数理解析研究所講究録
463巻 1982年 56-71

Van der Corput列に基づく補間法の数値的安定性

名古屋大学工学部　鳥居達生

1．はじめに

区間（0,1）上に一様分布する数列は，多く知られているがVan der Corput列は，その数列をどこで打切っても，分布の等間隔性（一様性）がよいことと，その構成が2進法演算で正確にできるところに特長がある[1]．区間（0,1）上のVan der Corput列を複素平面上の単位円周上に写し，これを補間点とする補間法を考える．補間多項式をべき級数で表示するとき係数が2べきの高速Fourier変換の合成によって手間少なくできる．本文では，この補間法の数値的安定性について述べる．したがってLebesgue定数の評価が本質的な問題となる．

2進法表示の正の整数

$$k = k_1 2^0 + k_2 2^1 + \cdots + k_n 2^{n-1}, \quad k_n = 1 \qquad (1)$$

なるnビットのkに対し，双対な数を

$$k^* = k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \cdots + k_n 2^{-n} \quad , n \geq 1$$
$$0^* = 0 \quad , n = 0$$

で定義する．$\{k^*\}$ を Van der Corput列という．

kがnビットの整数のとき，k^*は正確にnビットの小数となる．

例．$\{k^*\}$の始めの部分の2進表示は次の通りである．

k	kの2進表示	k^*の2進表示	k^*
0	000	0.000	0
1	001	0.100	1/2
2	010	0.010	1/4
3	011	0.110	3/4
4	100	0.001	1/8
5	101	0.101	5/8

2．Van der Corput 列．

Van der Corput列のつくり方を三つ示す．

1）定義にしたがいnビットの正の整数をビット反転しnビット右に桁移動し，小数化する．

2）
$$(2k+1)^* = (1+k^*)/2 \quad , k = 0, 1, 2, \cdots$$

3) $$(k+2^n)^* = k^* + 2^{-n-1}$$
$$0 \le k < 2^n, \quad n = 0, 1, \cdots$$

区間 $[0,1)$ 上に分布する l 個の点 $\{k^*; 0 \le k < l\}$ を $\lambda_k = \exp(2\pi i k^*)$ によって，複素平面上の単位円周にうつし，l個の差積を

$$\omega_l(z) \equiv \prod_{0 \le k < l} (z - e^{2\pi i k^*}) = \prod (z - \lambda_k) \qquad (2a)$$

とおけば，これは高々 n 個の円周等分多項式の積

$$\omega_l(z) = \prod_{\nu=1,\, l_\nu \neq 0}^{n} \left(z^{2^{\nu-1}} + \lambda_l^{2^{\nu-1}}\right) \qquad (2b)$$

ただし $l = l_1 2^0 + l_2 2^1 + \cdots + l_n 2^{n-1}$, $l_n = 1$ として表示される[2].

簡単のため $\zeta = \bar{\lambda}_l z$ と変数変換すれば

$$\omega_l(z) = \lambda_l^l \prod_{\nu=1,\, l_\nu \neq 0}^{n} \left(\zeta^{2^{\nu-1}} + 1\right) \qquad (2c)$$

となる．したがって $|\omega_l(z)|$ の最大値は $z = \lambda_l$ $(\zeta = 1)$ のとき達成される．上式より $\omega_l(z)$ の根が単位円周上一様分布することは明らかであり，Van der Corput 列の最大の特長は (2c) の表示にあるといってよい．

補間法の数値的安定性は Lagrange 多項式

$$l_k(z) = \frac{\omega_l(z)}{(z-\lambda_k)\,\omega_l'(\lambda_k)} \quad, 0 \le k < l$$

の大きさによって支配される.

以下 Lagrange 多項式の幾何平均, 算術平均について述べることにする.

3. Lagrange 多項式の幾何平均

単位円周上の l 個の標本点 λ_k, $0 \le k < l$ に対し l 次の Vandermonde の行列式を

$$V_l(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{l-1}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{l-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_0^{l-1} & \lambda_1^{l-1} & \cdots & \lambda_{l-1}^{l-1} \end{bmatrix}$$

と書けば, よく知られているように

$$= \prod_{0 \le i < j < l} (\lambda_j - \lambda_i).$$

また

$$V_{l+1}(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_l) = \omega_l(\lambda_l)\, V_l(\lambda_0, \cdots, \lambda_{l-1}).$$

単位円周上における $\omega_l(z)$ の絶対値最大を M_l とおけば (2c) より

$$M_\ell \equiv \max_{|z|=1} |\omega_\ell(z)| = |\omega_\ell(\lambda_\ell)| = 2^{\Sigma \ell_\nu} \qquad (3)$$

すなわち左辺はℓのビット1の個数だけで定まる．

一方

$$\prod_{0\le k<\ell} \ell_k(z) = \frac{\omega_\ell(z)^{\ell-1}}{\prod_{j\ne k}(\lambda_j-\lambda_k)}$$

$$= (-1)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}} \omega_\ell^{\ell-1}(z) \,/\, V_\ell(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{\ell-1})^2$$

であるから Lagrange 多項式の幾何平均 $G_\ell(z)$

$$G_\ell(z) \equiv \left\{ \prod_{0\le k<\ell} |\ell_k(z)| \right\}^{1/\ell}$$

の最大値 G_ℓは，$z=\lambda_\ell$のとき達成されて

$$G_\ell = |G_\ell(\lambda_\ell)| = \left(H_\ell^{\ell+1} \Big/ \prod_{0\le k\le \ell} H_k^2 \right)^{1/\ell} \qquad (4)$$

が成立する．

右辺は標本数ℓだけに依存するが，さらにくわしく見るために行列式 $V_{\ell+1}(\lambda_0, \cdots, \lambda_\ell)$を評価する．

まず

$$|V_{\ell+1}(\lambda_0, \cdots, \lambda_\ell)| = \prod_{0\le k\le \ell} H_k$$

に注意する．右辺の $H_0, H_1, \cdots, H_\ell$ に対し高々nビットの$\ell+1$個の整数 $0\le k\le \ell$ を $\ell+1$行n列の行列で2進

表示する．この長方形行列の要素は 0，1 であり，ほぼ半々に分布している．1 の個数が Van der monde 行列式の値を決定する．長方形行列は $l+1$ 次元の列ベクトルからなると見る．最後尾の n 列では

$$(0\,1\,0\,1\,0\,1\,\cdots\cdots\;)^T$$

と分布する．0 と 1 の個数の差は，要素の総数 $l+1$ の偶奇に応じて 0，1 となる．いずれにしても 0 の方が高々 $2^0=1$ 個だけ多い．$n-1$ 列は $(0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,\cdots\;)^T$ と分布し，l に~~無~~関係に 0 の方が，1 より高々 $2^1=2$ 個多い．

以下同様．1 から l までの整数の 2 進表示の 1 の個数を $\mu(l)$ とおけば，前述したことから

$$\frac{1}{2}\{(l+1)n-2^n+1\} \le \mu(l) \le \frac{1}{2}(l+1)n \qquad (5)$$

ただし $\quad n=[\log_2 l]+1$．

l の桁数だけでなくビット 1 の個数

$$\beta(l)=\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu$$

や，その位置が判るとすれば，すなわち

$$l=2^{i_1}+2^{i_2}+\cdots+2^{i_m}, \quad m=\beta(l)$$

ならば

$$\mu(\ell) = \beta(\ell) + \sum_{1\le k\le \beta(\ell)} \left(\beta(\ell) - k + \frac{i_k}{2}\right) 2^{i_k}$$

が得られる．（証明略）

例．$\ell = 6$ ならば　$6 = 2^1 + 2^2$．したがって $\beta(\ell) = 2$，

$\mu(6) = 2 + (2-1+\frac{1}{2})2^1 + (2-2+\frac{2}{2})2^2 = 2+3+4 = 9.$

実際，1から6までを2進表示すれば

1, 10, 11, 100, 101, 110

であって，ビット1の個数は9個である．

以上の議論から次の結果を得る．

定理1．単位円周上に分布する ℓ 個の点 $\lambda_k = e^{2\pi i k^*}$，$0 \le k < \ell$ から作られる Lagrange 多項式の幾何平均 $G_\ell(z)$ の単位円周上における最大値 G_ℓ は，$z = \lambda_\ell$ のとき達成されて

$$G_\ell = 2^{\beta(\ell)(1+1/\ell)} \Big/ 2^{2\mu(\ell)/\ell}$$

と表わされる．

不等式(5)を用いて，G_ℓ の上下からの評価を得る．

系1．

$$\left(2^{\beta(\ell)-n}\right)^{1+1/\ell} < G_\ell < \left(2^{\beta(\ell)-(n-1)}\right)^{1+1/\ell}$$

lが十分大きければ

$$2^{\beta(l)-n} \lesssim \sigma_l \lesssim 2^{\beta(l)-n+1}$$

と簡単化される.

標本数lのビット1の個数は, 1以上高々nであるから

$$2^{-(n-1)} \lesssim \sigma_l \lesssim 2$$

となる. 左辺の不等式が生きるのは $\beta(l)=1$ すなわちlが2のべき 2^{n-1} の場合であり, 右辺の不等式が対応する場合は $\beta(l)=n$, すなわちlの各ビットがすべて1のときである. $\beta(l)$ を一定としてnを1増せば, すなわちlを$2l$と倍加すれば, σ_{2l} は σ_lの約 $1/2$ となる.

以上のことを補間法の数値的安定性の立場から解釈するならば, 標本数は, それを2進表示したときビット1の個数が少なくなるような数であることが望ましい. たとえば2のべき, あるいはその3倍, 5倍等の数である. Lagrange多項式の幾何平均が, その次数に無関係に有界であるという事実は単位円周上の一様分布列の著しい特長である.

4. Lagrange 多項式の算術平均 —Lebesgue定数—

前節で用いたl次多項式 $\omega_l(z)$ は, 高々$[\log_2 l]+1$個の円周等分多項式の積に分解されることを述べたので, 以下

$$\omega_l(z) = \prod_{\nu=1, l_\nu \neq 0}^{n} \left(z^{2^{\nu-1}} + 1 \right) \tag{6}$$

と仮定する．いうまでもなく Lagrange 多項式は

$$l_\lambda(z) = \frac{\omega_l(z)}{(z-\lambda)\,\omega_l'(\lambda)} \quad , \quad \lambda \in \{ \omega_l(\lambda) = 0 \}$$

である．Lebesgue 関数

$$\Lambda_l(z) = \sum_\lambda |l_\lambda(z)| \qquad , \quad |z| = 1$$

を単位円周上で評価することが問題である．

等間隔分布の場合，古くから $\Lambda_l(1) = \frac{2}{\pi} \log l + O(1)$ で発散することが知られている[3]．Lebesgue 関数の最大値は等間隔分布する標本点の丁度中点で実現される．

等間隔分布する場合の標本数をあらためて N とおき，どのような関数を入力したとき，$\Lambda_N(z)$ となるか考える．いま，$\lambda \in \{ \lambda^N + 1 = 0 \}$ であるから，入力の関数として

$$\frac{|l_\lambda(1)|}{l_\lambda(1)} = \frac{|1-\lambda|}{1-\lambda} = i\,\lambda^{-\frac{1}{2}}$$

をとればよい．平方根は正の実軸にカットを入れ上半平面の値をとるものとする．三角関数の選点直交関係より

$$\Lambda_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{0 \le k < N} \frac{z^k}{\sin \frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})} \quad , |\arg z| \le \frac{\pi}{N}$$

が得られる。

任意の定積分 $\int_0^1 f(t)\,dt$ に対する 2^n 項の中点公式による積分を $\int_0^1 f(t)\,d\mu_n(t)$ で表わせば，

$$\Lambda_N(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin N\theta|}{\sin\theta}\,d\mu_n(\theta) \quad , N = 2^n \qquad (7)$$

と書ける。

さて等間隔分布の場合を手掛りとして，"準等間隔分布"の場合を考える。標本点は円周等分多項式 $z^{2^\nu}+1$ の零点の積集合であるから Lebesgue 関数の最大値は，それらの共通の中点，たとえば $z=1$ と考えられる。直観的には殆んど明らか（実験的にも多くの例で確かめた）であるが証明できないので，本論文ではこれを事実として仮定する。

再び多項式(6)に即して考える。$\lambda \in \{\lambda^{2^{\nu-1}}+1=0\}$ ならば

$$\omega_l'(\lambda) = \Bigl(\prod_{k>\nu,\, l_k\neq 0} 2 \prod_{k<\nu,\, l_k\neq 0} (1+\lambda^{2^{k-1}})\Bigr)\cdot 2^{\nu-1}\lambda^{2^{\nu-1}-1}$$

であるから Lagrange 多項式は

$$l_\lambda(z) = \frac{\omega_l(z)}{z^{2^{\nu-1}}+1}\cdot\Bigl\{\frac{1}{2^{\nu-1}}\cdot\frac{z^{2^{\nu-1}}+1}{1-z\lambda}\cdot\Big/\prod_{\substack{k>\nu\\ l_k\neq 0}} 2\cdot\prod_{\substack{k<\nu\\ l_k\neq 0}}(1+\lambda^{2^{k-1}})\Bigr\}$$

と表わされる。ただし積 $\prod_k$ において番号 k が動く集合が空ならば，この積は1とする。以下同様。

これより $\lambda = e^{it}$ とおけば

$$|l_\lambda(1)| = \frac{1}{2^{\nu-1}\sin\frac{t}{2}} \Big/ \prod_{\substack{k<\nu\\ l_k\neq 0}} \left|\cos 2^{k-1}\frac{t}{2}\right|$$

標本数 l の2進展開を

$$l = 2^{p-1} + l_{p+1}2^{p} + \cdots + 2^{\nu-1} + l_{\nu+1}2^{\nu} + \cdots + 2^{n-1}, \quad p \geq 1$$

とするとき

$$\sin 2^{p-1}\theta \prod_{k=p}^{\nu-1} \cos 2^{k-1}\theta = 2^{-\nu+p}\sin 2^{\nu-1}\theta$$

これを使って

$$|l_\lambda(1)| = \frac{2^{\nu-p}\left|\sin 2^{p-1}\frac{t}{2}\right|}{2^{\nu-1}\sin\frac{t}{2}} \prod_{k} \left|\cos 2^{k-1}\frac{t}{2}\right|$$

ただし k の動く範囲は $p \leq k < \nu$ かつ $l_k = 0$ である．

したがって

$$\sum_\lambda |l_\lambda(1)| = \frac{2^{\nu-p}}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin 2^{p-1}\theta}{\sin\theta}\right| \prod_k \left|\cos 2^{k-1}\theta\right| d\mu_{\nu-1}(\theta)$$

$$= 2^{\nu-p}\prod_k \left|\cos 2^{k-1}\theta_3\right| \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left|\sin 2^{p-1}\theta\right|}{\sin\theta} d\mu_{\nu-1}(\theta) \qquad (8)$$

ここで積分に関する平均値の定理を使った．θ_3 は $\frac{\pi}{2^\nu} < \theta_3 < \pi - \frac{\pi}{2^\nu}$ を満たす適当な点である．中点公式の標本点は $\frac{\pi}{2^{\nu-1}}(j+\frac{1}{2})$, $0 \leq j < 2^{\nu-1}$ であることから

$$\prod_k \sin 2^{k-\nu-1}\pi < \prod_k \left|\cos 2^{k-1}\theta_3\right| < \prod_k \cos 2^{k-\nu-1}\pi .$$

~~これ~~中の項を $c_{p,\nu}$ とおけば，これは1より小さい正数である．

ただし k の動く範囲が空集合なら 1 であることに注意.
さらに簡単のため

$$\rho_{m,n} \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin 2^m\theta|}{\sin\theta}\, d\mu_n(\theta) \qquad (9)$$

とおく. 明らかに

$$\rho_{0,n} = 1 \quad , \quad n \geq 0$$

$$\rho_{n,n} = \Lambda_2^{\,n}(1) , \quad \rho_{n-1,n} = \rho_{n,n} / \sqrt{2}$$

である. この計算結果を示す.

$\rho_{m,n}$ の数表

n \ m	1	2	3	4	5	6	7
1	1.4142						
2	1.3066	1.8478					
3	1.2815	1.6172	2.2870				
4	1.2753	1.5678	1.9288	2.7278			
5	1.2738	1.5559	1.8556	2.2408	3.1689		
6	1.2734	1.5530	1.8381	2.1438	2.5528	3.6102	
7	1.2733	1.5523	1.8338	2.1207	2.4320	2.8648	4.0514
8		1.5521	1.8327	2.1151	2.4034	2.7203	3.1768
9			1.8325	2.1136	2.3964	2.6862	3.0085
10					2.3946	2.6778	2.9689

この数値例からみると $\rho_{m,n}$ は, m, n に関し, それぞ

れ単調減少，単調増加の傾向を示す．

以上のことから次の結果を得る．

標本数 l の 2進表示を

$$l = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \cdots + 2^{\nu_m}$$

とするとき Lebesgue 定数は

$$\Lambda_l(1) = 2^{-\nu_1} \sum_{k=1}^{m} 2^{\nu_k} C_{\nu_1,\nu_k} \rho_{\nu_1,\nu_k} \tag{10}$$

と表わされる．

上式が簡略化される特別な場合を述べる．

1) $l = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ のとき，$\rho_{0,k} = 1$，$C_{0,k} = 1$ となるから

$$\Lambda_{2^n-1}(1) = 2^n - 1 .$$

2) $l = 2^\nu + 2^{\nu+1} + \cdots + 2^n$，$\nu < n$ のとき，$C_{\nu,k} = 1$，$k > \nu$ であるから

$$\Lambda_{2^{n+1}-2^\nu}(1) = 2^{-\nu} \sum_{k=\nu}^{n} 2^k \rho_{\nu,k} .$$

とくに $l = 3 \cdot 2^{n-1}$ のとき

$$\begin{aligned}\Lambda_{3\cdot 2^{n-1}}(1) &= 2^{-(n-1)} \left(2^{n-1} \rho_{n-1,n-1} + 2^n \rho_{n-1,n} \right) \\ &= \rho_{n-1,n-1} + 2 \rho_{n-1,n} \\ &= \Lambda_{2^{n-1}}(1) + \sqrt{2}\, \Lambda_{2^n}(1) .\end{aligned}$$

3)　$l = 1+2+\cdots+2^{\nu-1}+2^{n} = 2^{n}+2^{\nu}-1$,　$\nu \le n$ の
とき

$$\Lambda_{2^{n}+2^{\nu}-1}(1) = 2^{\nu}-1+2^{\nu}\Lambda_{2^{n-\nu}}(1)$$

が得られる．とくに興味があるのは $2^{n}+1$ のときであって

$$\Lambda_{2^{n}+1}(1) = 1+2\Lambda_{2^{n-1}}(1).$$

（これは $2^{n}-1$ の場合にくらべ著しく小さい．

標本数を倍々と増してゆくとき，Lebesgue定数の漸近的増大の傾向は，標本数 l のビットパターンによって著しく異なる．任意の2のべきと互いに素な数を基準にして，それを2倍にしつつLebesgue定数と"階差"をもとめたのが次のLebesgue定数表である．

標本数を2倍にしたときの階差は一定となるので，標本数を倍々に増すときLebesgue定数は対数オーダーで発散する．

階差が小さい順序にビットパターン（p の2進表示）を列挙すれば $p = 1, 3, 5, 9$ である．いずれもビット1の個数 $\beta(p)$ が小さい程階差も小さい．

これらのことはLebesgue定数の一般的表示(10)からも判ることである．Lebesgue定数の増大が対数オーダーから線形のオーダーに変るのは $\Lambda_{2^{n}-1}(1) = 2^{n}-1$ の場合である．

Lebesgue定数表 $\Lambda_{p\cdot 2^k}$

k	2^k	Λ_{2^k}	$\Delta\Lambda$	$\Lambda_{3\cdot 2^k}$	$\Delta\Lambda$	$\Lambda_{5\cdot 2^k}$	$\Delta\Lambda$
0	1	1.000	0.414	3.000	1.027	3.828	1.211
1	2	1.414	0.434	4.027	1.055	5.039	1.243
2	4	1.848	0.439	5.082	1.063	6.282	1.253
3	8	2.287	0.439	6.145	1.064	7.535	1.256
4	16	2.728	0.441	7.209	1.065	8.791	1.257
5	32	3.169	0.441	8.274	1.066	10.048	1.256
6	64	3.610	0.441	9.340	1.065	11.304	
7	128	4.051		10.405			

k	2^k	$\Lambda_{7\cdot 2^k}$	$\Delta\Lambda$	$\Lambda_{9\cdot 2^k}$	$\Delta\Lambda$	$\Lambda_{11\cdot 2^k}$	$\Delta\Lambda$
0	1	7.000	2.153	4.696	1.393	8.657	2.584
1	2	9.153	2.200	6.089	1.434	11.241	2.643
2	4	11.353	2.214	7.523	1.446	13.884	2.659
3	8	13.567	2.217	8.969	1.450	16.543	
4	16	15.784	2.218	10.419	1.450		
5	32	18.002	2.219	11.869			
6	64	20.221					

前節で述べたLagrange多項式の幾何平均との関連で算術平均 $A_\ell \equiv \Lambda_\ell(1)/\ell$ についてみるならば，上界は1で，下界は $O(\log \ell/\ell)$ である．

5．おわりに

単位円周上に分布するVan der Corput列の中点（前節では一例として $\tau=1$ をとった）でLebesgue関数は最大値をとるという推測の下でLebesgue定数を求めた．この推測は杉浦洋君の数多い数値実験より生れたものである．

参考文献

1) L. Kuipers and H. Niederreiter : Uniform Distribution of Sequences, Chap. 2, John Wiley and Sons, Inc. (1974)

2) 鳥居達生，長谷川武光，二宮市三：等差数列的に標本数を増す補間的自動積分法，情報処理，Vol. 19, pp248-255 (昭53)

3) A. Zygmund : Trigonometric Series, vol. II, Chap. 10, Cambridge at the University Press (1959), second edition.