

# 多自由度発振器における同期現象 — 波形に基づいた現象の考察 —

京都大学 工学部

倉光 正己  
Kuramitsu Masami  
高瀬 冬人  
Takase Fuyuto

## 1. まえがき

本報告では、図1のような負性抵抗発振器において、各共振器の固有周波数が簡単な整数比の関係にある場合、どのような同期現象が生じるかを振動波形に着目して考察する。

従来、このような同期現象は多重モード発振との関連で関心が持たれており、能動素子特性が3次特性（軟発振特性）の場合のいくつかの例については、以前に報告した<sup>(1)</sup>しかし、ある非線形特性に対し、周波数間にどのような関係が成り立つとき、どんな同期振動が生じるか、という事について一般的には明確なことは知られていない。

筆者等は、先に、多自由度発振器の新しい解析法として平均ポテンシャル関数を用いる方法を提案した<sup>(2)-(5)</sup>。平均ポテンシャルは

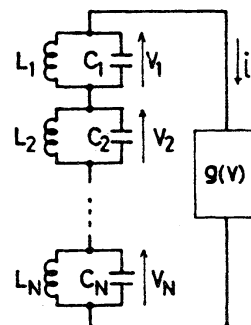


図1. N自由度発振器

系全体の損失（散逸関数）の時間平均を表わす量で、その値が時間の経過と共に減少するという「損失極小化」の性質をもつ。従って、安定な振動は平均ポテンシャルの極小点として与えられる。種々の発振回路の解析を行い、この方法が非同期振動に関しては非常に有力な方法であることを確かめた。(3)-(8) 本報告では、この「損失極小化の原理」が同期現象を理解するにも有効であり、同期振動波形が、すべてその波高値が一定となるような特徴ある波形となることを説明できることを述べる。(9), (10)

## 2. 同期振動波形の予想

### 2.1 平均ポテンシャルと損失極小化原理 (2)-(5)

最も簡単な多自由度発振器の例として図1の回路を考える。図中の記号を用いれば、回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} L_k \frac{di_k}{dt} &= V_k \\ C_k \frac{dV_k}{dt} &= -i_k - g(V) \\ V &= \sum_{k=1}^N V_k \end{aligned} \quad (k=1, \dots, N) \quad (1)$$

ここで、能動素子の特性  $i=g(V)$  は可積分な1価関数であるとする。電流  $i=g(V)$  が微小のとき、平均ポテンシャルは次のように求められる。まず、この系の損失分（散逸関数）を表わす電圧ポテンシャルは次式で与えられる。

$$G(V) = \int i dV = \int g(V) dV \quad (2)$$

一方, (1)式において  $g(V) \equiv 0$  とおいた線形保存系の一般解を求めると次式となる。

$$V = \sum_{k=1}^N V_k = \sum_{k=1}^N r_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \quad (3)$$

$$\omega_k = 1/\sqrt{L_k C_k} \quad ; \quad (\text{共振器の固有周波数})$$

$i = g(V)$  が微小のとき, (1)式の解を(3)式の形に仮定する。(3)

式を(2)式に代入し, 時間平均すれば, 平均ポテンシャル

$U(r_1, \dots, r_N, \theta_1, \dots, \theta_N)$  が得られる。すなわち, (4)

$$U(r_1, \dots, r_N, \theta_1, \dots, \theta_N) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G\left[\sum_{k=1}^N r_k \sin(\omega_k t + \theta_k)\right] dt$$

平均ポテンシャルは時間と共に減少し, 従って安定な振動は平均ポテンシャルの極小点として求められる。以下, この性質を「損失極小化の原理」と呼ぶ。

各固有周波数間に特殊な関係のない非共振の場合, 平均ポテンシャル  $U$  は振幅  $r_1, \dots, r_N$  のみの関数となり, その極小点は比較的簡単に求められる。しかし, 各周波数比が簡単な整数となるような共振の場合には,  $U$  は位相角  $\theta_j$  を含む多くの項を持つことになり, その極小値を求める計算はそう簡単ではない。そこで, このような共振現象の理解のためには, さらに何等かの工夫が必要となる。

## 2.2 電圧分布に注目した平均化操作の解釈<sup>(11)(12)</sup>

ここで, (4)式の平均化の意味を考へる。  $T$  が十分大きい時,

(3)式で与えられる  $V$  は, 次の区間の値をとる。

$$-\sum_{k=1}^N r_k \leq V \leq \sum_{k=1}^N r_k \quad (5)$$

しかし, (5)式の区間内で,  $V$  の時間分布は一様ではなく,  $V$  の値によって異なる。  $V$  の出現する頻度を表す関数 (分布密度関数) を  $W(V; r_1, \dots, r_N, \theta_1, \dots, \theta_N)$  と書けば,  $V_0 \leq V \leq V_0 + \Delta V$  となる確率は  $W \cdot \Delta V$  と表せる。この関係を用いると,

(4)式の積分は,  $W$  を重み関数とした  $G(V)$  の積分の形に書ける。

$$U(r_1, \dots, r_N, \theta_1, \dots, \theta_N) = \int_{-\infty}^{\infty} G(V) W(V; r, \theta) dV \quad (6)$$

ここで,  $G(V)$  は与えられた能動素子の特性のみから決まり,  $W(V)$  は生じる振動の種類のみによって決まる。従って,  $W(V)$  は「損失極小化の原理」に従い, 振動の初期状態から, (6)式の値を小さくする方向へと変化して行く。すなわち,  $G(V)$  の値の低いところでは  $V$  の存在頻度が高くなり, 高いところでは  $V$  の存在頻度が低くなるように,  $W(V)$  の形 (振動の振幅, 位相) が変化して行く現象を理解できる。

筆者等はすでに, (3)式で与えられる解の固有周波数が互に無関係である非共振の場合について, 分布密度関数  $W(V)$  の形を求め, 単一モード振動や非同期2重モード振動の生じる機構を明らかにした。<sup>(11), (12)</sup> 固有周波数の比が簡単な整数となる共振の場合, どのように考えれば良いのであろうか。

### 2.3 同期による波形整形作用

共振器の周波数は自由に選ぶことができ、それらを用いて能動素子に任意の波形の電圧を印加できるものとする。そのとき(6)式の $\psi$ を最小とする分布密度関数(すなわち波形)はどのような形であるのか。それは明らかに $G(V)$ の極小点付近に鋭いピークをもち、その他の点では0となるような形である。換言すれば、電圧波形が $G(V)$ の極小点付近に長時間とどまり、その他の値のときはすばやく動くような形のとき $\psi$ は最小となる。その理想的なものが方形波である。すなわち、適当な固有周波数を用意してやれば、能動素子は「損失極小化の原理」を満たすために、方形波に近い波形を作るものと予想される。

具体的な素子特性と波形の関係は次のようになる。簡単のため、ここでは $i = g(V)$ が奇関数の場合を考える。まず、次式の3次式で代表されるような軟発振特性の場合を考える。

$$i = g(V) = -g_1 V + g_3 V^3 \quad g_1, g_3 > 0 \quad (7)$$

電圧、電流の規格化により、次の形に限っても一般性は失われない。

$$i = g(V) = \mu(-V + V^3/3) \quad (8)$$

このとき電圧ポテンシャルは

$$G(V) = \int i dV = \mu(-\frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{12}V^4) \quad (9)$$

となり、その極小点は、 $V_s = \pm\sqrt{3}$  にある。従って、図1の系では  $\pm\sqrt{3}$  を振幅とするような方形波が平均ポテンシャルを最小とする。

次に、5次式で代表されるような硬発振特性を考える。<sup>(7)(8)</sup>

$$i = g(V) = g_1 V - g_3 V^3 + g_5 V^5 \quad g_1, g_3, g_5 > 0 \quad (10)$$

規格化により、次のように置いても一般性を失わない。

$$i = g(V) = \mu \left( V - \frac{\beta}{3} V^3 + \frac{1}{5} V^5 \right) \quad \beta = 3g_3 / \sqrt{5g_1 g_5} \quad (11)$$

$$\text{従って, } G(V) = \mu \left( \frac{1}{2} V^2 - \frac{\beta}{12} V^4 + \frac{1}{30} V^6 \right) \quad (12)$$

$G(V)$  の極小点は次の3個である。

$$V_0 = 0, \quad V_R = \pm \sqrt{\frac{5}{6} (\beta + \sqrt{\beta^2 - 7.2})} \quad (13)$$

従って、(13)式の3つの値を適当な周期で切りかわる階段波形が平均ポテンシャルを極小とする。 $V_s$  及  $V_R$  のように、電圧ポテンシャルを極小とする電圧を以下「停留電圧」と呼ぶ。これは、能動素子の側からみて最も「望ましい」電圧である。

さて、実際の回路、図1において共振器の周波数をどのように定めると、上述の予想が確かめられるであろうか。周期的な方形波は、奇数調波成分のみのフーリエ級数に展開できるから、コイル、コンデンサの値を次のように設定する。

$$L_k = L_0 / (2k-1)^2, \quad C_k = C_0 \quad (k=1, \dots, N) \quad (14)$$

すなわち、固有周波数の比が、 $1:3:5:\dots:(2N-1)$  である図1の発振器には、周期的方形波の近似波形が生じることが予

想される。

### 3. 3次特性による同期振動波形

#### 3.1 方形波近似波形

図1の系において、まず能動素子の特性が(8)式のような3次特性の場合を考える。共振器の数(系の自由度) $N$ を、それらの固有周波数が $1:3:5:\dots:(2N-1)$ の関係を満たしながら、1から6まで増加して行ったとき、方形波近似波がどのように変化するか、シミュレーションした結果を図2に示す。各図上段は能動素子にかかる電圧波形で、下段はこの

波形を構成する各周波数成分、すなわち、各共振器の電圧波形であり、中段は能動素子を流れる電流波形である。また、これらの波形の構成モードの振幅を、平均ポテンシャルの極小点より求め、そ

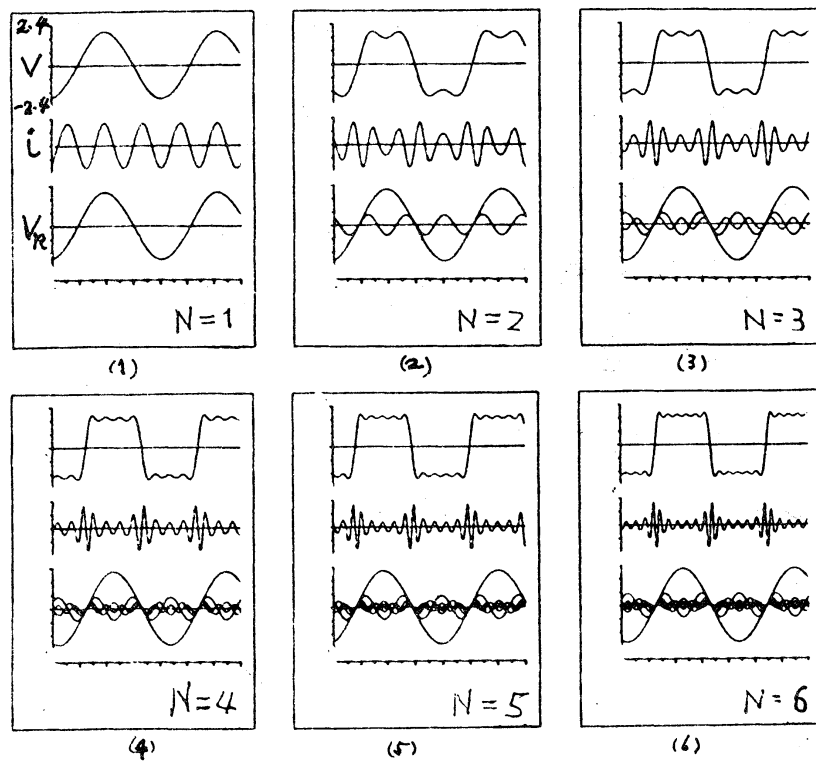


図2. 方形波近似波形の自由度 $N$ の増加に対する変化

れを表1に示す。表の  
最下段  $N=\infty$  は、振幅  
が  $\sqrt{3}$  の周期的方形波の  
フーリエ展開を示す。

これらの図および表よ  
り、 $N$  の増加と共に各

構成モードの振幅は増加しつつ、全体の電圧波形は方形波に  
近づいていくことがわかる。それと同時に、能動素子を流れる  
電流（従って損失）は小さくなることがわかる。特に、図  
2の  $N=2$  は、よく知られた1:3同期振動の波形であるが、<sup>(1)</sup>  
実はこれが、正弦波（同図  $N=1$ ）が方形波に近づいてゆく第  
1段階であることがわかり、興味深い。

### 3.2 同期振動の個数

固有周波数の比が  $1:3:5:\dots:(2N-1)$  のとき、同期現象に  
より停留電圧  $\pm\sqrt{3}$  を切りかわるような、いわゆる方形波に近  
い振動波形が生じるという予想は、図2の結果により確かめら  
れた。それでは、停留電圧を切りかわるような波形は図2の  
ようなタイプのものだけであるうか。

$N=2$  のとき、よく知られているように、図2(2)の同期振  
動の他に、初期値により  $\omega=3$  の単一モード振動も安定に生  
じる。これは、正弦波が方形波の第1近似となることを意味

N	$r_1$	$r_3$	$r_5$	$r_7$	$r_9$	$r_{11}$
1	2.0000					
2	2.1362	0.5931				
3	2.1705	0.6618	0.3380			
4	2.1842	0.6899	0.3768	0.2347		
5	2.1911	0.7042	0.3969	0.2595	0.1794	
6	2.1950	0.7125	0.4086	0.2741	0.1965	0.1450
$\infty$	2.2053	0.7351	0.4411	0.3150	0.2450	0.2005

表1. 方形波近似波形の各調波成分の振幅  
(3次能動素子)



すが〔図2(1)〕, 同期現象とは関係がない。

$N=3$  のとき, (4)式により平均ポテンシャルを求めると, 次式となる。

$$U(r_1, r_3, r_5, \theta_1, \theta_3, \theta_5) = \mu \left[ -\frac{1}{4} (r_1^2 + r_3^2 + r_5^2) + \frac{1}{96} \{ 3(r_1^4 + r_3^4 + r_5^4) + 12(r_1^2 r_3^2 + r_3^2 r_5^2 + r_5^2 r_1^2) - 4r_1^3 r_3 \cos(3\theta_1 - \theta_3) - 12r_1^2 r_3 r_5 \cos(2\theta_1 + \theta_3 - \theta_5) + 12r_1 r_3^2 r_5 \cos(\theta_1 - 2\theta_3 + \theta_5) \} \right] \quad (15)$$

(15)式の極小点を求めると, 次の4個が得られる。

$$1) r_1 \doteq 2.17, r_3 \doteq 0.66, r_5 = 0.34, \theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = 0 \quad (16)$$

$$2) r_1 \doteq 1.04, r_3 \doteq 1.52, r_5 = 1.04, \theta_1 = 0, \theta_3 = \theta_5 = \pi \quad (17)$$

$$3) r_1 = 0, r_3 = 2, r_5 = 0 \quad [\omega = 3 \text{ の単一モード振動}] \quad (18)$$

$$4) r_1 = 0, r_3 = 0, r_5 = 2 \quad [\omega = 5 \text{ の単一モード振動}] \quad (19)$$

3), 4) は同期に関係ない単一モード振動である。1), 2) の振動波形を図3に示す。1)は図2にも示した方形波近似波である。

2)が, いわゆる方形波とは異なる同期振動である。以上の結果から類推すると, さらに  $N$  の大きい系において, 一般に単一モード振動は安定であろう。ただし  $\omega = 1$  のモード(基本波)は高調波成分が付け加わることにより, 方形波近似波に変化する。これらの他に図3(2)のような方形波以外の同期振動

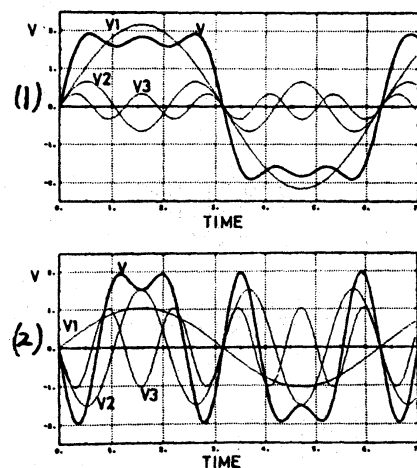


図3. 1:3:5同期による3重モード振動

がいくつか存在するが、その個数は $N$ の増加と共に急速に多くなるものと思われる。 $N=5$ （周波数比1:3:5:7:9）の場合に生じる振動波形を、図4下段に示す。中段は各構成モードの波形である。(11), (12), (10)はそれぞれ $\omega=5, 7, 9$ の単一モード振動である。(1)は $\omega=1$ に高調波が加わった方形波近

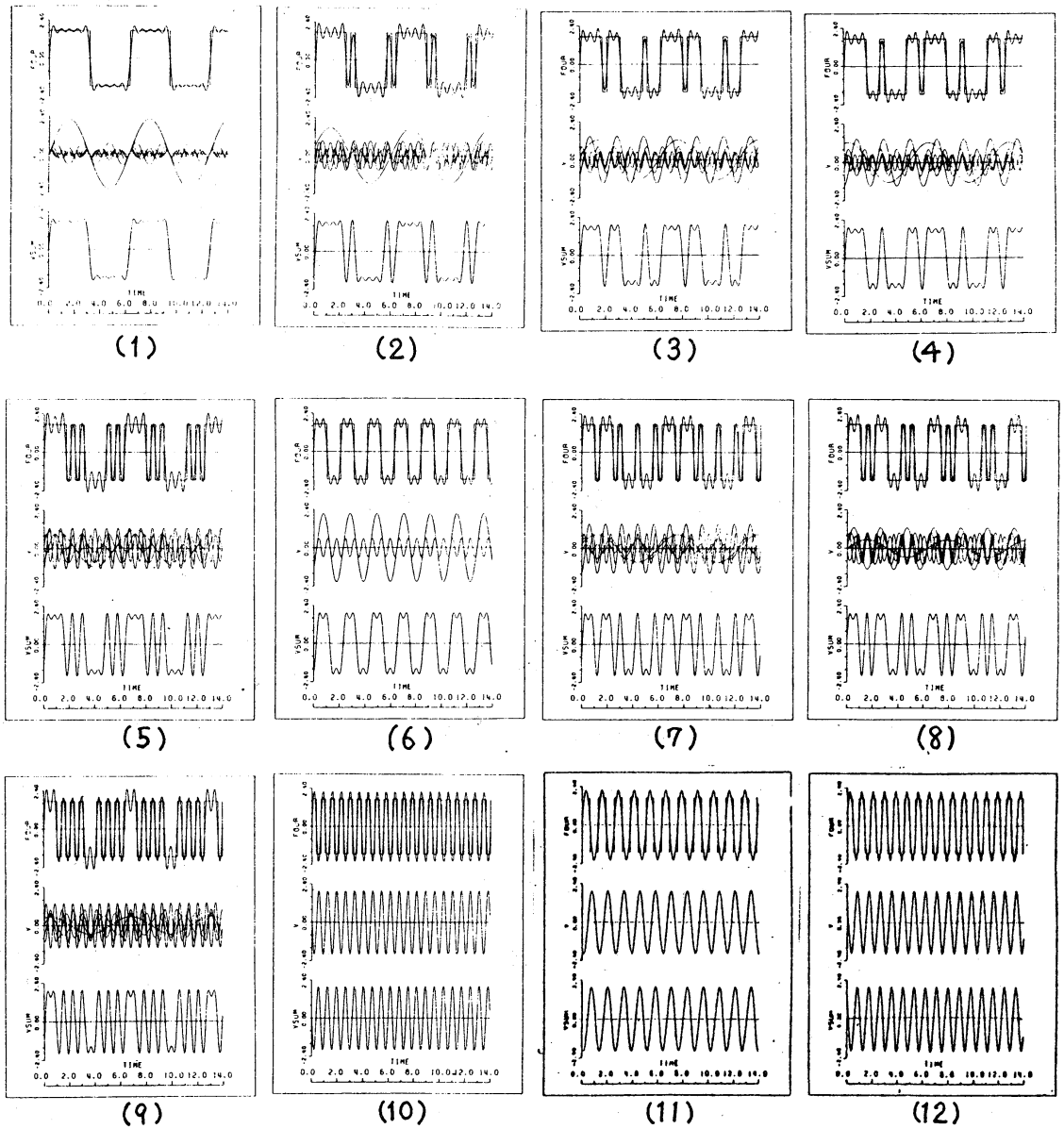


図4. 同期振動波形 [3次特性,  $N=5$ ]

似波であり、(6)は  $\omega=3$  に3倍高調波 ( $\omega=9$ ) が加わった波形 [図2(2)] で、やはり方形波近似波である。これら以外の7個のものが、方形波以外の同期振動である。しかしながらこれらの波形もすべて、電圧ポテンシャルの極小点に対応する停留電圧を順次切りかわる波形であって、広義の方形波と見ることができ、2節で述べた予想通りの波形である。

### 3.3 文字列による波形の表現

図4の波形を出し分けることは、5個の共振器に与える初期条件を様々に変化させることにより可能であるが、実際問題としては、 $N$  の大きい系に対しては、これは非常に能率の悪い方法である。そこで、同期振動波形の特徴に着目した方法を考えてみる。図4に示したように、同期振動波形はすべて電圧ポテンシャルの極小点付近で停留する波形、すなわち停留電圧付近で小さな山と谷をもつ形となる。そこで  $\pm$  の停留電圧をそれぞれ  $+$ ,  $-$  の記号で表わすことにし、同期振動波形の極値 (山または谷) がどちらの停留電圧に近いかによって  $+$ ,  $-$  の記号をあてはめる。一オ、有限フーリエ級数で表される周期関数において、その1周期内の極大点、及び極小点の個数は、最高次数  $(2N-1)$  の周波数成分の極大値、極小値の個数  $(2N-1)$  を越えない」ことが示されるから、振動波形はすべて  $2L$  [ $\leq 2(2N-1)$ ] 個の  $+$ ,  $-$  の文字列で表現でき



れる振動はすべて安定に生じることを確かめた。また、共振器に勝手な初期値を与え、数値積分によっても、これら予想されたもの以外に安定なものは見出されておらず、この方法は安定な振動波形を求め、能率的な方法と言える。

#### 4. 5次特性による同期振動波形

図1の回路において能動素子の特性が(11)式のような5次特性(硬発振特性)の場合、同期現象はどのように変化するか。第2節の考察から明らかな通り、同期振動が停留電圧を切りかわるような波形をとることに変わりはない。ただ、5次特性の場合、停留電圧が(15)式に示したように $\pm V_R$ と0の3個存在する。従って、3次特性の場合に比べ同期振動の種類は増加することが予想される。

$N=2$ (周波数比1:3)の場合、図5に示すように3個の同期振動が存在する。(1)は $\pm V_R$ のみを用いた方形波近似波形で3次特性の場合[図2(2)]と似た波形となる。(2)及び(3)は停留電圧0をも利用した同期振動波形である。この他に $\omega=3$ の単一モード振動も存在するのはもちろんである。

これらの振動を出し分けるため、3.3節と同様に、同期振動波形を文字列で表現する方法を用いることができる。ただし、文字列は $V_R, -V_R, 0$ に対応して+, -, 0の3文字で構成さ

れる。実現可能な文字列を表3に示した。

$N=3$  の場合に生じる振動波形を図6に示す。これらの波形は図4の場合と同様に、表3の文字列を用いて初期値を求め(上段)、数値積分の結果、中段(構成モード)、下段(全体波形)が得られた。図中、(13)、(3)は

$\omega=3, 5$  の単一モード振動である。(1)は $\omega=1$  に高調波が加わって成された方形波近似波で、図3(1)に似ており、(2)の波形も図3(2)に似ている。以上の波形はすべて停留電圧0を用いていない振動で、本質的に3次特性の場合と同じである。残る9種類の同期波形はすべて停留電圧0を用いたもので、5次特性を用いて初めて生じるものである。

### 5. 能動素子から見た同期現象の理解

本報告で用いた方法は、従来の方法にあまり見られなかつ

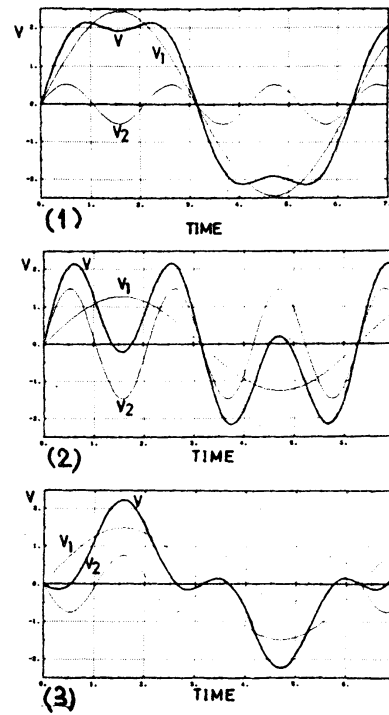


図5. 1:3同期による2重モード振動(5次特性)

表3. 同期振動波形の文字表現 [5次特性の場合、半周期分]

$N=2$ ( $l=3$ )	
1	+++
2	+--
3	+0+
4	+00
5	000
$N=3$ ( $l=5$ )	
1	+++++
2	+++--
3	+--++
4	+++0+
5	+++0-
6	+--+0
7	+++00
8	+0+0+
9	+--+00
10	+0+00
11	+000+
12	+0000
13	00000
$N=4$ ( $l=7$ )	
43 個	
$N=5$ ( $l=9$ )	
166 個	

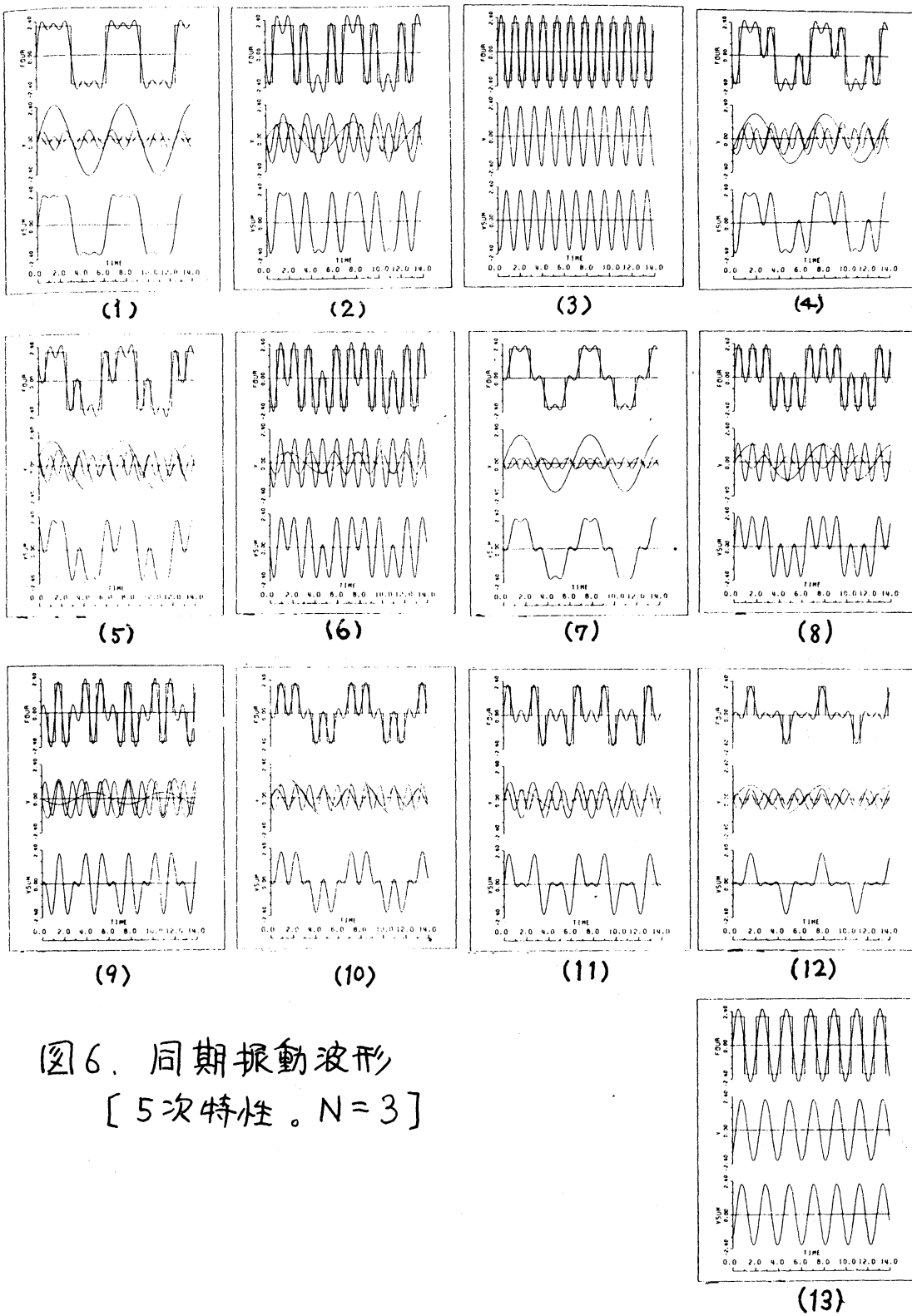


图6. 同期振動波形  
 [ 5次特性。N=3 ]

た新しい視点に立っている。すなわち、従来の平均法等では、まず能動素子を取り去った保存振動系を出発点とし、能動素子がつけ加えられることにより振動系がどのような影響を受けらるかを考之ようとする「振動系(共振回路)の立場」からの理解の仕方であった。この場合、解析の結果は各周波数成分の振幅、位相の数値量として表現され、厳密ではあるが直観的な把握には適していない。

これに対し、本報告で用いた方法は「能動素子の立場」に立ち、時間領域での「波形を重視」した方法である。能動素子にとって、損失が最小となる最も理想的な状態(停留電圧)が存在することに着目すると、このような能動素子に振動回路が結合された時、現象は用意された周波数成分を利用して損失極小の理想状態に近づくよう変化する。その結果、方形波近似波形をはじめとする各種の同期波形が生じてくる。このような解釈によれば、同期現象は系の損失をより小さくするため生じるものと理解できる。このようにして、現象の全体像が理解できると、安定となるべき波形が推定でき、それを用いてシミュレーションが効率良く行えることは前節までに見た通りである。

上述のような2つの視点は共に重要なものであり、互に補い合うべきものである。しかし、非線形能動素子の立場から



の現象の理解,あるいは,時間領域での波形による現象の理解という視点は,従来の非線形振動の研究で見落されていった点ではあるまいか。

## 謝辞

本研究に関して御討論,御激励頂いた京都大学工学部,西川禎一教授,同,上田暎亮助教授,研究に御協力頂いた同,学生,新田博之氏,上田博之氏(現中国電力)に心より感謝致します。

## 文 献

- (1) 倉光: 多自由度発振器における多重モード振動と相互同期現象, 京都大学数理解析研講究録 370 (1979.12).
- (2) 倉光, 高瀬: 平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析法, 電子通信学会技術研究報告 NLP 79-38 (1980).
- (3) 倉光, 高瀬, 田所: 平均ポテンシャルを用いた格子状結合された発振器群の解析, 電子通信学会技術研究報告 NLP 80-2 (1980).
- (4) 倉光, 高瀬: 格子状結合された発振器群における多重モード振動, 京都大学数理解析研究所講究録 413 (1981.1).
- (5) Kuramitsu, Takase: A New Approach for the Analysis of Multi-mode Oscillators Based on the Averaged Potential, IEEE ISCAS 1981.

- (6) 倉光,高瀬: 能動素子を部分的に入れたはしご状発振器の平均ポテンシャルによる解析, 電子通信学会技術研究報告 NLP80-20 (1980).
- (7) 倉光,高瀬: 硬い発振特性をもつ多自由度発振器の平均ポテンシャルによる解析. 電子通信学会技術研究報告 NLP81-13 (1981).
- (8) 倉光,高瀬: 軟らかい発振と硬い発振, 京都大学数理解析研究所講究録 443 (1981.12).
- (9) 倉光,高瀬,新田,上田: 整数比の固有周波数をもつ多自由度発振器における同期現象, 電子通信学会技術研究報告 NLP82-4 (1982).
- (10) 同上, (II), NLP82-15 (1982).
- (11) 倉光,高瀬: 多自由度発振器の解析における平均化の意味, 電子通信学会技術研究報告 NLP81-26 (1981).
- (12) 同上 (II) NLP81-35 (1982).