数理解析研究所講究録
466巻 1982年 145-160

幾何学的有限なKlein群から作られる多様体上の測地的流れのエルゴード性

山形大. 理. 仲田正躬
Nakada Masami

§1. 序.

三次元ユークリッド空間を$\mathbb{R}^3$, その一点コンパクト化を$\hat{\mathbb{R}}^3=\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$とする. $\hat{\mathbb{R}}^3$における, 球面又は平面に関する, 反転の偶数個の合成をメービウス変換という. $\mathbb{B}^3$を$\mathbb{R}^3$における原点中心の単位開球とする. さて$\mathbb{B}^3$を不変にするメービウス変換を具体的に表示するために四元数を用いる. そこで

$$x=t_1+t_2i+t_3j+t_4k$$

を四元数とする. ただし, $t_\ell\in\mathbb{R}$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$, $i^2=j^2=k^2=-1$. $(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3$と$z+t_3j$ $(z=t_1+t_2i\in\mathbb{C}$: 複素数$)$とを同一視する. 従って, 上半空間$\mathbb{H}^3=\{(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3;\ t_3>0\}$と$\{z+tj;\ z\in\mathbb{C},\ t>0\}$とを同一視する. $x=t_1+t_2i+t_3j+t_4k$に対して$\bar{x}=t_1-t_2i-t_3j-t_4k$, $|x|^2=\sum_{\ell=1}^{4}(t_\ell)^2=x\bar{x}$とする. 又$x=t_1+t_2i+t_3j\in\mathbb{H}^3$に対して$z=t_1+t_2i=C(x)$, $t_2=I(x)$, $t_3=$

$J(x)$とする．いまτ_1を，中心が$-2j$ 半径が2の球面に関する反転とし，τ_2を，平面 $J(x)=-1/2$ に関する反転とする．従ってτ_1，τ_2は次で与えられる．

$$\begin{cases} \tau_1(x) = -2j + \{4(x+2j)/|x+2j|^2\} \\ \tau_2(x) = x - (2J(x)+1)j. \end{cases}$$

γを，$\mathbb{B}^3$を不変にするメービウス変換とすれば，$\bar{\gamma} = (\tau_2\circ\tau_1)^{-1}\circ\gamma\circ(\tau_2\circ\tau_1)$ は$\mathbb{H}^3$を不変にする．よって，$\bar{\gamma}(z+tj)$，$z+tj\in\mathbb{H}^3$は次の式で与えられる．

$$(1.1)\qquad \bar{\gamma}(z+tj) = \frac{a\bar{c}|z+tj|^2 + a\bar{d}z + b\bar{c}\bar{z} + b\bar{d}}{|cz+d|^2 + |c|^2t^2} + \frac{tj}{|cz+d|^2+|c|^2t^2},$$

ここで $a, b, c, d\in\mathbb{C}$ で $ad-bc=1$ (Ahlfors [1]).

<u>定義1.</u>　γは$\mathbb{B}^3$を不変にするメービウス変換とする．このとき，γが放物的変換とは，表示式(1.1)において$(a+d)^2=4$となることをいう．楕円的変換とは$(a+d)^2<4$となることをいい，その他のとき斜航的変換という．⌟

放物的変換は$S^2\equiv\partial\mathbb{B}^3$ にのみ唯一つの不動点をもつ．

<u>定義2.</u>　Γをメービウス変換群の部分群とする．このとき，ΓがKlein群とは次を満たすことをいう．

i) 各元$\gamma\in\Gamma$ は$\mathbb{B}^3$を不変にする．

ii) Γは$\mathbb{B}^3$に不連続に作用する．

iii) ΓはS^2のある開集合上に不連続に作用する．⌟

これより以後常に次を仮定する．すなわち，Γ は Klein 群で放物的変換 γ_0 を含むとする．又 γ_0 の不動点を $\zeta_0 \in S^2$ とする．さらに $x_0 \in \mathbb{B}^3$ は，すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma x_0 \neq 0$ なるものとする．

このとき次を満たすメービウス変換 α, β が存在する：

$$\begin{cases} \alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta(\infty) = \zeta_0 \\ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)^{-1} \circ \gamma_0 \circ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)(x) = x + 1 \\ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)^{-1}(x_0) = t_0 j, \quad t_0 > 0 . \end{cases}$$

このことは次のようにして示される．まず $\alpha(j) = \zeta_0$ となる直交変換 α をとる．次に，$(\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1)^{-1} \circ \gamma_0 \circ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1)(x) = x + \lambda_0$ となる $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ があるから，メービウス変換 β_1 を $\beta_1(z + tj) = \lambda_0 z + |\lambda_0| tj$ で定義する．さらに $(\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta_1)^{-1}(x_0) = z_0 + t_0 j$ $(t_0 > 0)$ とし，β_2 を $\beta_2(x) = x + z_0$ で定義する．そこで $\beta = \beta_1 \circ \beta_2$ とすれば，この α, β がもとめるものである．

与えられた Klein 群 Γ に対して，Patterson [7] に従って S^2 上のボレル確率測度 μ を構成する．本報告書の主目的は次の等式を示すことである：ζ_0 が，いわゆる cusped parabolic な不動点であれば $\mu(\{\zeta_0\}) = 0$.

このことを $\mathbb{H}^3$ を不変にする群 $(\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)^{-1} \circ \Gamma \circ (\alpha \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \beta)$ を用いて証明する．又この結果を応用して，幾何学的有限な Klein 群から作られる多様体上の測地的流れのエル

ゴード性を Hopf [5] に習って示す．ただし，この場合，相空間の測度は通常のものとは異なるものを導入する（[8]）．

§2. cusped parabolic な不動点．

さて，$\alpha, \tau_1, \tau_2, \beta$ は §1 で構成したものとし，さらに λ_0, $t_0(>0)$, z_0 も §1 のものとする．そこで $T=\alpha\circ\tau_2\circ\tau_1\circ\beta$ とする．$\bar{\Gamma}=T^{-1}\circ\Gamma\circ T$ の各元 $\bar{\gamma}=T^{-1}\circ\gamma\circ T\in\bar{\Gamma}$ は $\mathbb{H}^3$ を不変にする．$\bar{\Gamma}_\infty=\{\bar{\gamma}\in\bar{\Gamma}\ ;\ \bar{\gamma}\infty=\infty\}$ とする．

<u>定義3.</u>（[4]）複素平面 $\mathbb{C}$ における空でない，互いに素な二つの半平面の和 U が $\bar{\Gamma}_\infty$ の cusped region とは，$\bar{\gamma}(U)=U$ $(\bar{\gamma}\in\bar{\Gamma}_\infty)$ かつ $\bar{\gamma}(U)\cap U=\phi$ $(\bar{\gamma}\in\bar{\Gamma}\setminus\bar{\Gamma}_\infty)$ なることをいう．□

T のつくり方より，$\bar{\gamma}_0(x)=T^{-1}\circ\gamma_0\circ T(x)=x+1$．従って cusped region U は，ある $u_0(>0)$ に対して

$$U=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |I(z)|>u_0\}$$

なる形である．

<u>定義4.</u>（[4]）放物的変換 γ_0 の不動点 ξ_0 が cusped parabolic な不動点とは，$\bar{\Gamma}_\infty$ が cusped region をもつか，又は階数2の自由アーベル群を含むことをいう．□

さて

$$(2.1)\qquad \bar{\Gamma}=\bar{\Gamma}_\infty\bar{g}_0\cup\bar{\Gamma}_\infty\bar{g}_1\cup\bar{\Gamma}_\infty\bar{g}_2\cup\cdots\cdots$$

を Γ の右剰余類への分解とする．ただし $\bar{g}_0 = id.$ とする．

定理 1．　$\zeta_0 \in S^2$ が cusped parabolic な不動点とするとある代表元 $\{\bar{g}_m\}_{m=0}^{\infty}$ に対して $|\bar{g}_m(t_0 j)| \leqq K$ となる m に無関係な定数 K が存在する．

§3．　予備的関数．

h を次で定義される $\mathbb{B}^3 \times \mathbb{B}^3$ 上の関数とする：

$$h(x, y) = \frac{|x - y|^3}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} .$$

t_0' を十分大なる数とし，$W = \{z + tj \in \mathbb{H}^3 ;\ |z| < 1/2 ,\ t > t_0'\}$，$V = TW$ とする．t_0' は十分大きいので，$\gamma x_0 \in V^c$ がすべての $\gamma \in \Gamma$ に対して成立する．以下 $x_1 \in V$ をとり固定する．x_1 の近傍 $N(x_1)$, $N'(x_1)$ を次のようにとる．すなわち $V \supset N(x_1) \supset$（$N'(x_1)$ の閉包）．そこで $y \in \mathbb{B}^3 \cup S^2$ についての連続関数 $P(x_1, y)$ を次で定義する：

$$P(x_1, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - |x_1|^3}{|x_1 - y|^3} , & y \in N(x_1)^c \cap (\mathbb{B}^3 \cup S^2) \\ 0 , & y \in N'(x_1) . \end{cases}$$

$\gamma x_0 \in N(x_1)^c$ がすべての $\gamma \in \Gamma$ に対して成立するので $P(x_1, \gamma x_0) = (1 - |x_1|^3)|x_1 - \gamma x_0|^{-3}$．よって h 及び P の定義より

(3.1)　$h(0, \gamma x_0)^{-1} P(x_1, \gamma x_0) = h(x_1, \gamma x_0)^{-1} |\gamma x_0|^{-3}$.

$x \in \mathbb{B}^3$ に対して $x^* = x/|x|^2$ とする．

補題1．　$x, y \in \mathbb{B}^3$, $\gamma \in \Gamma$ に対して，$h(\gamma x, \gamma y) = f(x, y, \gamma)\, h(x, y)$．ここで

$$f(x, y, \gamma) = \begin{cases} (|a^*|^2 - 1)\{|x - a^*||y - a^*|\}^{-1}, & a = \gamma^{-1}0 \neq 0 \\ 1, & \gamma^{-1}0 = 0 . \end{cases}$$ $\lrcorner$

次に $x, y \in \mathbb{H}^3$ に対して $h_0(x, y)$ を次で定義する：

$$h_0(x, y) = \frac{|x - y|^3}{J(x)\, J(y)} .$$

補題2．　$x, y \in \mathbb{H}^3$ に対して，$h(Tx, Ty) = h_0(x, y) \cdot (|\lambda_0||x + w_0||y + w_0|)^{-1}$．ここで $w_0 = z_0 + (2/|\lambda_0|)\, j$ $\lrcorner$

$x_1' = T^{-1} x_1$ とし，$y \in \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{C}$ についての連続関数 $P_0'(x_1', y)$ を次で定義する：

$$P_0'(x_1', y) = \begin{cases} J(x_1')\, |x_1' - y|^{-3}, & y \in (T^{-1}(N(x_1)))^c \cap (\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{C}) \\ 0, & y \in T^{-1}(N(x_1)) . \end{cases}$$

さらに $P_0(x_1', y)$ を次で定義する：

$$P_0(x_1', y) = \begin{cases} P_0'(x_1', y), & y \in \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{C} \\ J(x_1'), & y = \infty . \end{cases}$$

補題3．

$$P(Tx_1', Ty) = \begin{cases} \dfrac{|\lambda_0|^2 |x_1' + w_0||y + w_0|^3}{8} P_0(x_1', y), & y \in (T^{-1}(N(x_1)))^c \cap (\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{C}) \\ \dfrac{|\lambda_0|^2 |x_1' + w_0|}{8} P_0(x_1', \infty), & y = \infty \end{cases}$$ $\lrcorner$

§4. 極限集合上の測度μ.

Klein 群Γの極限集合を$\Lambda(\Gamma)$とし，[7]のように$\Lambda(\Gamma)$に集中した$\mathbb{B}^3\cup S^2$上のボレル確率測度を構成する.

そこで，ディリクレ級数

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} h(0,\gamma x_0)^{-s}$$

の収束指数をδとする. このとき次の二つの条件を満たす$[0.\infty)$上の正の増加関数kが存在する：

1) $\sum_{\gamma\in\Gamma} k(h(0,\gamma x_0))\,h(0,\gamma x_0)^{-s}$ の収束指数はδでかつ，この級数は$s=\delta$で発散する.

2) 任意の$\varepsilon>0$に対してt'が存在して，$t>t'$, $u\geqq 1$ならば $k(ut)\leqq u^{\varepsilon}k(t)$ である.

$s>\delta$ に対して $M(s)\equiv\sum_{\gamma\in\Gamma} k(h(0,\gamma x_0))\,h(0,\gamma x_0)^{-s}$ とする. さらに$x\in\mathbb{B}^3$における単位ディラック測度δ_xに対して

$$\mu_s\equiv\frac{1}{M(s)}\sum_{\gamma\in\Gamma} k(h(0,\gamma x_0))\,h(0,\gamma x_0)^{-s}\,\delta_{\gamma x_0}$$

とする. このとき $\{\mu_s\}_{s>\delta}$ は$\mathbb{B}^3\cup S^2$上のボレル確率測度の族である. 従って，任意の列$\{s'_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$, $s'_\ell\downarrow\delta$, に対して，部分列$\{s_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$があって$\{\mu_{s_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$は$\mathbb{B}^3\cup S^2$上のあるボレル確率測度$\mu$に弱収束する. μは$\Lambda(\Gamma)(\subset S^2)$に集中している([7]).

$x_1\in V$ に対して

$$F(x_1)\equiv\int_{\mathbb{B}^3\cup S^2} L(x_1,y)^{\delta}\,\mu(dy)$$

とする. 補題3により次を得る.

定理２．　$x_1 = Tx_1'$ とすると $F(Tx_1') \geqq K\, J(x_1')^{2\delta} \mu(\{\zeta_0\})$ である．ここで K は $x_1' \in W$ に無関係な定数である．

次に，この定理の不等式とは逆向の不等式を導びく．そのために $F(x_1)$ を，[7] のように，級数であらわす．

$\{\mu_{s_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ が μ に弱収束していること，及び次の不等式：
$|P(x_1, y)^{\delta} - P(x_1, y)^{s_\ell}| \leqq K(x_1)\,|\delta - s_\ell|$，により

$$F(x_1) = \lim_{\ell \to \infty} \int_{\mathbb{B}^3 \cup S^2} P(x_1, y)^{s_\ell} \mu_{s_\ell}(dy)$$

となる．μ_{s_ℓ} の定義及び (3.1) より

$$F(x_1) = \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{M(s_\ell)} \sum_{\gamma} k(h(0, \gamma x_0))\, h(x_1, \gamma x_0)^{-s_\ell} |\gamma x_0|^{-3 s_\ell}.$$

$y_0 = T^{-1} 0$ とすれば

$$F(Tx_1') = \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{M(s_\ell)} \sum_{\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}} k(h(Ty_0, T\bar{\gamma}(t_0 j)))\, h(Tx_1', T\bar{\gamma}(t_0 j))^{-s_\ell} \cdot |T\bar{\gamma}(t_0 j)|^{-3 s_\ell}.$$

これに補題１及び２，さらに $\bar{\Gamma}$ の右剰余類への分解 (2.1) を適用すれば，

$$(4.1) \quad F(Tx_1') = \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{M(s_\ell)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}_\infty} k\bigl(a(\bar{\gamma}, m)\, h_0(\bar{\gamma}^{-1}(y_0), \bar{g}_m(t_0 j))\bigr) \cdot b(\bar{\gamma}, m, x_1')^{s_\ell}\, h_0(\bar{\gamma}^{-1}(x_1'), \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_\ell} |T\bar{\gamma}\bar{g}_m(t_0 j)|^{-3 s_\ell},$$

ここで

$$\left\{\begin{aligned} a(\bar{\gamma}, m) &= \frac{f(T\bar{\gamma}^{-1}(y_0),\ T\bar{g}_m(t_0 j),\ T\bar{\gamma}T^{-1})}{|\lambda_0|\,|\bar{\gamma}^{-1}(y_0) + w_0|\,|\bar{g}_m(t_0 j) + w_0|} \\ b(\bar{\gamma}, m, x_1') &= \left\{\frac{f(T\bar{\gamma}^{-1}(x_1'),\ T\bar{g}_m(t_0 j),\ T\bar{\gamma}T^{-1})}{|\lambda_0|\,|\bar{\gamma}^{-1}(x_1') + w_0|\,|\bar{g}_m(t_0 j) + w_0|}\right\}^{-1}. \end{aligned}\right.$$

上式の右辺の級数を $G(x_1', s_\ell)$ とおき，次の二つの節に

おいて，これを上から評価する．

§5. Γ_∞ が cusped region をもつとき．

$\bar{G}_0$を $\bar{\gamma}_0 = T^{-1}\circ\gamma_0\circ T$ によって生成される群とする．このとき $\Gamma_\infty = \bar{G}_0$ であるか，$\Gamma_\infty = \bar{G}_0 \cup \bar{G}_0\bar{e}$ となる．ここで $\bar{e}$ は $\bar{e}(z+tj) = -z+a+tj$ なるメービウス変換である $(a\in\mathbb{C})$. 従って $\Gamma_\infty = \bar{G}_0\cup\bar{G}_0\bar{e}$ の場合について，$G(x_1', s_\ell)$ を上から評価すれば十分である．よって

$$
\begin{aligned}
(5.1)\quad G(x_1', s_\ell) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\Big\{ & k(a(\bar{\gamma}_0^p, m)\, h_0(y_0-p, \bar{g}_m(t_0 j))) \\
& \cdot b(\bar{\gamma}_0^p, m, x_1')^{s_\ell}\, h_0(x_1'-p, \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_\ell}\, |T\bar{\gamma}_0^p\bar{g}_m(t_0 j)|^{-3s_\ell} \\
& + k(a(\bar{\gamma}_0^p\bar{e}, m)\, h_0(\bar{e}(y_0-p), \bar{g}_m(t_0 j)))\; b(\bar{\gamma}_0^p\bar{e}, m, x_1')^{s_\ell} \\
& \cdot h_0(\bar{e}(x_1'-p), \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_\ell}\, |T\bar{\gamma}_0^p\bar{e}\,\bar{g}_m(t_0 j)|^{-3s_\ell}\Big\}.
\end{aligned}
$$

以下の各節において，$\gamma\in\Gamma$, ℓ, $x_1'\in W$ に無関係な定数を K_n (n: 自然数) とかくことにする．

定理1を用いて次が示される．

<u>補題4.</u> 右剰余類分解(2.1)において，適当な代表元 $\{\bar{g}_m\}_{m=0}^{\infty}$ をとれば次の不等式が成立する．

i) $a(\bar{\gamma}_0^p, m) \leqq 1/4\,J(y_0)$, $\quad a(\bar{\gamma}_0^p\bar{e}, m) \leqq 1/4\,J(y_0)$,

ii) $b(\bar{\gamma}_0^p, m, x_1')^{s_\ell} + b(\bar{\gamma}_0^p\bar{e}, m, x_1')^{s_\ell} \leqq K_1\, J(x_1')^{s_\ell}\,(p^2+1)^{s_\ell/2}$,

iii) $\left.\begin{array}{l} h_0(y_0-p, \bar{g}_m(t_0 j)) \\ h_0(\bar{e}(y_0-p), \bar{g}_m(t_0 j)) \end{array}\right\} \leqq K_2\, h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j))\,(p^2+1)^{3/2}$,

iv)
$$\left.\begin{array}{l} h_0(x_1'-p,\ \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_l} \\ h_0(\bar{e}(x_1'-p),\ \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_l} \end{array}\right\} \leqq K_3\, J(x_1')^{s_l}\, h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_l} \cdot (J(x_1')^2+p^2)^{-\frac{3}{2}s_l}$$

この補題の不等式を (5.1) 式に代入して,

$$G(x_1', s_l) \leqq K_4\, J(x_1')^{2s_l} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k\left(K_5 (p^2+1)^{3/2} h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j))\right)$$
$$\cdot\ h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_l}\ (J(x_1')^2+p^2)^{-\frac{3}{2}s_l}\ (p^2+1)^{s_l/2}.$$

さらに, 正の増加関数 k の性質 2) により次を得る.

$$G(x_1', s_l) \leqq K_6\, J(x_1')^{2s_l} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j)))\ h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_l}$$
$$\cdot \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p^2+1)^{\frac{s_l+3\varepsilon}{2}} (J(x_1')^2+p^2)^{-\frac{3}{2}s_l} \right\},$$

ここで, $\varepsilon>0$ は十分小なる固定された数である. ところで [2] により, $\delta>1/2$ である. 又 $s_l>\delta$ であるから, 積分

$$\int_0^\infty (t^2+1)^{-s_l+\frac{3}{2}\varepsilon}\, dt$$

は収束する. よって級数

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} (p^2+1)^{\frac{s_l+3\varepsilon}{2}} (J(x_1')^2+p^2)^{-\frac{3}{2}s_l}$$

は $K_7\, J(x_1')^{1+3\varepsilon-2s_l}$ により上から抑えられる. 従って

$$G(x_1', s_l) \leqq K_8\, J(x_1')^{1+3\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j)))\ h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_l}.$$

<u>定理 3.</u> Γ_∞ が cusped region をもてば, $x_1' \in W$ に対して, $F(Tx_1') \leqq K_9\, J(x_1')$.

証明) 関数 k の性質 2) により, $g_m = T\circ\bar{g}_m\circ T^{-1}$ とすれば

$$k(h(0,\ g_m(x_0)))\ h(0,\ g_m(x_0))^{-s_l} \geqq K_{10}\, k(h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j)))\ h_0(y_0,\ \bar{g}_m(t_0 j))^{-s_l}.$$

よって (4.1) より $F(Tx_1') = \lim_{l\to\infty} \dfrac{1}{M(s_l)} G(x_1', s_l)$

$$\leqq K_8 J(x_1')^{1+3\varepsilon} \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{M(\Delta_\ell)} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j)))\ h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j))^{-\Delta_\ell}$$

$$\leqq K_8 K_{10}^{-1} J(x_1')^{1+3\varepsilon} \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{M(\Delta_\ell)} \sum_{m=0}^{\infty} k(h(0, g_m(x_0)))\ h(0, g_m(x_0))^{-\Delta_\ell}$$

$$\leqq K_8 K_{10}^{-1} J(x_1')^{1+3\varepsilon} \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{M(\Delta_\ell)} M(\Delta_\ell) = K_8 K_{10}^{-1} J(x_1')^{1+3\varepsilon}.$$

ここで $\varepsilon \downarrow 0$ にして，もとめる不等式をうる．

§6. $\bar{\Gamma}_\infty$ が階数2の自由アーベル群を含むとき．

$\bar{G}_0$を階数2の自由アーベル群とする．$\bar{G}_0$の各元 $\bar{\gamma}$ は $\bar{\gamma}(x) = x + p + q\zeta$ なる形である．ただし p, q は整数，$\zeta \in \mathbb{C}$ で $I(\zeta) \neq 0$．次に $\bar{\Gamma}_\infty$ を右剰余類に分解して $\bar{\Gamma}_\infty = \bigcup_{n=0}^{N-1} \bar{G}_0 \bar{e}_n$ とする．ここで $\bar{e}_0 = id$，$\bar{e}_n$ $(n = 1, 2, \cdots, N-1)$ は楕円的変換である．(4.1)式により

$$(6.1)\quad G(x_1', \Delta_\ell) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\bar{\gamma}\in\bar{G}_0} k(a(\bar{\gamma}\bar{e}_n, m)\, h_0(\bar{e}_n^{-1}\bar{\gamma}^{-1}(y_0), \bar{g}_m(t_0 j)))$$
$$\cdot\, b(\bar{\gamma}\bar{e}_n, m, x_1')^{\Delta_\ell} h_0(\bar{e}_n^{-1}\bar{\gamma}^{-1}(x_1'), \bar{g}_m(t_0 j))^{-\Delta_\ell} |T\bar{\gamma}\bar{e}_n \bar{g}_m(t_0 j)|^{-3\Delta_\ell}.$$

<u>補題5.</u> 右剰余類分解(2.1)において適当な代表元 $\{\bar{g}_m\}_{m=0}^{\infty}$，及び $\bar{G}_0 \ni \bar{\gamma}(x) = x + p + q\zeta$ に対して次が成立する．

i) $a(\bar{\gamma}\bar{e}_n, m) \leqq 1/4\, J(y_0)$,

ii) $b(\bar{\gamma}\bar{e}_n, m, x_1')^{\Delta_\ell} \leqq K_1 J(x_1')^{\Delta_\ell} (p^2 + q^2 + 1)^{\Delta_\ell/2}$,

iii) $h_0(\bar{e}_n^{-1}\bar{\gamma}^{-1}(y_0), \bar{g}_m(t_0 j)) \leqq K_2 h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j)) (p^2 + q^2 + 1)^{3/2}$,

iv) $h_0(\bar{e}_n^{-1}\bar{\gamma}^{-1}(x_1'), \bar{g}_m(t_0 j))^{-\Delta_\ell} \leqq K_3 J(x_1')^{\Delta_\ell} h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j))^{-\Delta_\ell}$
$\cdot\, (J(x_1')^2 + p^2 + q^2)^{-3\Delta_\ell/2}$

この不等式を(6.1)式に代入して

$$G(x_1', \Delta_\ell) \leqq K_4\, T(x_1')^{2\Delta_\ell} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} k\left(K_5\, h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j))(p^2+q^2+1)^{3/2}\right)$$
$$\cdot (p^2+q^2+1)^{\Delta_\ell/2}\, h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j))^{-\Delta_\ell}\, (T(x_1')^2+p^2+q^2)^{-3\Delta_\ell/2}.$$

k の性質 2) によりこの不等式は次のように変形される．

$$G(x_1', \Delta_\ell) \leqq K_6\, T(x_1')^{2\Delta_\ell} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j)))\, h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j))^{-\Delta_\ell}$$
$$\cdot \left\{ \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} (p^2+q^2+1)^{\frac{\Delta_\ell+3\varepsilon}{2}}\, (T(x_1')^2+p^2+q^2)^{-3\Delta_\ell/2} \right\}.$$

ここで $\varepsilon>0$ は十分小なる数である．[2] により $\delta>1$ であり，又 $\Delta_\ell>\delta$ であるから，積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \{(t_1)^2+(t_2)^2+1\}^{-\Delta_\ell+\frac{3}{2}\varepsilon}\, dt_1\, dt_2$$

は収束する．よって級数

$$\sum_{p,q=-\infty}^{\infty} (p^2+q^2+1)^{\frac{\Delta_\ell+3\varepsilon}{2}}\, (T(x_1')^2+p^2+q^2)^{-3\Delta_\ell/2}$$

は $K_7\, T(x_1')^{2+3\varepsilon-2\Delta_\ell}$ により上から抑えられる．ゆえに

$$G(x_1', \Delta_\ell) \leqq K_8\, T(x_1')^{2+3\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} k(h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j)))\, h_0(y_0, \bar{g}_m(t_0 j))^{-\Delta_\ell}.$$

従って，定理 3 と同様にして次が示される．

<u>定理 4.</u>　Γ_∞ が階数 2 の自由アーベル群を含めば，$x_1' \in W$ に対して　$F(Tx_1') \leqq K_9\, T(x_1')^2$ ⌟

定理 2，3 及び 4 を用いて次が示される．

<u>定理 5.</u>　$\xi_0 \in S^2$ が cusped parabolic な不動点であれば，$\mu(\{\xi_0\})=0$ である． ⌟

§7. 幾何学的有限な Klein 群とエルゴード性．

$\mathbb{B}^3$ にリーマン計量

$$ds^2 = 4(1-|x|^2)^{-2}\sum_{\ell=1}^{3}(dt_\ell)^2$$

を入れる $(x=(t_1,t_2,t_3)\in \mathbb{B}^3)$．この計量による二点 $x,y\in\mathbb{B}^3$ の距離を (x,y) とかくことにする．Γ を Klein 群，x_0 を §1 のものとして，ディリクレ級数 $\sum_{\gamma\in\Gamma}\exp -s(x_0,\gamma x_0)$ を考える．関数 k を §2 のものとすると

$$L(s)\equiv\sum_{\gamma\in\Gamma}k(\exp(x_0,\gamma x_0))\exp -s(x_0,\gamma x_0)$$

の収束指数は δ（§2 における δ）で，かつこの級数は $s=\delta$ で発散する．そこで，$s>\delta$ に対して

$$\nu_s\equiv\frac{1}{L(s)}\sum_{\gamma\in\Gamma}k(\exp(0,\gamma x_0))\{\exp -s(0,\gamma x_0)\}\delta_{\gamma x_0}$$

とすると，$\{\nu_s(\mathbb{B}^3\cup S^2)\}_{3\geqq s>\delta}$ は有界集合となる．よって §4 と同様に，適当な数列 $\{s_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ に対して $\{\nu_{s_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ は $\mathbb{B}^3\cup S^2$ 上のボレル測度 ν に弱収束する．$\nu(\mathbb{B}^3\cup S^2)<\infty$ であり，さらに ν は $\Lambda(\Gamma)$ に集中している．

<u>定理 6.</u>　定理 5 と同じ仮定のもとで，次が成立する．

$$\nu(\{\xi_0\})=0$$

さて，$T_1(\mathbb{B}^3)$ を $\mathbb{B}^3$ 上の単位接ベクトルバンドルとする．$(x,u)\in T_1(\mathbb{B}^3)$ $(x\in\mathbb{B}^3)$，$\gamma\in\Gamma$ に対して

$$\gamma(x,u)=(\gamma x,(\gamma_*)_x(u))$$

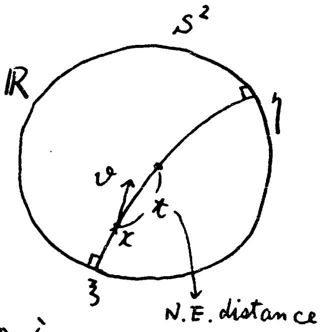
とする．これにより Γ は $T_1(\mathbb{B}^3)$ に不連続に作用する．そこで $\Omega\equiv T_1(\mathbb{B}^3)/\Gamma$，$\pi: T_1(\mathbb{B}^3)\longrightarrow\Omega$ を自然な射影とする．

Δ を $S^2\times S^2$ の対角線集合とする．$(\xi,\eta)\in S^2\times S^2-\Delta$，$\gamma\in\Gamma$

に対して, $\gamma(\xi,\eta) = (\gamma\xi, \gamma\eta)$ とする.

<u>補題6.</u> ([8]) $(\nu\times\nu)/|\xi-\eta|^{2\delta}$ は $S^2\times S^2-\Delta$ 上の Γ-不変なボレル測度である.

さて $H: T_1(\mathbb{B}^3)\ni(x,u)\longmapsto(\xi,\eta,t)\in(S^2\times S^2-\Delta)\times\mathbb{R}$ を右図で定義する($\widehat{\xi\eta}$ は u に接する).



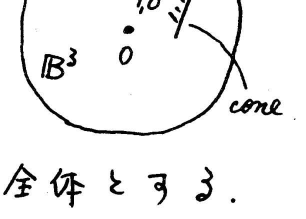
このとき $H\circ\gamma\circ H^{-1}(\xi,\eta,t)$

$=(\gamma\xi,\gamma\eta,t+f_\gamma(\xi,\eta))$ $(\gamma\in\Gamma)$ であるから

$$m' \equiv \left[\frac{\nu\times\nu}{|\xi-\eta|^{2\delta}}\times dt\right]\circ H$$

は Γ-不変な, $T_1(\mathbb{B}^3)$ 上のボレル測度である. さらに, $\mathbb{B}^3$上の測地的流れ φ_t, $t\in\mathbb{R}$, でも不変である. そこで Ω 上のボレル測度mを, $m(E)=m'(E')$ で定義する. ここで $E\in\mathcal{B}(\Omega)$ (Ωのボレル集合の全体), E' は $T_1(\mathbb{B}^3)$ における E の可測な代表である. $\Phi_t:\Omega\to\Omega$ を $\Phi_t(\pi(x,u))=\pi(\varphi_t(x,u))$ で定義すれば, この測度mは Φ_t-不変であることがわかる.

<u>定義5.</u> $\Lambda(\Gamma)\ni\xi$ が *point of approximation* とは, ξ を頂点とする $\mathbb{B}^3$ 内の *cone* が無限個の $\gamma 0$ ($\gamma\in\Gamma$) を含むことをいう.



さて, $\Lambda_a(\Gamma)$ を *point of approximation* の全体, $\Lambda_c(\Gamma)$ を *cusped parabolic* な不動点の全体とする.

<u>定理7.</u> $\nu(\Lambda(\Gamma))=\nu(\Lambda_a(\Gamma))$ ならば $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m)$

の上の流れ Φ_t はエルゴード的である ⌟

<u>定義6.</u> Klein群 Γ が幾何学的有限であるとは，Γ のディリクレ基本多面体が有限個の面よりなることをいう ⌟

Γ を幾何学的有限な Klein群とすると Beardon-Maskit [4] により $\Lambda(\Gamma)=\Lambda_c(\Gamma)\cup\Lambda_a(\Gamma)$．一方 $\#\Lambda_c(\Gamma)\leqq\aleph_0$．従って定理6より $\nu(\Lambda(\Gamma))=\nu(\Lambda_a(\Gamma))$．ゆえに定理7より

<u>系.</u> Γ を幾何学的有限な Klein群とすると，$(T_1(\mathbb{B}^3)/\Gamma, \mathcal{B}(T_1(\mathbb{B}^3)/\Gamma), m)$ 上の流れ Φ_t はエルゴード的である ⌟

参考文献

[1]. L. V. Ahlfors, *Möbius transformations in several dimensions*, Univ. of Minnesota, 1981.

[2]. A. F. Beardon, *The exponent of convergence of Poincaré series*, Proc. London Math. Soc., 18 (1968) 461-483.

[3]. A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Discrete groups and automorphic functions, Acad. Press, 1977.

[4] A. F. Beardon - B. Maskit, *Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra*,

Acta Math., 132 (1974) 1–12.

[5]. E. Hopf, Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature, Bull. of the American Math. Soc., 77 (1971) 863–877.

[6]. M. Nakada, A theorem on geometrically finite Kleinian groups, to appear.

[7]. S. J. Patterson, The limit set of a Fuchsian group, Acta Math., 136 (1976) 241–273.

[8]. D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publ. Math. I. H. E. S., 50 (1979) 171–202.