数理解析研究所講究録
466巻 1982年 161-175

葉層構造に随伴される コホモロジーと第2特性類

豊田高専　伊藤敏和
Ito Toshikazu

Introduction

n 次元 C^∞-多様体 M 上に余次元 q 葉層構造 $\mathcal{F}$ が与えられたときに，小平・スペンサー [10] の葉層構造の変形をまねて，J. Heitsch は，[5] において，葉層構造 $\mathcal{F}$ から随伴される cohomology $H^*(T(\mathcal{F});\gamma(\mathcal{F}))$ を構成した，そして葉層構造 $\mathcal{F}$ の変形 $\mathcal{F}_t$ ($\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$) から $H^1(T(\mathcal{F});\gamma(\mathcal{F}))$ の元 (i.e. $\mathcal{F}_t$ の無限小変形) を構成した。さらに，J. Heitsch は，[6] において，$H^1(T(\mathcal{F});\gamma(\mathcal{F}))$ の元をもちいて，第2特性類の微分を考えた。

一方，我々は [9]，[7] において第2特性類の消滅に関する性質の考察のために cohomology $H^*(T(\mathcal{F});\gamma^*(\mathcal{F}))$ (§1をみよ) を構成し，葉層構造 $\mathcal{F}$ が横断的向きずけ可能であるときに $H^2(T(\mathcal{F});\gamma^*(\mathcal{F}))$ の元 $\widehat{h_1\cdot c_1}$ を作った。この $\widehat{h_1\cdot c_1}$ は $\mathcal{F}$ の godbillon-Vey class $h_1\cdot c_1^q\in H^{2q+1}(M;\mathbb{R})$

と次の関係をもっている元である。

<u>定　理</u>

もし，$\widehat{h_1 \cdot c_1} = 0$ in $H^2(T(\mathcal{F}); \nu^*(\mathcal{F}))$ ならば，$h_1 \cdot c_1^q = 0$ in $H^{2q+1}(M; \mathbb{R})$ が成立する。

特に，$q=1$ のときは，もし $\hat{c}_1 = 0$ in $H^1(T(\mathcal{F}); \nu^*(\mathcal{F}))$ ならば $h_1 \cdot c_1 = 0$ in $H^3(M; \mathbb{R})$ が成立する。

しかしながら，Godbillon-Vey class 以外の才2特性類に対応する元は $H^*(T(\mathcal{F}); \nu^*(\mathcal{F}))$ の中に構成できなかった。

ところが，最近になって森田茂之先生の suggestion から $H^*(T(\mathcal{F}); \overset{k}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$，$k=1, 2, \cdots, q$，なる cohomologies を構成することにより，葉層構造 $\mathcal{F}$ の法束 $\nu(\mathcal{F})$ が自明の場合に，才2特性類それぞれに対応する元が $H^*(T(\mathcal{F}); \overset{k}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$ $k=1, 2, \cdots, q$，の中に構成できて，上記の定理と同様の関係が成立する。§2 の定理 2.3，2.4 をみよ。

ここでは，記号の煩雑さをさけ，かつ本質的な部分がよくわかるという2つの理由から $q=2$ の場合のみを扱うことにする。

1. Cohomologies $H^{p,k}(T(\mathfrak{F}); \overset{k}{\wedge}\nu^*(\mathfrak{F}))$ の構成

n 次元 C^∞-多様体 M 上の余次元2葉層構造 $\mathfrak{F}$ に随伴されるコホモロジーを構成する。

$T(M)$, $T(\mathfrak{F})$ でもって M の接バンドルと $\mathfrak{F}$ の接バンドルを表わす。 i.e. $T(M) \supset T(\mathfrak{F})$, $[T(\mathfrak{F}), T(\mathfrak{F})] \subset T(\mathfrak{F})$.
そして, $T^*(M)$ でもって M の余接バンドルを表わすと, $\nu^*(\mathfrak{F})$ は $\nu^*(\mathfrak{F}) = \{\omega \in T^*(M) \mid \omega|_{T(\mathfrak{F})} = 0\}$ で定義され, $\mathfrak{F}$ の dual normal bundle という。 Frobenius の定理から, 点 $x \in M$ の局所座標 U 上では $\nu^*(\mathfrak{F})|_U$ の basis
$\omega_U = \begin{pmatrix} \omega_U^1 \\ \omega_U^2 \end{pmatrix}$ が存在して, $\omega_U^1 \wedge \omega_U^2 \wedge d(\omega_U^1 \wedge \omega_U^2) = 0$

(i.e. completely integrable) をみたす。 だから,

(1.1) $\quad d\omega_U^i = \sum_{j=1}^{2} \Theta_U^{ij} \wedge \omega_U^j \qquad i = 1, 2$

ここで, Θ_U^{ij} は U 上の 1-形式である。
$\Theta_U = (\Theta_U^{ij})$ とおいて, (1.1) を行列の形で書くと

(1.2) $\quad d\omega_U = \Theta_U \wedge \omega_U$

そこで, 今

(1.3) $\quad \Omega_U = d\Theta_U - \Theta_U \wedge \Theta_U$

とおくと, (1.1) の両辺を微分することによって

$$(1.4)\quad \Omega_U=\left(\eta_U^{ij}\right)\wedge\begin{pmatrix}\omega_U^1 & \omega_U^1\\ \omega_U^2 & \omega_U^2\end{pmatrix}$$

となる。 ここで，$\eta_U=(\eta_U^{ij})$ は 2×2 行列，η_U^{ij} は U 上の 1−形式 である。

この Θ_U と Ω_U は $\nu^*(\mathcal{F})$ の Bott connection の connection form と curvature form になっている。

<u>記 号</u>　E を M 上のベクトル束としたとき，E への section の germ の作る sheaf を同じ記号 E でかき，$\Gamma(E)$ でもって E への global section を表わすとする。 $T^*(\mathcal{F})=T^*(M)/\nu^*(\mathcal{F})$ とおき，$\varphi\in T^*(M)$ の $T^*(\mathcal{F})$ への projection を同じ記号 $\varphi\in T^*(M)/\nu^*(\mathcal{F})$ でかくことにする。

ここで，我々は複体 $\{\Gamma(\wedge T^*(\mathcal{F})\otimes\overset{k}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F})),\ D_k\}$ $k=1,2$ を定義する。

<u>定 義 1.1</u>　$\hat{\varphi}\in\Gamma(\overset{p}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\nu^*(\mathcal{F}))$，$\hat{\varphi}|_U=\sum_{i=1}^{2}\varphi_U^i\otimes\omega_U^i$ と局所表示されているとき，D_1 を次のように定義する。

$$(1.5)\quad D_1(\hat{\varphi})|_U=\sum_{i=1}^{2}\left(d\varphi_U^i+(-1)^p\sum_{j=1}^{2}\varphi_U^j\wedge\theta_U^{ji}\right)\otimes\omega_U^i$$

又，$\hat{\varphi}\in\Gamma(\overset{p}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$，$\hat{\varphi}|_U=\varphi_U\otimes\omega_U^1\wedge\omega_U^2$ に対して，D_2 を次のように定義する。

$$(1.6)\qquad D_2(\hat{\varphi})\big|_U = \left(d\psi + (-1)^p \psi_U \wedge Tr(\Theta_U)\right) \otimes \omega_U^1 \wedge \omega_U^2$$

<u>Lemma 1.2</u>　(i)　D_1 と D_2 は well defined である.
(ii)　$D_1 \circ D_1 = 0$,　$D_2 \circ D_2 = 0$　が成立する。

このLemmaの証明は省略する。しかし，以下で我々は D_1 , D_2 を局所座表系をもちいて記述する。

そこで，(U, x_U), $x_U = (x_U^1, \cdots, x_U^n)$ を distinguished coordinate とする。即ち $\nu^*(\mathcal{F})|_U$ は $\{dx_U^{n-1}, dx_U^n\}$ で生成され，

$$(1.7)\qquad \frac{\partial x_U^i}{\partial x_V^j} = 0 \quad \text{on } U \cap V \ \text{ if } 1 \leqq j \leqq n-2 < i \leqq n$$

を満す。このとき，$\nu^*(\mathcal{F})|_U$ の basis ω_U^1 , ω_U^2 は

$$(1.8)\qquad \omega_U^\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} h_U^{\alpha\beta} \cdot dx_U^{n-2+\beta} \qquad \alpha = 1, 2.$$

となる。ここで，$h_U^{\alpha\beta}$ は U 上の関数である。そして，$H_U = (h_U^{\alpha\beta})$ とおけば $\det H_U \neq 0$ である。さらに，(1.8) を微分することによって，

$$d\omega_U^\alpha = \sum_{\gamma=1}^{2} \left(\sum_{\beta=1}^{2} dh_U^{\alpha\beta} \cdot h_{U,\beta\gamma} \right) \wedge \omega_U^\gamma$$

となる。ここで，H_U の逆行列 H_U^{-1} を $H_U^{-1} = (h_{U,\beta\gamma})$ と

かく。 故に,

$$(1.9) \qquad \Theta_U^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2} dh_U^{\alpha\beta} \cdot h_{U,\beta\gamma} \qquad \mathrm{mod}\ \gamma^*(\mathcal{F})$$

となる。 (1.9) を行列の形でかくと, $\Theta_U = dH_U \cdot H_U^{-1}$ である。

<u>Proposition 1.3</u> (i) $\hat{\varphi} \in \Gamma(\overset{p}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \gamma^*(\mathcal{F}))$, $\hat{\varphi}|_U = \sum_{\alpha=1}^{2} \varphi_U^{\alpha} \otimes dx_U^{n-2+\alpha}$ なる局所表示に対して

$$(1.10) \qquad D_1(\hat{\varphi})|_U = \sum_{\alpha=1}^{2} d\varphi_U^{\alpha} \otimes dx_U^{n-2+\alpha}$$

が成り立つ。

(ii) $\hat{\varphi} \in \Gamma(\overset{p}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \gamma^*(\mathcal{F}))$, $\hat{\varphi}|_U = \psi_U \otimes dx_U^{n-1} \wedge dx_U^{n}$ なる局所表示に対して,

$$(1.11) \qquad D_2(\hat{\varphi})|_U = d\psi_U \otimes dx_U^{n-1} \wedge dx_U^{n}$$

が成り立つ。

[注 意] (1.10), (1.11) において $d\varphi_U^{\alpha}$, $d\psi_U$ は厳密には $d_{\mathcal{F}}\varphi_U^{\alpha}$, $d_{\mathcal{F}}\psi_U$ であって $x_U^1, \cdots, x_U^{n-2}$ 変数についての微分を意味している。

<u>証 明</u> (i)

$$\hat{\varphi}\Big|_U = \sum_{\alpha=1}^{2} \varphi_U^{\alpha} \otimes dx_U^{n-2+\alpha} = \sum_{\beta=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2} \varphi_U^{\alpha}\cdot h_{U,\alpha\beta} \otimes \omega_U^{\beta}$$

より，D_1 の定義(1.5)から，

$$D_1(\hat{\varphi})\Big|_U = \sum_{\beta=1}^{2}\Big(\sum_{\alpha=1}^{2} d(\varphi_U^{\alpha}\cdot h_{U,\alpha\beta}) + (-1)^p \sum_{\alpha,\gamma=1}^{2} \varphi_U^{\alpha} h_{U,\alpha\gamma}\wedge \Theta_U^{\gamma\beta}\Big)\otimes \omega_U^{\beta}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{2}\Big\{\sum_{\beta=1}^{2}\Big(\sum_{\alpha=1}^{2}(d\varphi_U^{\alpha}\cdot h_{U,\alpha\beta} + (-1)^p \varphi_U^{\alpha}\wedge dh_{U,\alpha\beta})$$

$$+ (-1)^p \sum_{\alpha,\gamma=1}^{2} \varphi_U^{\alpha}\cdot h_{U,\alpha\gamma}\wedge \sum_{\kappa=1}^{2} dh_U^{\gamma\kappa}\cdot h_{U,\kappa\beta}\Big)\cdot h_U^{\beta\mu}\Big\}\otimes dx_U^{n-2+\mu}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{2} d\varphi_U^{\mu}\otimes dx_U^{n-2+\mu}$$

(ii)　まず　$\omega_U^1\wedge\omega_U^2 = \det H_U\cdot dx_U^{n-1}\wedge dx_U^n$　より

$$\hat{\psi}\Big|_U = \psi_U\otimes dx_U^{n-1}\wedge dx_U^n = \psi_U\cdot\frac{1}{\det H_U}\otimes \omega_U^1\wedge\omega_U^2$$

よって，　$D_2(\hat{\psi})\Big|_U$

$$= \Big(d\Big(\psi_U\cdot\frac{1}{\det H_U}\Big) + (-1)^p\psi_U\cdot\frac{1}{\det H_U}\wedge \mathrm{Tr}(\Theta_U)\Big)\otimes\omega_U^1\wedge\omega_U^2$$

$$= \Big(d\psi_U + (-1)^p\psi_U\cdot d\Big(\frac{1}{\det H_U}\Big)\cdot\det H_U + (-1)^p\psi_U\wedge \mathrm{Tr}\,\Theta_U\Big)\otimes dx_U^{n-1}\wedge dx_U^n$$

$$= d\psi_U\otimes dx_U^{n-1}\wedge dx_U^n$$

q.e.d.

このProposition 1.3 とパラメーターつきのPoincaréのLemmaより，2つの完全列ができる。

$$(1.12)\quad 0 \longrightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{F})_1 \longrightarrow \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}) \xrightarrow{D_1} \overset{1}{\wedge} T^*(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{V}^*(\mathfrak{F})$$

$$\xrightarrow{D_1} \overset{2}{\wedge} T^*(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}) \xrightarrow{D_1} \cdots\cdots\cdots \xrightarrow{D_1} \overset{n-2}{\wedge} T^*(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}) \longrightarrow 0$$

$$(1.13)\quad 0 \longrightarrow \mathfrak{N}(\mathfrak{F})_2 \longrightarrow \overset{2}{\wedge} \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}) \xrightarrow{D_2} \overset{1}{\wedge} T^*(\mathfrak{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{V}^*(\mathfrak{F})$$

$$\xrightarrow{D_2} \overset{2}{\wedge} T^*(\mathfrak{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}) \xrightarrow{D_2} \cdots\cdots\cdots \xrightarrow{D_2} \overset{n-2}{\wedge} T^*(\mathfrak{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}) \longrightarrow 0$$

ここで，$\mathfrak{N}(\mathfrak{F})_1 = \{ \hat{\varphi} \in \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}) \mid D_1 \hat{\varphi} = 0 \}$，$\mathfrak{N}(\mathfrak{F})_2 = \{ \hat{\varphi} \in \overset{2}{\wedge} \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}) \mid D_2 \hat{\varphi} = 0 \}$ である。

よって，複体 $\{ \Gamma(\wedge T^*(\mathfrak{F}) \otimes \mathcal{V}^*(\mathfrak{F})), D_1 \}$ と $\{ \Gamma(\wedge T^*(\mathfrak{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{V}^*(\mathfrak{F})), D_2 \}$ の cohomologies をそれぞれ $H^{p,1}(T(\mathfrak{F}); \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}))$，$H^{p,2}(T(\mathfrak{F}); \overset{2}{\wedge} \mathcal{V}^*(\mathfrak{F}))$ とかく。一方，(1.12)，(1.13) は $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})_1$，$\mathfrak{N}(\mathfrak{F})_2$ のそれぞれ fine resolution になっていることから，

$$H^{p,1}(T(\mathfrak{F}); \mathcal{V}^*(\mathfrak{F})) = H^{p,1}(M; \mathfrak{N}(\mathfrak{F})_1)$$
$$H^{p,2}(T(\mathfrak{F}); \overset{2}{\wedge} \mathcal{V}^*(\mathfrak{F})) = H^{p,2}(M; \mathfrak{N}(\mathfrak{F})_2)$$

である。

2. $H^{p,k}(T(\mathcal{F}); \overset{k}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$ と第2特性類の関係

この節では，n 次元 C^∞ー多様体 M 上の余次元2葉層構造で $\nu^*(\mathcal{F})$ が自明な場合に考察する。

まず，$\nu^*(\mathcal{F})$ の global basis を ω^1，ω^2 とする。ω^1，ω^2 が1次独立で，完全積分可能であることから，

(2.1) $$d\omega^i = \sum_{j=1}^{2} \theta^{ij} \wedge \omega^j$$

が成立する。ここで，θ^{ij} はM上の1-形式である。

(2.2) $\theta = (\theta^{ij})$ とおき，さらに

(2.3) $\Omega = d\theta - \theta \wedge \theta$ とおけば，(1.4) 式が成立

(2.4) $$\Omega = \zeta \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^1 \\ \omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

する。$\zeta = (\zeta^{ij})$，ζ^{ij} は M 上の 1ー形式。

一方，$h_1(\Omega) = \mathrm{Tr}\,\theta$，$C_1(\Omega) = \mathrm{Tr}(\Omega)$，$C_2(\Omega) = \det(\Omega)$ とおけば，(2.4) 式より

(2.5) $C_1(\Omega) = d(h_1(\Omega)) = \zeta^1 \wedge \omega^1 + \zeta^2 \wedge \omega^2$

となる。ここで，ζ^1, ζ^2 はM上の1-形式である。さらに，

(2.6) $C_2(\Omega) = \alpha \wedge \omega^1 \wedge \omega^2$

$$= d\left[\theta^{11} \wedge d\theta^{22} - \theta^{12} \wedge d\theta^{21} + \theta^{11} \wedge \theta^{12} \wedge \theta^{21} - \theta^{22} \wedge \theta^{12} \wedge \theta^{21}\right]$$

となっている。ここで，α は M 上の 2-形式である。

(2.7)
$$h_2(\Omega) = \theta^{11}\wedge d\theta^{22} - \theta^{12}\wedge d\theta^{21} + \theta^{11}\wedge\theta^{12}\wedge\theta^{21} - \theta^{22}\wedge\theta^{12}\wedge\theta^{21}$$

とおくと，(2.6) 式より

(2.8) $\quad C_2(\Omega) = d(h_2(\Omega))$

となる。

<u>定義 2.1</u> $\widehat{C_1}$, $\widehat{h_1C_1}$, $\widehat{C_2}$, $\widehat{h_2C_1}$, $\widehat{h_1C_2}$, $\widehat{h_1C_1^2}$, $\widehat{h_1\cdot h_2\cdot C_1^2}$, $\widehat{h_2\cdot C_2}$, $\widehat{h_1h_2C_2}$ をそれぞれ，次のように定義する。

$$\widehat{C_1} = \zeta^1\otimes\omega^1 + \zeta^2\otimes\omega^2$$
$$\widehat{h_1C_1} = h_1(\Omega)\wedge\zeta^1\otimes\omega^1 + h_1(\Omega)\wedge\zeta^2\otimes\omega^2$$
$$\widehat{C_2} = \alpha\otimes\omega^1\wedge\omega^2$$
$$\widehat{h_2\cdot C_1} = h_2(\Omega)\wedge\zeta^1\otimes\omega^1 + h_2(\Omega)\wedge\zeta^2\otimes\omega^2$$
$$\widehat{h_1\cdot C_2} = h_1(\Omega)\wedge\alpha\otimes\omega^1\wedge\omega^2$$
$$\widehat{h_1\cdot C_1^2} = -2h_1(\Omega)\wedge\zeta^1\wedge\zeta^2\otimes\omega^1\wedge\omega^2$$
$$\widehat{h_1\cdot h_2\cdot C_1^2} = -2h_1(\Omega)\wedge h_2(\Omega)\wedge\zeta^1\wedge\zeta^2\otimes\omega^1\wedge\omega^2$$
$$\widehat{h_2\cdot C_2} = h_2(\Omega)\wedge\alpha\otimes\omega^1\wedge\omega^2$$
$$\widehat{h_1\cdot h_2\cdot C_2} = h_1(\Omega)\wedge h_2(\Omega)\wedge\alpha\otimes\omega^1\wedge\omega^2$$

<u>Lemma 2.2</u> 上記の記号のもとで，

(i) $\widehat{C_1}\in H^{1,1}(T(\mathcal{F});\nu^*(\mathcal{F}))$, $\widehat{h_1C_1}\in H^{2,1}(T(\mathcal{F});\nu^*(\mathcal{F}))$
$\widehat{h_2\cdot C_1}\in H^{4,1}(T(\mathcal{F});\nu^*(\mathcal{F}))$

(ii) $\widehat{C_2} \in H^{2,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$, $\widehat{h_1 \cdot C_2} \in H^{3,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

$\widehat{h_1 \cdot C_1^2} \in H^{3,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$, $\widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_1^2} \in H^{6,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

$\widehat{h_2 \cdot C_2} \in H^{5,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$, $\widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_2} \in H^{6,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

このLemma の証明は略する。　次の定理 2.3 は de Rham cohomology と同じでつまらないと思える対応関係である。

<u>定　理　2.3</u>

(2.9)　もし，$\widehat{h_1 \cdot C_1^2} = 0$ in $H^{3,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

$$\Longrightarrow \quad h_1(\Omega) \wedge C_1(\Omega)^2 = 0 \quad \text{in } H^5(M; \mathbb{R})$$

(2.10)　もし，$\widehat{h_1 \cdot C_2} = 0$ in $H^{3,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

$$\Longrightarrow \quad h_1(\Omega) \wedge C_2(\Omega) = 0 \quad \text{in } H^5(M; \mathbb{R})$$

(2.11)　もし，$\widehat{h_2 \cdot C_2} = 0$ in $H^{5,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

$$\Longrightarrow \quad h_2(\Omega) \wedge C_2(\Omega) = 0 \quad \text{in } H^7(M; \mathbb{R})$$

(2.12)　もし，$\widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_1^2} = 0$ in $H^{6,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

$$\Longrightarrow \quad h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge C_1(\Omega)^2 = 0 \quad \text{in } H^8(M; \mathbb{R})$$

(2.13)　もし，$\widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_2} = 0$ in $H^{6,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

$$\Longrightarrow \quad h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge C_2(\Omega) = 0 \quad \text{in } H^8(M; \mathbb{R})$$

この定理の証明は略す。　次の定理 2.4 の対応関係は

非常に興味深いものをふくんでいると思える。

定理 2.4

(2.14) もし, $\widehat{h_1 \cdot c_1} = 0$ in $H^{2,1}(T(\mathcal{F}); \nu^*(\mathcal{F}))$

$\Longrightarrow$ (i) $h_1(\Omega) \wedge c_1(\Omega)^2 = 0$ in $H^5(M; \mathbb{R})$

(ii) $h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge c_1(\Omega)^2 = 0$ in $H^8(M; \mathbb{R})$

(2.15) もし, $\widehat{c_2} = 0$ in $H^{2,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge}\nu^*(\mathcal{F}))$

$\Longrightarrow$ (i) $h_1(\Omega) \wedge c_2(\Omega) = 0$ in $H^5(M; \mathbb{R})$

(ii) $h_2(\Omega) \wedge c_2(\Omega) = 0$ in $H^7(M; \mathbb{R})$

(iii) $h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge c_2(\Omega) = 0$ in $H^8(M; \mathbb{R})$

(2.16) もし, $\widehat{h_2 c_1} = 0$ in $H^{4,1}(T(\mathcal{F}); \nu^*(\mathcal{F}))$

$\Longrightarrow$ $h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge c_1(\Omega)^2 = 0$ in $H^8(M; \mathbb{R})$

証明　まず(2.14)の(i)の証明からはじめる。仮定より $\widehat{h_1 c_1} = D_1 \hat{\varphi}$, $\hat{\varphi} \in \Gamma(\overset{1}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \nu^*(\mathcal{F}))$ となるから, $\hat{\varphi} = \varphi^1 \otimes \omega^1 + \varphi^2 \otimes \omega^2$ とすれば,

$$h_1(\Omega) \wedge \gamma^1 = d\varphi^1 - \varphi^1 \wedge \theta^{11} - \varphi^2 \wedge \theta^{21} \quad \bmod \nu^*(\mathcal{F})$$

$$h_1(\Omega) \wedge \gamma^2 = d\varphi^2 - \varphi^1 \wedge \theta^{12} - \varphi^2 \wedge \theta^{22} \quad \bmod \nu^*(\mathcal{F})$$

が成り立つ。　よって, $h_1(\Omega) \wedge c_1(\Omega)^2$

$= (h_1(\Omega) \wedge \gamma^1 \wedge \omega^1 + h_1(\Omega) \wedge \gamma^2 \wedge \omega^2) \wedge c_1(\Omega)$

$= \left[(d\varphi^1 - \varphi^1 \wedge \theta^{11} - \varphi^2 \wedge \theta^{21}) \wedge \omega^1 + (d\varphi^2 - \varphi^1 \wedge \theta^{12} - \varphi^2 \wedge \theta^{22}) \wedge \omega^2 \right] \wedge c_1(\Omega)$

$$= \left[d(\varphi^1 \wedge \omega^1) + d(\varphi^2 \wedge \omega^2) \right] \wedge C_1(\Omega)$$

$$= d\left[(\varphi^1 \wedge \omega^1 + \varphi^2 \wedge \omega^2) \wedge C_1(\Omega) \right].$$

よって，(2.14)の(i)は証明された。　同様にして，(2.14)の(ii)は証明される。

$$h_1(\Omega) \wedge h_1(\Omega) \wedge C_1(\Omega)^2$$

$$= -h_2(\Omega) \wedge d\left[(\varphi^1 \wedge \omega^1 + \varphi^2 \wedge \omega^2) \wedge C_1(\Omega) \right]$$

$$= d\left[h_2(\Omega) \wedge (\varphi^1 \wedge \omega^1 + \varphi^2 \wedge \omega^2) \wedge C_1(\Omega) \right]$$

次に，(2.15)の(i)の証明をする。　仮定より，$\hat{C}_2 = D_2 \hat{\psi}$, $\hat{\psi} = \psi \otimes \omega^1 \wedge \omega^2 \in \Gamma(\overset{1}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \nu^*(\mathcal{F}))$ であるから，

$$\alpha = d\psi - \psi \wedge \mathrm{Tr}(\theta) \qquad \mathrm{mod}\ \nu^*(\mathcal{F})$$

が成り立つ。　$h_1(\Omega) = \mathrm{Tr}(\theta)$ に注意すれば，

$$h_1(\Omega) \wedge C_2(\Omega) = h_1(\Omega) \wedge \alpha \wedge \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$= h_1(\Omega) \wedge d\psi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = d(\psi \wedge d(\omega^1 \wedge \omega^2))$$

これで，(2.15)の(i)は証明された。

他の証明は略す。

References

[1] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Springer Lecture Notes in Math. 297(1972), 1-94.

[2] ———, Gel'fand-Fuks Cohomology and Foliations, Proc. of the Eleventh Annual Holiday Symposium at New Mexico State University, 1973.

[3] I. M. Gel'fand and D. B. Fuchs, Cohomologies of the Lie algebra of tangent vector fields on a smooth manifold, Functional Analysis 3 (1969), 32-52.

[4] C. Godbillon and J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension 1, C. R. Acad. Sci. Paris, 273(1971), 92-95.

[5] J. Heitsch, A cohomology for foliated manifolds, Comment. Helv. 50(1975), 197-218.

[6] ———, Derivatives of secondary characteristic classes, J. Diff. Geometry 13(1978), 311-339.

[7] T. Ito, On the cohomology associated foriations and Godbillon-Vey classes of transverselly orientable foliations of codimension q, (to appear).

[8] ———, On some cohomologies associated with foliations and the secondary characteristic classes, (to appear).

[9] 伊藤敏和：葉層構造に随伴されるコホモロジーについて，京都大学数理解析研究所講究録No 413「確定系における不規則現象と力学系理論」，(1981)，153－166。

[10] K. Kodaira and D. C. Spencer, Multifoliate Structures, Ann. Math., 74(1961), 52-100.

[11] H. V. Pittie, Characteristic classes of foliations, Pitman, London, 1976.

[12] Y. Shikata, On the cohomology of bigraded forms associated with foliated structures, Bull. Soc. Math. Grèce Tome 15(1974), 68-76.