数理解析研究所講究録
464巻 1982年 61-69



# 時間に関して二階のある微分方程式について

姫工大 工学部
丸尾 健二

序 $H$を実Hilbert空間とし、内積を$(\,,\,)$により ノルムを$\|\cdot\|$で表わす。 $\varphi$は$H$から$(-\infty,+\infty]$への下半連続な凸関数とする。但し $\varphi\not\equiv 0$。 $\partial\varphi$を$\varphi$の劣微分作用素 すなわち

$$\partial\varphi x = \{ f\in H;\ \varphi(y)-\varphi(x)\geqq (f, y-x) \ \text{for any } y\in H\}$$

とするとき 次の方程式の解の存在と一意性について考える。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}u + \partial\varphi u \ni f \\ u(0)=a,\quad \dfrac{du}{dt}(0)=b \end{cases}$$

今まで上記の問題に関しては $H$が実有限次元Hilbert空間の場合に Schatzman [1] がやっている程度であまり論文を見ない。 [2] の中にも述べてある通り上記の方程式の解の存在と一意性を示す事は 難しい問題である為 この論文では まず第一歩として $\partial\varphi$が自己共役作用素$A$と 内点をもつ閉凸集合$K$上の定義関数$I_K(\cdot)$の劣微分作用素$\partial I_K$との和で表現される場合に限り 解の存在, 一意性を議論する

事を目的にしよう。すなわち

$$
(1.1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}u + Au + \partial I_K u \ni f \\ u(0) = a, \quad \dfrac{du}{dt}(0) = b \end{cases}
$$

の型をした方程式を解く問題である。

仮定と定理　まず記号を示す。$D(A^{1/2}) = V$とおき $V$の共役空間を$V^*$とする。そして$V$におけるノルムを$\|\cdot\|_V$ $V^*$におけるノルムを$\|\cdot\|_{V^*}$で表わす。又常に使用される様に$C([0,T];V)$, $C^1([0,T];H)$, $W^{1,\infty}([0,T];H)$等は$[0,T]$から$V$に値をとる連続関数全体, $H$に値をとる一回微分して連続な関数全体, $H$に値をとり超関数微分したものがいたる所有界な空間等とする。　さて$[0,T]$上の$(1.1)$の解を次の様に決める。

定義　$u \in C([0,T];H)$が$(1.1)$の解とは次の条件をみたす$u$が存在するときである。

1) $u \in W^{1,\infty}([0,T];H)$かつ$u \in$ weak-$C([0,T];V)$

2) For any $t \in [0,T]$に対して$u(t) \in V \cap K$

3) For any $t \in [0,T]$に対して右微分左微分が弱の意味で存在する。(但し0とTにおいては存在する方のみ)

4) エネルギー不等式をみたす

$$\left\| \frac{du^{\pm}}{dt}(t) \right\|^2 + (Au(t), u(t)) \leqq \|b\|^2 + (Aa, a) + 2\int_0^t \left(\frac{du}{ds}(s), f(s)\right) ds$$

for any $t \in [0,T]$ （0 と T では存在する方のみ）

ここで V と $V^*$ の積も（ , ）によって表現した

5) 次の条件を満す $C([0,T];H)$ 上の線型汎関数 F が存在する

$$F(\xi - u) \leqq 0 \qquad \text{for any } \xi \in C([0,T];K)$$

かつ

$$\int_0^T \left(\frac{du}{ds}(s), \frac{d\xi}{ds}(s)\right) ds - \int_0^T (f(s) - Au(s), \xi(s))\, ds + (b, \xi(0)) - \left(\frac{du^-}{dt}(T), \xi(T)\right) = F(\xi)$$

for any $\xi \in C([0,T], V) \cap C^1([0,T], H)$

6) 初期条件は次の意味で満す

$$u(0) = a \quad \text{and} \quad b - \frac{du^+}{dt}(0) \in \partial I_K a$$

<u>定理 1</u> H は可分な実 Hilbert 空間として V から H への埋め込み作用素は compact 作用素とする。任意の $a \in V \cap K$ and $b \in H$ に対して (1.1) の解はすくなくとも一つは存在する。但し $f \in W^{1,\infty}([0,T];H)$ とする。

[ 1 ] でも述られている通り 少なくともエネルギーを保存する解でなければ一意性はおない。 この為 閉凸集合 K に ある条件をつけて エネルギーを保存する解をみつける

事を次にやろう。　まず

**定義**（energy conserving solution）　$u$ が energy conserving solution とは　$u$ が (1.1) の解であり　次の条件をみたすときをいう

1)　$u \in C([0,T]; V)$

2)　For any $t \in [0,T]$　$\frac{du^{\pm}}{dt}(t)$ が強の意味で存在し（但し　0, T では存在する方のみ）

3)　For any $t \in [0,T]$ で　エネルギー等式を満す（但し　0, T では存在する方のみ）。

**仮定 A**

1)　For any $x \in \partial K$（Kの境界の点の集合）　$\partial I_K x$ は次の集合に等しいとする

$$\{ \lambda \eta(x) ;\ \lambda \geqq 0,\ \eta(x) \in \partial I_K x \text{ and } \|\eta(x)\| = 1 \}$$

2)　For any $x, y \in \partial K \cap G(R)$ に対して

$$\| \eta(x) - \eta(y) \| \leqq N_R \| x - y \|$$

をみたす　ここで $G(R)$ は原点を中心半径 R の球であり　ここで $N_R$ は十分大きな R にのみ関係する定数である。

**定理 2.**　仮定 A のもと　少なくとも一つの energy conserving solution が存在する。但し $f \in W^{1,\infty}([0,T], H)$ とする。

今　energy conserving solution でも　特別な場合をのぞき

一意性は存在しない（[ 1 ] 参照）。

<u>命題 3</u>　$u$ は energy conserving solution として　$F$ は定義の中にでてくる汎関数としよう。仮定 A のもと任意の $\xi \in C([0,T];H)$ に対して

$$F(\xi) = \int_0^T (\xi(s), \bar{\eta}(s))\, d\varphi_u \quad , \quad \varphi(0) = 0$$

をみたす左連続単調増加な関数 $\varphi_u$ が唯一つ存在する。ここで

$$\bar{\eta}(s) = \begin{cases} \eta(u(t)) & \text{if } u(t) \in \partial K \\ 0 & \text{if } u(t) \notin \partial K \end{cases}$$

さて $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ - energy conserving solution を定義しよう。

<u>定義</u>（$\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ - energy conserving solution）　$\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ は $[0,T]$ で dense な set としよう。

$M_0 = \{u \,;\, u$ は energy conserving solution$\}$ として帰納的に $\{M_j\}$ をきめる。

$$M_{j+1} = \{u \in M_j \,;\, \min_{w \in M_j} \varphi_w(t_j) = \varphi_u(t_j)\} \, , \quad j = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

できめる。ここで $\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$ の元の事を (1.1) の $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ - energy conserving solution とよぶ。

<u>定理 4</u>　仮定 A のもと　(1.1) の $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ - energy conserving solution は一意的に存在する。但し $f \in W^{1,\infty}([0,T];H)$ とする。

<u>定理の証明</u>　まず定理 1 について

$\partial I_K$ の吉田近似を $\partial I_{K,\lambda}$ であらわし　$I_K$ の吉田近似を $I_{K,\lambda}$

で表わす。　まず次の方程式を考える。

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}u_\lambda(t) + Au_\lambda(t) + \partial I_{K,\lambda}u_\lambda(t) = f(t) \\ u_\lambda(0) = a \qquad \dfrac{du_\lambda}{dt}(0) = b \end{cases}$$

上記の解は Barbu [3] p.p 288 によって存在一意がわかる。

次に (3.1) のエネルギー等式

$$(3.2)\quad \|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\|^2 + (Au_\lambda(t), u_\lambda(t)) + 2I_{K,\lambda}u_\lambda(t) = \|b\|^2 + (Aa, a) + \int_0^T (\frac{du}{ds}(s), f(s))\,ds$$

がわかり

$$(3.3)\quad \|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\|^2 \leqq \mathrm{Const}$$

がでてくる。

簡単の為　0 を K は内点に持っているとしよう。このとき

$$(\partial I_{K,\lambda}u_\lambda(t), u_\lambda(t)) \geqq \mathrm{Const}\ \|\partial I_{K,\lambda}u_\lambda(t)\|\,\|u_\lambda(t)\|$$

がでてきて

$$(3.4)\quad \int_0^T \|\partial I_{K,\lambda}u_\lambda(s)\|\,ds \leqq \mathrm{Const}$$ を得る。

埋め込みが compact である事と (3.3) から Ascoli-Arezela の定理を使用して $u_\lambda(t) \rightrightarrows u(t)$ 一様収束としてよい（部分列を又入とかく操作はやる）。又 (3.3) から $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t)$ weak-$L^2([0,T]; H)$ convergent としてよい。次に (3.4) と H の可分性より

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_0^T (\partial I_{K,\lambda}u_\lambda(s), \xi(s))\,ds = F(s)$$

としてよい。　(3.1) に $\xi \in C([0,T]:V) \cap C^1([0,T]:H)$ を積して部分積分をして上記の事柄を使用すれば定理1が言る。

定理2について

$K_\delta^R = \{x \in H \,/\, \mathrm{dist}(x, \partial K) \leqq \delta\sqrt{R}^{-1}\}$ とおく $(0 < \delta < 1)$

${}^\forall x \in K_\delta^R$ に対して $\mathrm{dist}(x, \partial K) = \|x - w\|$, $w \in \partial K$ なる $w$ が唯一つ存在する。この $w$ を $C(x)$ とかく。初期値 $a \in \partial K$ で十分小さい $T' > 0$ として $[0, T']$ 上で (3.1) を考えるとき

$\|\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t)\| = \ell_\lambda(t)$ とおけば

(3.5) $\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t) = \ell_\lambda(t)\, \eta(c_\lambda(t))$ ここで $c_\lambda(t) = C(u_\lambda(t))$ とする。

そて $\mathbb{H}$ は $H$ の複素化した Hilbert space とする。すなわち

$\mathbb{H} \ni {}^\forall \alpha + \beta\sqrt{-1}$ は $\alpha \in H$, $\beta \in H$ と表わされ 内積として

$\langle \alpha + \beta\sqrt{-1}, \theta + \gamma\sqrt{-1} \rangle = (\alpha, \theta) + (\beta, \gamma) + ((\beta, \theta) - (\alpha, \gamma))\sqrt{-1}$

を入れる。又 $\mathbb{A}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = A\alpha + (A\beta)\sqrt{-1}$ と定義すれば $\mathbb{A}$ は $\mathbb{H}$ 上の自己共役正値作用素となり $\mathbb{A}^{1/2}$ も定義できる。ここで $\alpha + 0\sqrt{-1} = \alpha$ と表わせば $\mathbb{A}^{1/2}\alpha = A^{1/2}\alpha$ となる。今 $\sqrt{-1}\mathbb{A}^{1/2} = \mathbb{D}$ とかき これを生成素にもつ群 $\{\mathbb{U}(t)\}$ を考える。すると $\dfrac{\mathbb{U}(t) + \mathbb{U}(-t)}{2}\alpha$ の虚部は0となり $\dfrac{\mathbb{U}(t) - \mathbb{U}(-t)}{2}\mathbb{D}^{-1}\alpha$ の虚部も0になることから (3.1) の解は次の表示を持つ事になる。

$$u_\lambda(t) = \frac{\mathbb{U}(t) + \mathbb{U}(-t)}{2} a + \frac{\mathbb{U}(t) - \mathbb{U}(-t)}{2}\mathbb{D}^{-1} b$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t (\mathbb{U}(t-s) - \mathbb{U}(s-t))\mathbb{D}^{-1}(-\ell_\lambda(s)\eta(c_\lambda(s)) + f(s))\, ds.$$

ここで $u_\lambda(t) - u_\mu(t)$ を計算し Growall's lemma を使用すれば $u_\lambda(t)$ の一様収束を示す事ができる。

又 $\frac{du_\lambda}{dt}(t) = \frac{1}{2}(\mathbb{U}(t) - \mathbb{U}(-t))\mathbb{D}a + \frac{1}{2}(\mathbb{U}(t) + \mathbb{U}(-t))b$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t (\mathbb{U}(t-s) + \mathbb{U}(s-t))(-l_\lambda(s)\gamma(c_\lambda(s)) + f(s))\,ds$$

の表現と $u_\lambda(t) \rightrightarrows u(t)$ に収束すれば $\gamma(c_\lambda(s)) \rightrightarrows \gamma(c(s))$ に収束する事から a.e $t \in [0, T]$ で強収束がわかり (3.2) のエネルギー等式と合せて energy conserving solution の存在がわかる。但し $[0, T']$ であるためあと $u_\lambda(t) \in \mathring{K}$ (Kの内点の集合) のときは線型問題になりよくわかっている事をもちいて解を接続すれば $[0, T]$ でもとまる。

定理4の証明について

energy conserving solution は Proposition 3 をもちいて $[0, T']$ 上で

$$u(t) = \frac{1}{2}(\mathbb{U}(t) + \mathbb{U}(-t))a + \frac{1}{2}(\mathbb{U}(t) - \mathbb{U}(-t))\mathbb{D}^{-1}b$$

$$(3.6) \qquad - \frac{1}{2}\int_0^t (\mathbb{U}(t-s) - \mathbb{U}(s-t))\mathbb{D}^{-1}\gamma(c(s))\,d\varphi_u$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t (\mathbb{U}(t-s) - \mathbb{U}(s-t))\mathbb{D}^{-1}f(s)\,ds$$

単調増加な関数集合 $\{\varphi_u\}_{u \in M_0}$ に関して Helly の選択定理を使用する。このとき部分列の選び方を各 t で最小になる列で選ぶ。こうして得られた部分列を $\{\varphi_j\}$ としそれに対応する energy conserving solution を $\{u_j\}$ とする。すると (3.6) の表現と $\varphi_j \to \varphi(t)$ に a.e $t \in [0, T]$ で収束する事をつかえば $u_j(t) \rightrightarrows u(t)$ に一様収束する事がわかり $u(t)$ は定理と同じ操作をして energy conserving solution である事がわか

る。　この解は定理4の求める $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ - energy conserving solution である事は作り方より自明である。　一意性に関しては　2つの解 $u$, $w$ に対応する　$\varphi_u$　$\varphi_w$　は定義より $\varphi_u = \varphi_w = \varphi$ である事がわかる。　又 $t > s \geq 0$ で

$$u(t) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{U}(t-s) + \mathbb{U}(s-t)\right)u(s) + \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{U}(t-s) - \mathbb{U}(s-t)\right)\mathbb{D}^{-1}\frac{du}{dt}(s)$$
$$- \tfrac{1}{2}\int_s^t \mathbb{D}^{-1}\left(\mathbb{U}(t-\xi) - \mathbb{U}(\xi-t)\right)\bar{\eta}_u(\xi)\, d\varphi_u$$
$$- \tfrac{1}{2}\int_s^t \left(\mathbb{U}(t-\xi) - \mathbb{U}(\xi-t)\right)\mathbb{D}^{-1} f(\xi)\, d\xi$$

の表現をもつ。

この事より

$$\| u(t) - w(t) \| \leqq \text{Const} \int_s^t \| u(\xi) - w(\xi) \| \, d\varphi$$

を得て　これを調べる事により一意性が得られる。

## 文　献


[1] Schatzman, M　a class of nonlinear differential equations of second order in time, Nonlinear Analysis Theorey, Method & Application　Vol 2. NO 3　355-377　(1977)

[2] 高村, 小西　非線型発展方程式(1)　岩波講座　基礎数学シリーズ.

[3] Barbu, V　Nonlinear semigroups and differential equations in Banach space　Noordhoff　(1976)