nearrow\infty$.

§2. 結果.

条件A1，又は、A2を$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$がみたすとき、$\{C_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$は$\varphi_n^*$の臨界値全集合の部分集合で可算無限濃度をもつ（$n\in\mathbb{N}_0$）．実際、$C_k^n>0$，かつ，$\lim_{k\to\infty}C_k^n=0$，が示される．$\{C_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$を用いて$E_n^*$の解の一部を整列化する．

定義1 任意にR（>0），n（$\in\mathbb{N}_0$）を固定する．k（$\in\mathbb{N}$）に対し

$\{\nu, v\}$ がE_n^*の<u>第k解</u>であるとは、(i) $\partial\varphi_n^*(v) \ni \nu v$, $|v| = R$, (ii) $\varphi_n^*(v) = c_k^n$, をみたすことである．このときνをE_n^*の<u>固有値第k</u>と呼ぶ．

<u>注意</u>. 臨界値c_k^nは、k, R、およびnに対して一意に定まり．R, nを固定すれば、kの単調減少列であるが、固有値第kは、一般に多価である．又、kの単調減少列でもない．しかし，φ_n^*が $\alpha(\geqq 1)$ 次の正斉次性があるときは，固有値第k，ν_k^n は一価でkに関して減少列となる．

<u>定理1</u>　任意にR > 0, $k \in \mathbb{N}$を固定する．$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$が仮定$A_1$, 又は，$A_2$をみたすとき、つぎの(I), (II), (III), が成立する．

(I) 任意の$n \in \mathbb{N}_0$ に対しE_n^*の第k解$\{\nu_k^n, v_k^n\}$が存在する．

(II) 第k解の任意部分列$\{\nu_k^{n_j}, v_k^{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$は$\mathbb{R}\times H$で収束部分列をもつ．

(III) 第k解の任意収束部分列$\{\nu_k^{n_j}, v_k^{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$の極限$\{\nu^0, v^0\}$は$E_0^*$の第k解である．又．次の等式がなりたつ．

$$\varphi_0^*(v^0) = c_k^0 = \lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j}^*(v^{n_j}{}_k).$$

定理1の証明は§4でおこなう．

<u>§3. 応用</u>.

定理1をE_0^*が線形問題となる場合に適用しよう．Hを従前

通りとする．V は H の稠密な線形集合でそれ自体ヒルベルト空間とする．$|\cdot|_H, (\cdot,\cdot)_H$ は H のノルム，内積とし、$|\cdot|_V, (\cdot,\cdot)_V$ は V のノルム，内積とする．V から H への injection $i: V \to H$，はコンパクトであるとする．$D(A) = \{u \in V : \exists c > 0 \text{ s.t. } |(u,v)_V| \leq c|v|_H, \forall v \in V\}$ とおく．$A: D(A) \to H$，を、$(Au, iv)_H = (u,v)_V, \forall v \in V$，で定義する．定義から作用素 A は線形，単調、$A^{-1}(0) = 0$，かつ、対称作用素である．$R(A) = H$ より A は自己共役であり，$R(A+I) = H$ から A は極大単調作用素である．以上から A は cyclically monotone operator となり，下半連続凸関数 φ_0 があり，$\partial\varphi_0 = A$ である．ここで、$\varphi_0(iv) = |A^{1/2}v|_H^2 \; (v \in V)$，$v \notin V$ に対しては、$\varphi_0(v) = \infty$ とおく。ここで $A^{1/2}$ は A の square root で、$D(A^{1/2}) = V$，$|A^{1/2}v|_H = |v|_V \; (v \in V)$ である．φ_0 は、i がコンパクトであるから、A_1 (b) 又は A_2 (b) をみたす．i の連続性と $|A^{1/2}v|_H = |v|_V$ から A_1 (c) 又は A_2 (c) がなりたつ．

H 上の下半連続、偶、かつ、凸関数 $\varphi_\varepsilon : H \to [0,\infty] \; (\varphi_\varepsilon \not\equiv \infty)$ に対し、問題 E_ε^*: $\partial\varphi_\varepsilon^{-1}(v) \ni \nu v$，$|v|_H = R$，を考えよう $(\varepsilon_0 \geq \varepsilon \geq 0)$．$\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon_0 \geq \varepsilon \geq 0}$ に対しつぎの条件 B_1，又は，B_2 を仮定する．

B_1 : (i) $\varphi_{\varepsilon_0}(0) = 0$，かつ、$\partial\varphi_{\varepsilon_0}(0) = 0$.

(ii) $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq 0$ に対し、$\varphi_{\varepsilon_1}(x) \geq \varphi_{\varepsilon_2}(x)$，$x \in H$.

(iii) $\varphi_0(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varphi_\varepsilon(x)$，$x \in H$.

B_2 : (i) 非負数 λ に対し、$\varphi_{\varepsilon_0}^{-1}(-\infty, \lambda]$ はコンパクトである.

(ii) $\lim_{x\in D(\varphi_0),\,|x|\to\infty} \varphi_{\varepsilon_0}(x)/|x| = \infty$.

(iii) $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq 0$ のとき、$\varphi_{\varepsilon_1}(x) \leq \varphi_{\varepsilon_2}(x)$, $x\in H$.

(iv) $\varphi_0(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varphi_\varepsilon(x)$, $x\in H$.

E_ε^*の第k解、固有値第kを前節の定義1のように与える.
問題E_0^*の固有値ν_k^0は線形コンパクト作用素iA^{-1}の固有値であるから別の方法で順序づけられる.

定義2. iA^{-1}の固有値を対応する固有空間の次元だけ重複させ、固有値の大きい値から整列させ$\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$とおく. μ_kをiA^{-1}の第k固有値と呼ぶ.

定理2. 任意に$R>0$, $k\in\mathbb{N}$を固定する. $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon_0\geq\varepsilon\geq 0}$が仮定$B_1$又は$B_2$をみたすとき、つぎの(I),(II)(III)がなりたつ.

(I). 任意の$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$に対し$E_\varepsilon^*$の第k解$\{\nu_k^\varepsilon, v_k^\varepsilon\}$が存在する.

(II). E_0^*の固有値第k, ν_k^0とiA^{-1}の第k固有値, μ_kは一致し、

$$\mu_k = \lim_{\varepsilon\to+0} \nu_k^\varepsilon .$$

(III). 固有値μ_kが単純であると仮定する. 第k解$\{\nu_k^\varepsilon, v_k^\varepsilon\}_{\varepsilon_0\geq\varepsilon\geq 0}$に対し、$\delta>0$, E_0^*の第k解$\{\nu_k^0, v_k^0\}$が在って

$(v_k^\varepsilon, v_k^0)_H \geq \delta$, であれば、つぎの等式がなりたつ.

$$v_k^0 = \lim_{\varepsilon\to+0} v_k^\varepsilon .$$

例1 下半連続、偶かつ凸関数$\psi: H\to[0,\infty]$ ($\psi\not\equiv\infty$)は、$\psi(0)=0$かつ$\partial\psi(0)=0$をみたすと仮定する. するとE_ε^*は、

(3.1) $\quad (A+\varepsilon\partial\psi)^{-1}(v) \ni \nu v$, $|v|_H = R$

となる．ただし，$\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon\psi, \varepsilon > 0$ とおく．このとき仮定 B_1 がみたされる．

例1の具体例をあげる．Ω は滑らかな境界 Γ をもつ $\mathbb{R}^n$ の有界領域とする．$H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega), (u,v)_H = \int_\Omega uv\,dx, (u,v)_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ とおく．下半連続偶かつ凸関数 $g : \mathbb{R} \to [0,\infty]\ (g \not\equiv \infty)$ を用いて ψ を与える．

$$\psi(u) = \begin{cases} \int_\Omega g(u)\,dx & ,\quad g(u) \in L^1(\Omega), \\ \infty & ,\quad \text{その他}. \end{cases}$$

ただし，$g(0) = 0 = \partial g(0)$ とする．(3.1) は (3.2) で与えられる．

$$(3.2)\quad \begin{cases} -\Delta(\nu v) + \varepsilon\partial g(\nu v) \ni v, \text{ a.e. in } \Omega, \ v = 0, \text{ a.e. on } \Gamma, \\ \int_\Omega v^2\,dx = R^2. \end{cases}$$

例2．前例のように Ω, Γ, V, H をとる．正数 K に対して，

$$|\nabla u(x)|_K = \begin{cases} |\nabla u(x)| & ,\quad |\nabla u(x)| < K, \\ K & ,\quad |\nabla u(x)| \geq K, \end{cases}$$

とおく．このとき $\varphi_\varepsilon : H \to [0,\infty]$ を次式で定義しよう．

$$\varphi_\varepsilon(u) = \begin{cases} 1/2 \int_\Omega \dfrac{|\nabla u(x)|^2\,dx}{\sqrt{1 + (\varepsilon|\nabla u(x)|_{\sqrt{2}/\varepsilon})^2}} & ,\quad u \in V, \\ \infty & ,\quad u \notin V. \end{cases}$$

$\{\varphi_\varepsilon\}_{1 \geq \varepsilon \geq 0}$ は仮定 B_2 をみたす凸関数の族であることが示せる．E_ε^* はこの例では，つぎの (3.3) で与えられる．

$$(3.3)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^n (1/2)\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left\{(1+|\varepsilon\nabla(\nu v)|^2)^{-1/2} + (1+|\varepsilon\nabla(\nu v)|^2)^{-3/2}\right\}\dfrac{\partial(\nu v)}{\partial x_i}\right\} = v \\ \qquad\qquad ,\quad |\nabla(\nu v)(x)| < \sqrt{2}/\varepsilon. \\ -\Delta(\nu v) = \sqrt{3}\,v \qquad ,\quad |\nabla(\nu v)(x)| > \sqrt{2}/\varepsilon. \end{cases}$$

$$\Big| \quad v = 0 \quad , \text{a.e. on } \Gamma, \ \int_\Omega |v|^2 dx = R^2.$$

E_0^*は前例(3.2)に対するそれと共通である。

定理2の証明は§5で与える。

§4. 定理1の証明.

A. (I)の証明. $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$が仮定A1をみたすと任意の$n\in\mathbb{N}_0$に対してつぎの(4.1), (4.2), (4.3)がなりたつ.

(4.1) $\varphi_n(0)=0$、かつ、$\partial\varphi_n(0)=0$.

(4.2) 任意非負数λに対し、$\varphi_n^{-1}(-\infty,\lambda]$ はコンパクトである.

(4.3) $\displaystyle\lim_{x\in D(\varphi_n),\,|x|\to\infty} \varphi_n(x)/|x| = \infty$.

これより、P. Clément[2]の定理2の帰結として(I)が与えられる.

$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$が仮定A2をみたす場合も同様に(4.1)-(4.3)が成立し、(I)が得られる。

B. φ_n^*は弱連続関数である. φ_n^*は下半連続ゆえ弱上半連続であることを示す. $x_m\to x_0$, $m\to\infty$, と仮定する. (4.3)から、$R(\partial\varphi_n)=H$, $\partial\varphi_n^{-1}$が有界作用素ゆえ、$y_m\in\partial\varphi_n^{-1}(x_m)$があり, $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$は有界である. φ_n, φ_n^*の間の等式を用いて($z\in D(\varphi_n)$を固定)、

$$\varphi_n(y_m)=(x_m, y_m)-\varphi_n^*(x_m)\le(x_m, y_m)-(x_m, z)+\varphi_n(z),$$

を得る. (4.2)より$\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$は全有界ゆえ、$\displaystyle\lim_{m\to\infty}(x_m-x_0, y_m)=0$である.

$$\varphi_n^*(x_0) \ge \varphi_n^*(x_m)+(y_m, x_0-x_m),$$

において両辺の上極限をとり、$\displaystyle\varphi_n^*(x_0)\ge\limsup_{m\to\infty}\varphi_n^*(x_m)$, を得る.

C. $\varphi_n \searrow \varphi_0, n\nearrow\infty$, のとき、$\varphi_n^* \nearrow \varphi_0^*, n\nearrow\infty$ である。 前項Bより $D(\varphi_0^*)=H$ である。任意の $x\in H$、$\varepsilon>0$ に対し、$\varphi_0^*(x)$ の定義から、$y\in H$ があり、$\varphi_0^*(x)-\varepsilon<(x,y)-\varphi_0(y)$、である。$y\in D(\varphi_0)$ であるゆえ、$\varphi_n(y)\to\varphi_0(y), n\to\infty$. よって、$n_0\in\mathbb{N}$ があって任意の $n\geq n_0$ に対し $\varphi_0^*(x)-\varepsilon<(x,y)-\varphi_n(y)\leq\varphi_n^*(x)$, である。$\varphi_n\geq\varphi_0$ より $\varphi_n^*(x)\leq\varphi_0^*(x)$ である $(n\in\mathbb{N})$. 正数 ε は任意であるから、$\varphi_0^*(x)=\lim_{n\nearrow\infty}\varphi_n^*(x)$, である。$\varphi_n\geq\varphi_{n+1}$, ゆえ $\varphi_n^*\leq\varphi_{n+1}^*$ である。ゆえに $\varphi_n^*\nearrow\varphi_0^*, n\nearrow\infty$ である。

C'. $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ が仮定 A_2 をみたすとき、$\varphi_n^*\searrow\varphi_0^*, n\nearrow\infty$ である。
$\varphi_n\leq\varphi_{n+1}$ ゆえ $\varphi_n^*\geq\varphi_{n+1}^*\geq 0$ である。$\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n^*(x), x\in H$ とおく。凸関数 φ_n^* の単調減少列の極限 ψ は又凸関数であり、$\varphi_n^*\searrow\psi, n\nearrow\infty$、である。前項Cより、任意の $x\in D(\psi^*)$ に対し、$\varphi_n(x)\nearrow\psi^*(x), n\nearrow\infty$ (φ_n は下半連続ゆえ $\varphi_n^{**}=\varphi_n$ である). $x\notin D(\psi^*)$ について考察する。このとき任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し、$x_m\in H$ があり、$m<(x,x_m)-\psi(x_m)$, である。$\psi(x_m)=\lim_{\nu\to\infty}\varphi_\nu^*(x_m)$ より、$\nu_m\in\mathbb{N}$ があって $m<(x,x_m)-\varphi_\nu^*(x_m)\leq\varphi_\nu(x)$, $\nu\geq\nu_m$、である。m は任意であるから、$\varphi_\nu(x)\nearrow\infty, \nu\nearrow\infty$ である。よって、$\psi^*=\varphi_0$ を得る。ゆえに、$\psi^{**}=\varphi_0^*$、である。凸関数 ψ は弱連続である。実際、任意の $x\in H$ で φ_1^* は弱連続ゆえ、x の弱位相による近傍 $U(x)$ があって、$\sup_{U(x)\ni y}|\varphi_1^*(y)|=a<\infty$、ゆえに、$\sup_{U(x)\ni y}|\psi(y)|<a$ である。ゆえに ψ は点 x で弱連続である([3]参照). $\psi=\psi^{**}$ ゆえ、$\varphi_n^*\searrow\varphi_0^*, n\nearrow\infty$, が得られた。

D. $c^0_k = \lim_{n\to\infty} c^n_k$. 弱コンパクト集合$B^R$上弱連続関数$\varphi^*_n$が弱連続関数$\varphi^*_0$に単調に収束するから、Diniの定理より、$|\varphi^*_n - \varphi^*_0|_{B^R} = \sup_{B^R}|\varphi^*_n(x) - \varphi^*_0(x)| \to 0, n\to\infty$、である。任意の$\Gamma \in \gamma^R_k$に対し、$\inf_\Gamma \varphi^*_0 + |\varphi^*_n - \varphi^*_0|_{B^R} \geq \inf_\Gamma \varphi^*_n \geq \inf_\Gamma \varphi^*_0 - |\varphi^*_n - \varphi^*_0|_{B^R}$、である。$\Gamma \in \gamma^R_k$について上限をとれば、$c^0_k + |\varphi^*_n - \varphi^*_0|_{B^R} \geq c^n_k \geq c^0_k - |\varphi^*_n - \varphi^*_0|_{B^R}$、である。$n\to\infty$、として結果Dを得る。

E. (III)の等式後半が前項Dより示された。

F. $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$についてつぎの(4.4),(4.5)がなりたつ。

(4.4) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x^n) < +\infty$であれば、$\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$は収束部分列をもつ。

(4.5) $\lim_{x^n\in D(\varphi_n), |x^n|\to\infty} \varphi_n(x^n)/|x^n| = \infty$.

これらは仮定A1又はA2より直ちに得られる。

G. (II)の証明. (4.1)の後半の等式より(4.6)が得られる。

(4.6) 任意の$n(\in\mathbb{N}_0)$, $x(\neq 0)\in H$に対し、$\varphi^*_n(x)\neq 0$、である。

E^*_nの第k解$\{\nu^{n_j}_k, v^{n_j}_k\}$に対し、$\varphi_{n_j}$、$\varphi^*_{n_j}$の間の等式を用いて(4.7)が得られる。

(4.7) $\varphi^*_{n_j}(v^{n_j}_k) = -\varphi_{n_j}(\nu^{n_j}_k v^{n_j}_k) + \nu^{n_j}_k |v^{n_j}_k|^2 = c^{n_j}_k$.

(4.6)より$\nu^{n_j}_k v^{n_j}_k \neq 0$ゆえ、(4.7)の両辺を$|\nu^{n_j} v^{n_j}_k|$で割れる。これより、$\varphi_{n_j}(\nu^{n_j}_k v^{n_j}_k)/|\nu^{n_j}_k v^{n_j}_k| < R\ (j\in\mathbb{N})$、である。(4.5)より、$\{\nu^{n_j}_k v^{n_j}_k\}_{j\in\mathbb{N}}$は有界である。ゆえに(4.7)より$\{\varphi_{n_j}(\nu^{n_j}_k v^{n_j}_k)\}_{j\in\mathbb{N}}$は有界である。よって(4.4)より、$\{\nu^{n_j}_k v^{n_j}_k\}_{j\in\mathbb{N}}$は、収束部分列をもつ。$\nu^{n_{j_q}}_k v^{n_{j_q}}_k \to w$, $\nu^{n_{j_q}}_k \to \nu$, $q\to\infty$、とおけ

ば、ロ項と(4.7)より、$\nu \neq 0$、である。$\{v^{n_{j_{q_k}}}\}_{q\in\mathbb{N}}$はこのとき、収束列である。

H. (III)の残りの証明。$\{\nu^{n_{j_k}}, v^{n_{j_k}}\}$は$E_n^*$の解であるから、

$v^{n_{j_k}} = (1+\partial\varphi_{n_j}^{-1})^{-1}(1+\nu^{n_{j_k}})v^{n_{j_k}}$、である。$j\to\infty$、とおけば、

$v^0 = (1+\partial\varphi_0^{-1})^{-1}(1+\nu^0)v^0$、となる。ゆえに$\{\nu^0, v^0\}$は$E_0^*$の解である。(III)の前半の等式を示す。$\varphi_n^*\searrow\varphi_0^*$ 又は $\varphi_n^*\nearrow\varphi_0^*$ であるから、$\varphi_0^*(v^0) \leq \liminf_{j\to\infty}\varphi_{n_j}^*(v^{n_{j_k}})$ である。又、$\nu^{n_{j_k}}v^{n_{j_k}}\in\partial\varphi_{n_j}^*(v^{n_{j_k}})$、ゆえに、$\varphi_{n_j}^*(v^0)\geq\varphi_{n_j}^*(v^{n_{j_k}})+\nu^{n_{j_k}}(v^{n_{j_k}}, v^0-v^{n_{j_k}})$、である。$j\to\infty$で上極限をとれば、$\varphi_0^*(v^0)\geq\limsup_{j\to\infty}\varphi_{n_j}^*(v^{n_{j_k}})$、である。ゆえに、$\varphi_0^*(v^0)=\lim_{j\to\infty}\varphi_{n_j}^*(v^{n_{j_k}})$、を得てロ項より(III)の最初の等号が示された。

§5. 定理2の証明.

(I)の証明は定理1の(I)の証明と同様におこなう。(III)は(II)の結果と定理1の(III)を用いて直ちに得られる。以下(II)を証明しよう。

A. $\varphi_0^*(x)=\frac{1}{2}(iA^{-1}x, x)_H$, $x\in H$。実際φ_0は$A_1(c)$をみたすから、任意の$x\in H$に対し、$\partial\varphi^*(x)=iA^{-1}x$、があり、$\varphi_0^*(x)=(iA^{-1}x, x)_H - \varphi_0(iA^{-1}x) = (iA^{-1}x, x)_H/2$、である。

B. $\mu_1 = \frac{2}{R^2}\sup\{\varphi_0^*(x) : x\in\partial B^R\}$.

$\mu_k = \frac{2}{R^2}\sup\{\varphi_0^*(x) : x\in\partial B^R, (x, x_\ell)_H = 0, 1\leq\ell\leq k-1\}$, $k\geq 2$.

$\{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$は$\{\mu_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$に対応する固有元のつくる正規直交系で

ある。前項Aより B の結果が得られる。

C. $\nu_k^0 = \frac{2}{R^2} \sup_{\gamma_k^0 \ni \Gamma} \inf_{\Gamma \ni x} \varphi_0^*(x)$, $k \in \mathbb{N}$. 実際、方程式、$\partial\varphi_0^*(v_k^0) = iA^{-1}v_k^0 = \nu_k^0 v_k^0$、に v_k^0 との内積をとり、$C_k^n = \varphi_0^*(v_k^n)$ であることを用いるとよい。

D. $\{y_i\}_{1\leq i\leq k}$ は、$(y_i, y_j)_H = R^2\delta_{ij}$, $1\leq i,j\leq k$ をみたす任意の系とする。$m\{y_1,\cdots,y_k\} = \min\{\varphi_0^*(y) : y = \sum_{1\leq i\leq k}\alpha_i y_i,\ \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 = 1\}$, とおく。このとき、$\mu_k = \frac{2}{R^2}\sup_{y_1\cdots y_k} m\{y_1,\cdots,y_k\}$、である($k\in\mathbb{N}$)。

任意の $l\in\mathbb{N}$ に対し, $z_l \equiv Rx_l$, とおく。$m\{z_1,\cdots,z_k\}$ を求める。

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad m\{z_1,\cdots,z_k\} &= \min\left\{\varphi_0^*(y) :\ y = \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i,\ \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = 1\right\} \\
&= \frac{R^2}{2}\min\left\{\mu_1\alpha_1^2 + \cdots + \mu_k\alpha_k^2 :\ \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = 1\right\} \\
&= \frac{R^2}{2}\mu_k .
\end{aligned}
$$

$m\{y_1,\cdots y_k\} \leq m\{z_1,\cdots,z_k\}$ を示そう。$\mathrm{span}\{y_1\cdots y_k\} \subseteq \mathrm{span}\{z_1\cdots z_k\}$ の場合は等号でなりたつ。$\mathrm{span}\{y_1\cdots y_k\} \neq \mathrm{span}\{z_1\cdots z_k\}$ の場合 $\mathrm{span}\{y_1\cdots y_k\} \cap \{\mathrm{span}\{z_1\cdots z_k\}\}^\perp \cap \partial B^R \ni w$ が存在する。Bより $R^2\mu_k/2 \geq \varphi_0^*(w)$ となり、一方、$\varphi_0^*(w) \geq m\{y_1\cdots y_k\}$, である。(5.1)より $m\{z_1\cdots z_k\} \geq m\{y_1,\cdots,y_k\}$, が得られた。

E. $\mu_k \geq \mu_{k+1} > 0$, $\nu_k^0 \geq \nu_{k+1}^0 > 0$, $\nu_k^0 \geq \mu_k$, $k\in\mathbb{N}$. 最初の不等式は、Bの等式より得る。2番目の不等式は、C_k^0の定義より得る。最後の不等式は、C, Dの比較より得られる。

F. 任意の ν_k^0 に対し、$k'\in\mathbb{N}$ があって、$\nu_k^0 = \mu_{k'}$ である。

$\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対応する固有ベクトルの系 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ はHで完全である。

G. (II)の証明. (i) $\mu_1 = \nu_1^0$. 実際C,D項より得られる.
(ii) μ_1の重複度がrであれば、$\nu_1^0 = \nu_r^0$、である. 実際に、E項より, $\mu_1 = \nu_1^0 \geq \cdots \geq \nu_r^0 \geq \mu_r = \mu_1$, となり, $\nu_1^0 = \nu_r^0$である.
(iii) $\nu_r^0 > \nu_{r+1}^0$, である. 背理法で示す. $\nu_r^0 = \nu_{r+1}^0$, であれば $c_1^0 = \cdots = c_{r+1}^0$, となり, multiplicity lemma (P.H.Rabinowitz [6])より, $K = \{x \in \partial B^R : iA^{-1}x - \nu_1^0 x = 0,\ \varphi_0^*(x) = \frac{R^2}{2}\nu_1^0\}$ ($\varphi_0^*|_{\partial B^R}$ の臨界値 $R^2\nu_1^0/2$ に対応する臨界点の集合)のgenusが$r+1$以上となる. 一方、$\nu_1^0 = \mu_1$ であるから、$K = \partial B^R \cap \mathrm{span}\{x_1 \cdots x_r\}$ で, $\gamma(K) = r$, となり矛盾である.
(iv) $\nu_{r+1}^0 = \mu_{r+1}$. なんとなら, $\nu_{r+1}^0 > \mu_{r+1}$ とすると, $\mu_1 = \mu_r > \nu_r^0 > \mu_{r+1}$, であるから, $\nu_{r+1}^0 \notin \{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, となりF項に矛盾する.
(v) $\nu_{r+1}^0 = \mu_{r+1}$, に対して, (i)-(iv)と同様な操作で考察をおこなう. これを逐次繰返すことで(II)が証明される.

参考文献

[1] H.Brezis, Operateurs maximaux monotones, North-Holland, 1973.

[2] P.Clément, Eigenvalue problem for a class of cyclically maximal monotone operators, Math. Res. Center Technical Rep., #1668, Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Aug., 1976.

[3] I. Ekeland and R. Temam, Convex Analysis and Variational Problems. North-Holland, 1976.

[4] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities,. Adv. in math., vol. 3. No. 4, 1969.

[5] 西山明成、非線形固有値問題の近似について。電気通信大学電気通信学研究科、情報数理工学専攻、修士論文、昭和53年.

[6] P. H. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, C.I.M.E., Edizioni Cremonese Roma, 1974.