

Duffing 方程式系のストレンジアトラクタ の混合性について

京工繊大	工芸	小倉久直 Ogura Hisanao
京大	工	上田暁亮 Ueda Yoshisuke
京工繊大	工芸	吉田靖夫 Yoshida Yasuo

1 まえがき

Duffing 方程式を周期的外力で励振した場合の位相面解析、ストレンジアトラクタ、定常なカオス過程の調和解析などについては著者の 1 人がこれまでいくつかの報告を行ってきた^{1)~4)}。更にカオス的解過程は周期的移動で不変な確率分布をもつ確率過程、すなわち周期定常過程⁵⁾、の見本関数とみなしうることを時系列解析⁶⁾で示し、周期定常過程を特徴づける一連の相互スペクトル密度の推定を行った^{7), 8)}。

ここでは相空間内の解過程の外力周期毎のストロボ的写像で定まる離散的力学系を考える。定常カオス過程の周期毎の断面集合つまりストレンジアトラクタ S はこの写像で不変でかつ漸近安定な集合であるが、内部の点または点集合は時間と共に彷徨し時間が経過すれば S 内に混合または拡散する。

この混合は力学系固有のものであるが、一方系に加わる雑音によっても加速される。以下ではこの混合度を表す統計量として情報理論で用いる平均相互情報量を導入し、系の種々のパラメタ値の数値解に対して混合度の時間的变化を調べる。更に混合の速さを以前に求めた不安定さを示す特性指数量と比較する。

2 Duffing 方程式・離散力学系

1 つの例として次の Duffing 方程式を取扱う；

$$\frac{dX}{dt} = Y, \quad \frac{dY}{dt} = -kY - X^3 + B \cos t \quad (1)$$

2次元位相平面 R^2 上の解過程 $X(t) = (X(t), Y(t))$ の周期 2π 毎の断点の写像 $T_\lambda; R^2 \rightarrow R^2$, $\lambda = (k, B)$ の定める離散力学系を考える：

$$X(2\pi n) = T_\lambda^n X(0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

$$T_\lambda^{n+m} = T_\lambda^n T_\lambda^m, \quad T_\lambda^0 = 1 \quad (3)$$

Duffing 方程式 (1) の定常なカオス過程のストレンジアトラクタ (Ueda アトラクタ) を S_λ と記す。 S_λ は T_λ 不変な点集合で、 $\rightarrow R^2$ 上の Lebesgue 測度の 0 の集合と考えられる。 S_λ 上に T_λ 不変な (確率) 測度 P が存在して

$$P(A) = P(T_\lambda^n A), \quad A \in \mathcal{A}, \quad -\infty < n < \infty, \quad P(S_\lambda) = 1 \quad (4)$$

ここで P を定義する S_λ 上の加法族 \mathcal{A} は R^2 上の任意の区間と S_λ の積集合を含み、更に $A \in \mathcal{A}$ ならば、すべての n に対して

$T^n A \in \mathcal{A}$ なるものとする。 T_λ は (2) で定義される変換写像であるが、 S_λ 上の写像に関する限り集合の写像として確率 0 の集合を除き (3) が成立するものとする。すなわち T_λ^n を確率空間 $(S_\lambda, \mathcal{A}, P)$ の保測変換群と同一視する。次に同相写像 ϕ_a ;

$$(\phi_a x)(2\pi n) = x(2\pi n + a) \quad (5)$$

によって力学系および確率空間の変換 $T_\lambda \rightarrow T_{\lambda+a}$, $(S_\lambda, \mathcal{A}, P) \rightarrow (S_{\lambda+a}, \mathcal{A}_a, P_a)$ がひきおこされる。写像 ϕ_a は 1 対 1 であって、かつ $A_a = \phi_a A$, $A \in \mathcal{A} \leftrightarrow A_a \in \mathcal{A}_a$ と $P(A) = P_a(A_a)$ を要請すれば、 S_λ 上のすべての変換で $\phi_a T_\lambda = T_{\lambda+a} \phi_a$ が成立するから、2 つの確率空間および保測変換は互に同型である。

3 平均相互情報量による混合度の評価

S_λ 上の保測変換 T_λ が任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(AT_\lambda^n B) = P(A)P(B) \quad (6)$$

の性質をもつとき T_λ は混合的であるという。混合性は時間と共に初期条件の影響がなくなることを意味する。混合的ならばエルゴード的であり、大数の法則すなわちエルゴード定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T^k x) = \langle f(x) \rangle \equiv \int_{S_\lambda} f(x) dP(x) \quad (7)$$

が成立する。左辺は力学系の軌道に沿う時間平均、右辺は S_λ 上の確率 (不変測度) による平均 (積分) を表す。

ここで T_λ の時間に依存する混合度を評価する統計量を定義

しよう。簡単の爲に T_λ を T と略記する。 S_λ の有限な分割を $\Delta \equiv \{\Delta_i, i=1, \dots, M\}$

$$\Delta: S_\lambda = \sum_{i=1}^M \Delta_i, \quad \Delta_i \cdot \Delta_j = \phi, \quad i \neq j \quad (8)$$

とする。分割 Δ に関する S_λ 上の定常な確率分布

$$P(i) \equiv P(\Delta_i), \quad i=1, \dots, M \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^M P(\Delta_i) = 1, \quad P(\Delta_i) = P(T^n \Delta_i) \quad (10)$$

を定義し、更に $S_\lambda \times T^n S_\lambda$ 上の結合確率分布を

$$P(i, j) \equiv P(\Delta_i T^n \Delta_j), \quad i, j=1, \dots, M \quad (11)$$

$$\sum_i \sum_j P(\Delta_i T^n \Delta_j) = 1 \quad (12)$$

とおく。(11)は T 不変であって、 $X_m \equiv X(2\pi m) \in \Delta_j$ であってかつ $X_{m+n} \in \Delta_i$ である確率を表す。更に条件付確率分布を

$$P(i|j) \equiv P(\Delta_i T^n \Delta_j | \Delta_j) \equiv \frac{P(\Delta_i T^n \Delta_j)}{P(\Delta_j)} \quad (13)$$

とおく。これは $X_m \in \Delta_j$ の条件のもとで $X_{m+n} \in \Delta_i$ である確率をあらわす。

$$I(\Delta_i) \equiv -\log P(\Delta_i) \quad (14)$$

を分割 Δ に関する情報量、

$$I(\Delta_i | T^n \Delta_j) \equiv -\log P(\Delta_i T^n \Delta_j | \Delta_j) \quad (15)$$

を条件付情報量という。2つの情報量の差

$$I(\Delta_i; T^n \Delta_j) \equiv I(\Delta_i) - I(\Delta_i | T^n \Delta_j) = \log \frac{P(\Delta_i T^n \Delta_j)}{P(\Delta_i) P(\Delta_j)} \quad (16)$$

は $X_m \in \Delta_j$ であることから $X_{m+n} \in \Delta_i$ に関して得る情報量で、これを相互情報量という。

平均情報量(エントロピー)および平均条件付情報量(条件付エントロピー)は、それぞれ

$$H(\Delta) \equiv \langle I(\Delta_i) \rangle = - \sum_{i=1}^M P(\Delta_i) \log P(\Delta_i) \quad (17)$$

$$H(\Delta | T^n \Delta) \equiv \langle I(\Delta_i | T^n \Delta_j) \rangle = - \sum_i \sum_j P(\Delta_i | T^n \Delta_j) \log P(\Delta_i | T^n \Delta_j) \quad (18)$$

で与えられ、従って平均相互情報量は

$$\begin{aligned} I(n) &\equiv \langle I(\Delta_i; T^n \Delta_j) \rangle = H(\Delta) - H(\Delta | T^n \Delta) \\ &= \sum_i \sum_j P(\Delta_i | T^n \Delta_j) \log \frac{P(\Delta_i | T^n \Delta_j)}{P(\Delta_i) P(\Delta_j)} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。エントロピーの性質によつて

$$I(n) = H(\Delta) - H(\Delta | T^n \Delta) \geq 0 \quad (n \geq 1) \quad (20)$$

であり、特に T が混合的ならば(6)によつて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = 0 \quad (21)$$

が成立つ。例えば有限 Markov 連鎖の場合には $n \rightarrow \infty$ で $I(n)$ は指数関数的に 0 に近づく。これらの性質によつて平均相互情報量を混合度の尺度にすることができ、 $I(n)$ が十分 0 に近くなれば X_m, X_{m+n} は互いにほぼ独立とみなされる。

分割 Δ を細かくすれば(19)の細分に伴うエントロピーの変化はあらわれず、連続分布の場合に(9),(11)は確率密度 $P(a)$,

$P(a, b)$ を用いて(19)は

$$I(n) = \iint_{\Omega} P(a, b) \log \frac{P(a, b)}{P(a)P(b)} da db \quad (22)$$

と書け分割によらなくなる。ただし $a = (x_{m+n}, y_{m+n})$, $b = (x_m, y_m)$ と表す。

同様にどれ位の区間 n をとれば T^n が Markov 性をもつかを見る尺度として次の平均情報量が考えられる。 $S_x \times T^n S_x \times T^{2n} S_x$ 上の結合確率分布

$$P(i, j, k) \equiv P(\Delta_i T^n (\Delta_j T^n \Delta_k)) \quad (23)$$

を用いれば2つの条件付エントロピーの差として

$$\begin{aligned} J(n) &\equiv H(\Delta | T^n \Delta) - H(\Delta | T^n \Delta, T^{2n} \Delta) \\ &= \sum_{i,j,k} P(i, j, k) \log \frac{P(i|j, k)}{P(i|j)} \\ &= \sum_{i,j,k} P(i, j, k) \log \frac{P(i, j, k) P(j)}{P(i, j) P(j, k)} \end{aligned} \quad (24)$$

が定義できる。 n を大きくとって Markov 性 $P(i|j, k) \rightarrow P(i|j)$ が実現すれば $J \rightarrow 0$ となる。

4 特性指数量

S_x 上の点 x における接ベクトル空間を考える。写像 $T_x: x_0 \rightarrow x_1 = T_x x_0$ に対応する接ベクトル $u = (\xi, \eta)$ の写像 $dT_x: u_0 \rightarrow u_1 = dT_x u_0$ は(1)により次の微分方程式からえられる:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -k\eta - 3x^2\xi \end{aligned} \quad (25)$$

1次独立な2つの解を $u_1 = (\xi_1, \eta_1)$, $u_2 = (\xi_2, \eta_2)$ とすれば容易に Wronskian W の満たす方程式

$$\dot{W} = -kW \quad (26)$$

$$W \equiv \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \quad (27)$$

がえられ、解として

$$W(t) = W(0) e^{-kt} \quad (28)$$

がえられる。特に初期条件を $u_1(0) = (1, 0)$, $u_2(0) = (0, 1)$ とすれば $W(0) = 1$ である。 $k > 0$ ならばベクトル u_1, u_2 の張る接空間上の面積は時間と共に減少することと (28) は示している。

上の初期条件を満たす 1 次独立な解 $(\xi_\nu(t), \eta_\nu(t))$, $\nu = 1, 2$ が求まれば、離散力学系 T_λ に対応する接ベクトル空間の線形写像 dT_λ は、行列

$$dT_\lambda : \begin{bmatrix} \xi_1(2\pi) & \xi_2(2\pi) \\ \eta_1(2\pi) & \eta_2(2\pi) \end{bmatrix} \quad (29)$$

で表現される。 dT_λ によって方向を変えない接ベクトルは行列 (29) の固有ベクトルであり、その長さは固有値すなわち方程式

$$m^2 - [\xi_1(2\pi) + \eta_2(2\pi)]m + W(2\pi) = 0 \quad (30)$$

の根 m_1, m_2 で与えられる。特に (28) より

$$m_1 m_2 = e^{-2\pi k} < 1 \quad (31)$$

の関係がある。 m_1, m_2 は始点 x_0 に依存するがその積は (31) により一定であり、接空間の面積の収縮度に等しい。 $\rho_1 = \max[|m_1|, |m_2|]$, $\rho_2 = \min[|m_1|, |m_2|]$ とおけば ρ_1 は接ベクトルの長さ

の拡大率, m_2 は縮小率を表すと考えられる。特に拡大率は写像 T_λ に伴う S_λ 内の点の混合の速度を表すものとみなしうる。点 $X_n = T_\lambda^n X_0$, $n=0, 1, 2, \dots$ におけるこれらの値を $\rho_1(n), \rho_2(n)$ とおきその対数の時間平均をとれば, エルゴード性により $n \rightarrow \infty$ と共に S_λ 上の平均値に収束する:

$$e_\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \rho_\nu(n), \quad \nu=1, 2 \quad (32)$$

e_ν を特性指数量とよび, (31) により

$$e_1 + e_2 = -k \quad (33)$$

の関係がある。特に e_1 は S_λ の混合の平均速度を表すものと考えられる。Ueda アトラクタに対する特性指数量はすでに文献^{2,3)} に数値的に求められている。

5 平均相互情報量による混合度の評価

平均相互情報量(19)を求めるための有限の分割としていくつかの方法が考えられる。 S_λ を含む x - y 平面上の最小矩形領域を格子状に 20×20 等分し, S_λ の点を含む格子上的点の数を数えることにより分割 Δ に対する確率分布を求める。 S_λ の形は $\lambda = (k, B)$ の値により変化するので, 適合分割とよんでおく。一方 x - y 平面上の情報量の観点からは入りに依存しない固定分割をとることができる。分割が十分細かくなれば(22)に近づく。実験結果によれば分割数, 標本数を十分大きくとれば平均相

互情報量 $I(n)$ の形状に大差はなく, $n \rightarrow \infty$ で 0 でない最終値 $I(\infty)$ に近づく。 $I(\infty)$ は標本数に依存する誤差であって後に検討を行う。

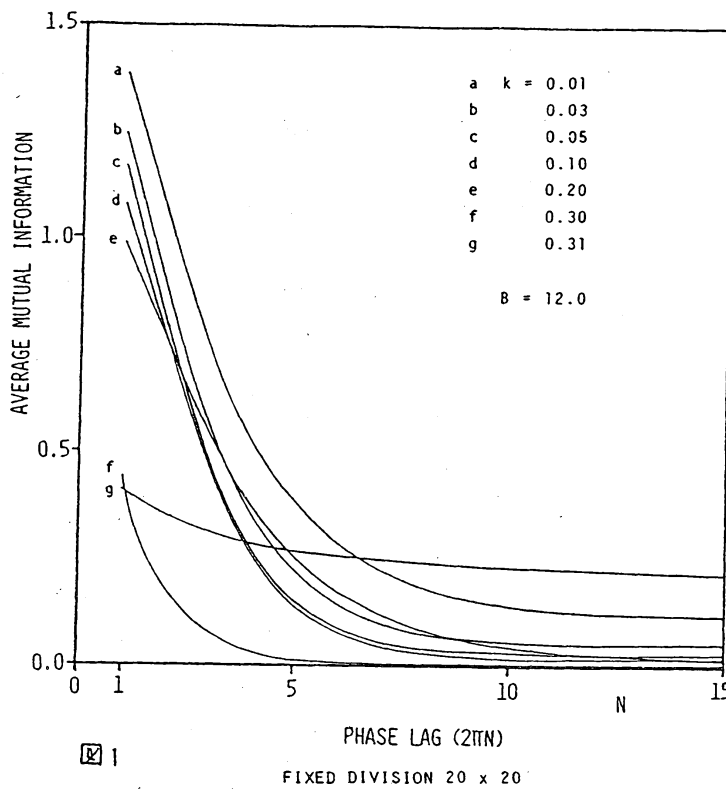
図1に $B=12$ を固定し, k をパラメタとした場合の $I(n)$ を示し, 図2は $k=0.1$ を固定し B をパラメタとした場合(固定分割)を示す。いずれの場合も $I(n)$ は時間差 n と共に指数関数的に減少し, 最終値に近づく。最終値は誤差であるので, そこでは $I(n)=0$ とみなしてよい。図から, $n=5 \sim 10$ 位の緩和時間で分布は平衡状態に達することがわかる。適合分割の場合 $I(\infty)$ は変化するが, 概形は図1, f, g 以外大差はなく, 緩和時間は変化しない。図1, 2の $\lambda=(k, B)$ に対するアトラクタ S_λ の形状は文献²⁾ Fig. 4, 5に示されている。

図3, 4は(13)の条件付分布 $P(\Delta_i T^n \Delta_j | \Delta_j)$ に相当するアトラクタ内の真分布を示し, アトラクタ内の局在真集合が時間と共に S_λ に拡散する変遷図である。×印が Δ_j に相当する初期値の局在領域の中心を示す。初期値に関係なく $n=10$ で定常状態に達する。これは図1の曲線 d (図2, c) の $I(n)$ が最終値に近づく時間と一致する。又初期領域を更に細分割しても緩和時間は変化しない。次に, 局在初期値として S_λ の真の代りに局在領域内に一様に分布する真をとるときは, 緩和は急速で $n=3 \sim 4$ で平衡分布に達する。

図 1, 2 の示す $I(n)$ は指数関数的に減少するが減少指数は n によって多少変化するもので、緩和時間内での平均値

$$\bar{e} = \ln \frac{I(n)}{I(n+1)} \quad (34)$$

をとり(32)の特性指数量と比較しよう。(34)の計算では誤差である最終値 $I(\infty)$ は差引くものとする。(32)では時間平均として $2\pi n$ で除されている。図 5, 6 は平均相互情報量の減少指数 \bar{e} と特性指数量 e_1 との比較を示す。 λ を変えれば S_λ の大きさが変化するるので、同じ特性指数量でも S_λ が小さければ緩和は速くなるので両者を同一視できないうが、 S_λ の大きさが変らなければ両者は定性的により一致を示している。



ストロボ断面の位置を移動した力学系

T_{2a} :

$$X(a+2\pi n) = T_{2a}^n X(a) \quad (35)$$

$$n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, 0 \leq a < 2\pi$$

に対して上と同様の考察を行うことができる。一般にアトラクタ S_{2a} の形状は a と共に変化する。 $a =$

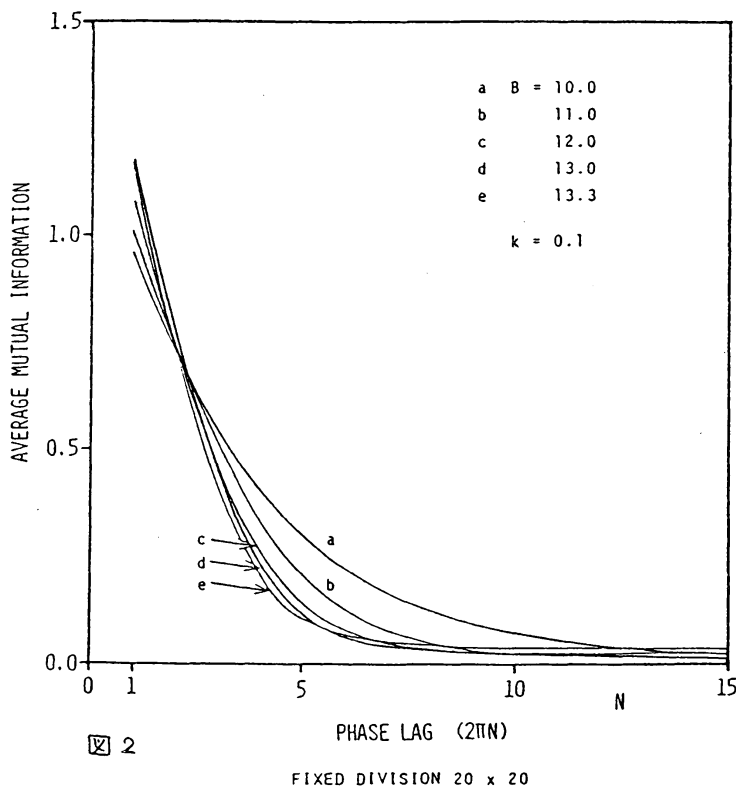


図 2

$\pi/2$ とした場合の平均相互情報量 $I_a(n)$ の変化を種々の $\lambda=(k, B)$ に対して求めたものが図 7, 8 である。分割は上と同様 20×20 の格子状にとっている。図 1, 2 と比較すればわかるように $I(n)$ の形は殆ど同一であり、緩和時間および

平均減少指数は 2 つのカ学系に対し殆ど同じ値がえられる。このことは 2 つのカ学系が同相写像 (5) で結ばれているから当然予想できる。

図 9 は局在初期領域を图中的のロ印にとった場合のアトラクタの変遷図を示す。図 3, 4 と同様に緩和時間 $n=10$ 迄に定常分布に達することが一見して明らかである。

図 1. 平均相互情報量 $I(n)$

パラメタ $k, B=12$ 一定, 固定分割 20×20

図 2. 平均相互情報量 $I(n)$

パラメタ $B, k=0.1$ 一定, 固定分割 20×20

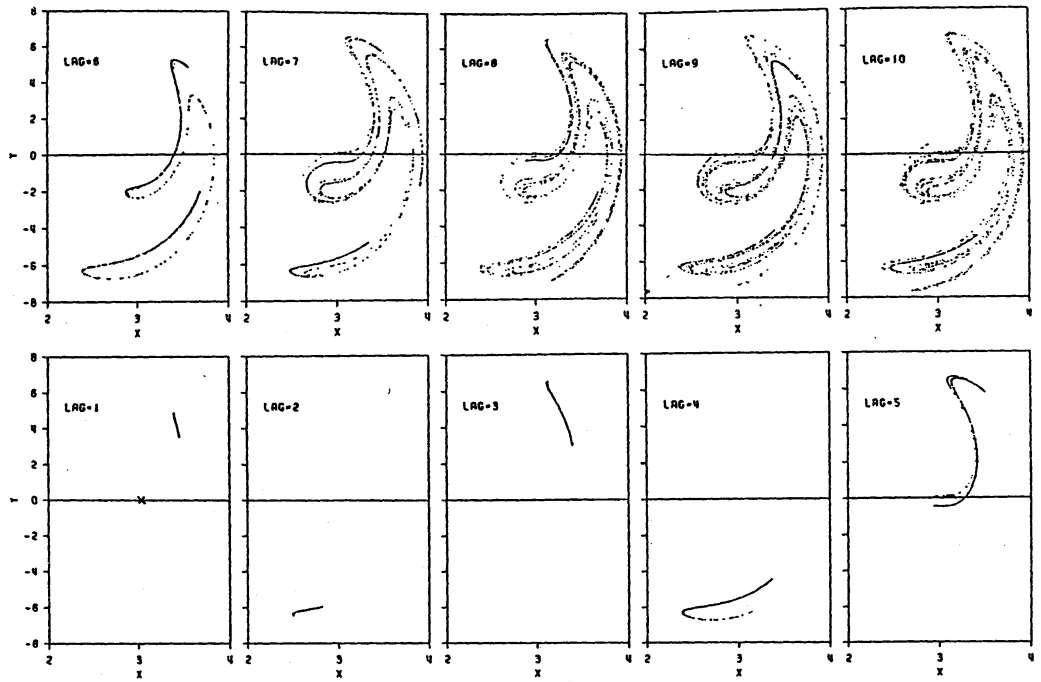


図3. 局在初期値からのアトラクタの変遷図, $k=0.1, B=12.0$

初期値領域 $[(X_0, Y_0) | 3.00 \leq X_0 \leq 3.05, -0.1 \leq Y_0 \leq 0.1]$, 中心位置 \times 印
 領域内の S_λ の点数 1499 個, (S_λ の総点数 4.8×10^5 個)

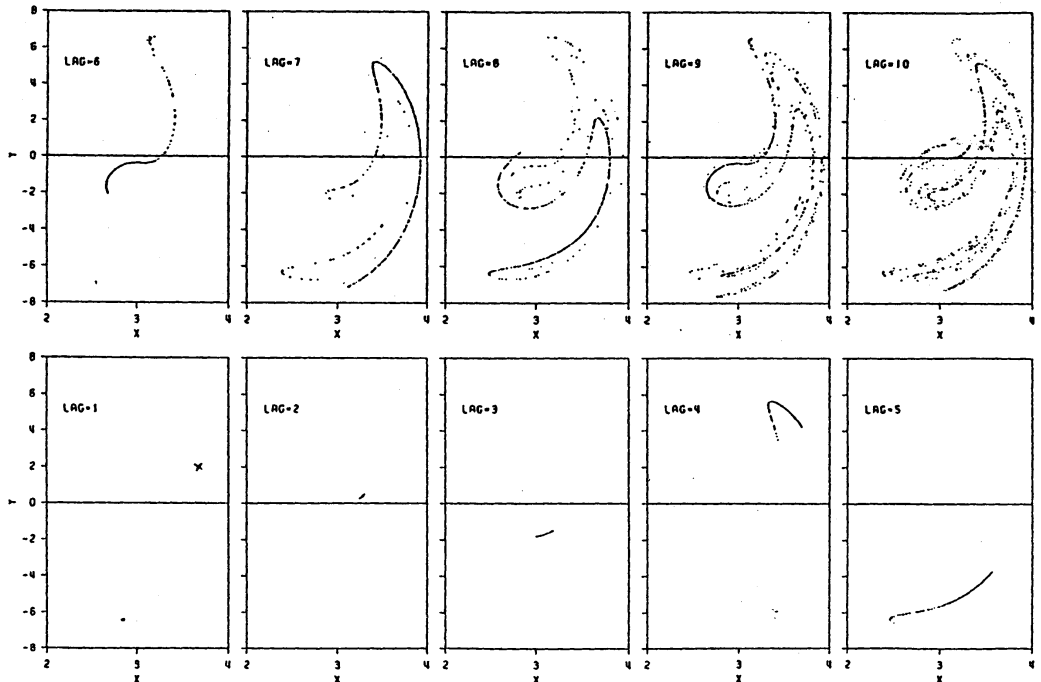


図4. 局在初期値からのアトラクタの変遷図, $k=0.1, B=12.0$

初期値領域 $[(X_0, Y_0) | 3.65 \leq X_0 \leq 3.70, 20 \leq Y_0 \leq 21]$, 中心位置 \times 印

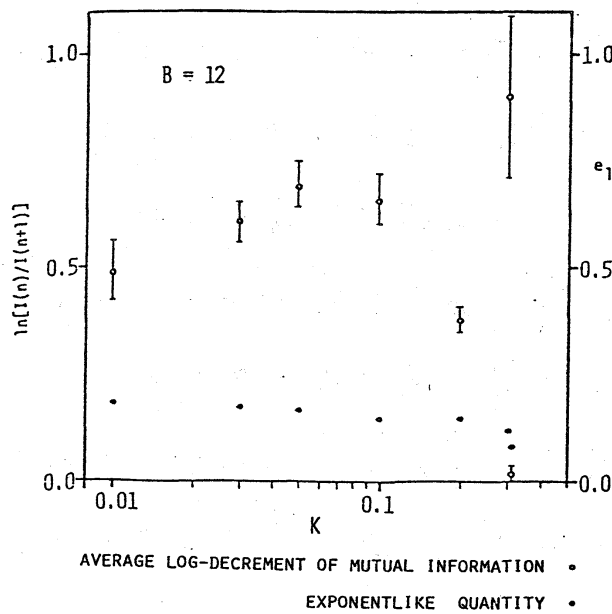


図5 平均相互情報量の減少指数と
特性指数量の比較

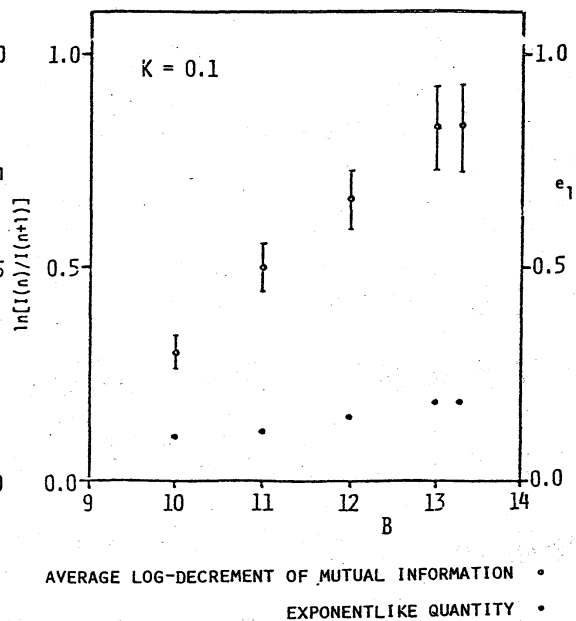


図6 平均相互情報量の減少指数と
特性指数量の比較

6 平均相互情報量の誤差について

(19)による平均相互情報量の推定は種々の意味の誤差を含む。
 i)数値計算による(1)の解過程の誤差, ii)分割の粗さ, iii)データ数の不足, が主なものである。i)はカ学系の不安定構造の為に僅かの数値誤差の効果も時間と共に拡大し, 誤差により混合性が加速される。つまり $I(n)$ はカ学系固有の混合と, 解の数値誤差または外部雑音による混合とからなる。(1)の解は Runge-Kutta 法で倍精度で求めているが, $t=16\pi (N=8)$ 位迄の数値解は正確であることを確認しているので, 図1, 2の緩和時間 $N=10$ はカ学系固有のもので数値誤差による効果は現れていない。実際単精度と倍精度の数値解による $I(n)$ を比較した

が殆ど差はみられな。ii)とiii)は相互に関係があるが、図10にデータ点数一定(10^5)のもとで3種の分割に対する平均相互情報量を示す。図からわかるように曲線の形は殆ど同じで最終値 $I(\infty)$ の値だけ平行移動した形である。最終値は一区画内の平均点数に依存する誤差であって、図11は分割 20×20 を一定にしてデータ点数を変えた場合を示す。データ数が多い程最終値 $I(\infty)$ は0に近づくことがわかる。これを以下で考察する。

x - y 平面の S_λ を含む最小矩形領域を $20 \times 20 = 400$ に分割すれば S_λ の点を含む格子数は $M=150$ である。データ点総数は 1×10^5 であるから1次元分布 $P(i)$ を求める1格子当りの点の平均数は $10^5/150 \approx 670$ で、2次元分布 $P(i, j)$ を求める1格子当り平均数は $10^5/150^2 \approx 4.4$ である。従って $P(i)$ は精度よく求まるが $P(i, j)$ はかなりばらつきを伴う。2次元分布の推定値を

$$\tilde{P}(i, j) = P(i, j) + \Delta P(i, j) \quad (36)$$

と書く。 $\Delta P(i, j)$ は誤差を示す。 $I(m)$ の推定値は

$$\begin{aligned} \tilde{I}(m) &= I(m) + \Delta I(m) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [P(i, j) + \Delta P(i, j)] \log \frac{P(i, j) + \Delta P(i, j)}{P(i)P(j)} \end{aligned} \quad (37)$$

と書ける。 $P(i)$ は誤差なく求まるものとする。 n が十分大ならば $P(i, j) \rightarrow P(i)P(j)$, $I(m) \rightarrow 0$ であるから(37)を近似評価すれば、

$$\tilde{I}(m) \cong \Delta I(m)$$

$$\cong \frac{1}{\ln 10} \sum_i \sum_j \left[\Delta P(i, j) + \frac{(\Delta P(i, j))^2}{2P(i, j)} \right] \quad (38)$$

となる。2次元分布の格子内の点数が少ないから、格子 $\Delta i \times \Delta j$ を通過する解の個数 $N_{ij} \equiv N\tilde{P}(i, j)$ は平均値 $NP(i, j)$ の Poisson 分布に従うものとして近似的に評価すれば、

$$\Delta\tilde{P}(i, j) \equiv \tilde{P}(i, j) - P(i, j) = \frac{N_{ij} - P(i, j)N}{N} \quad (39)$$

$$\langle \Delta\tilde{P}(i, j) \rangle = 0 \quad (40)$$

$$\langle [\Delta\tilde{P}(i, j)]^2 \rangle = P(i, j)/N \quad (41)$$

となるから、これを用いると $\Delta I(\infty)$ の期待値は

$$\langle \Delta I(\infty) \rangle = \frac{1}{2 \ln 10} \sum_{i, j} \frac{1}{N} = \frac{1}{2 \ln 10} \frac{M^2}{N} \quad (42)$$

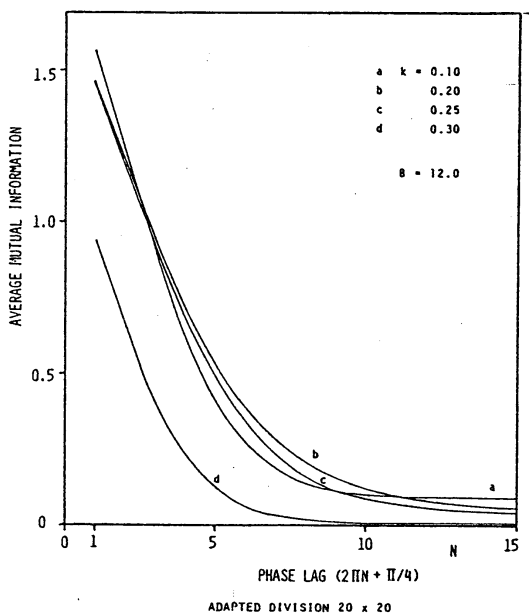


図7 平均相互情報量 $I_a(n)$, $a = \pi/2$
パラメタ k , $B = 12$. 一定

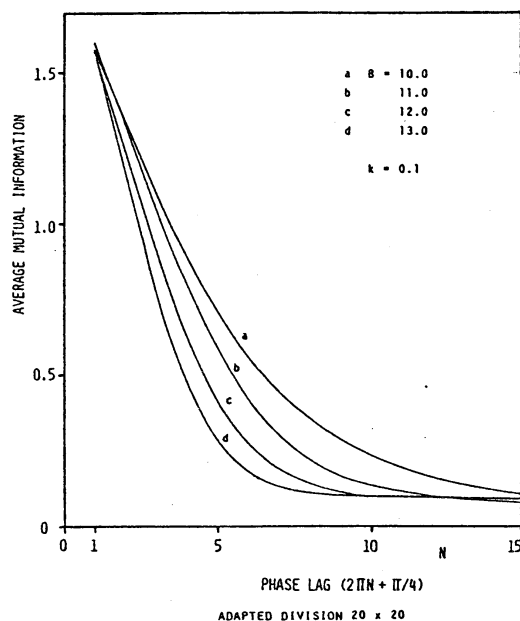


図8 平均相互情報量 $I_a(n)$, $a = \pi/2$
パラメタ B , $k = 0.1$. 一定

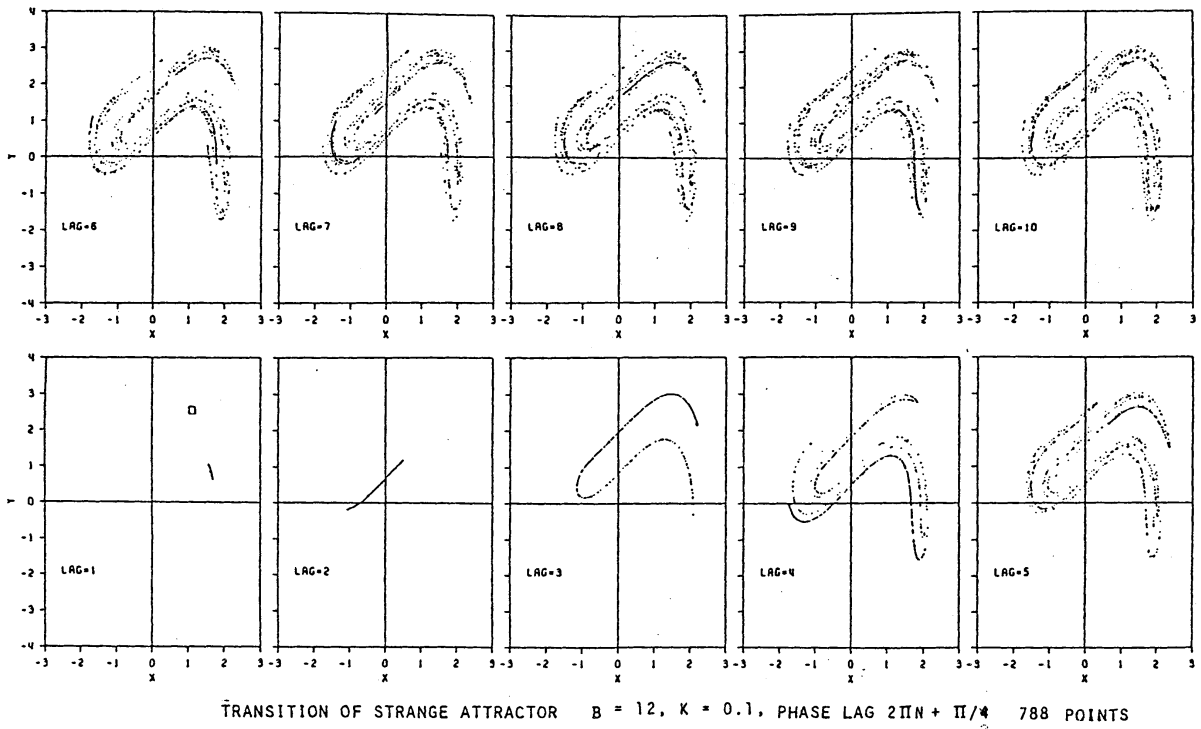


図9 局在初期値からのアトラクタの変遷図 $k=0.1$, $B=12$, $a=\pi/2$
 初期値領域 $[(X_0, Y_0) | 1.0 \leq X \leq 1.2, 2.5 \leq Y \leq 2.7]$ 領域 \square 印

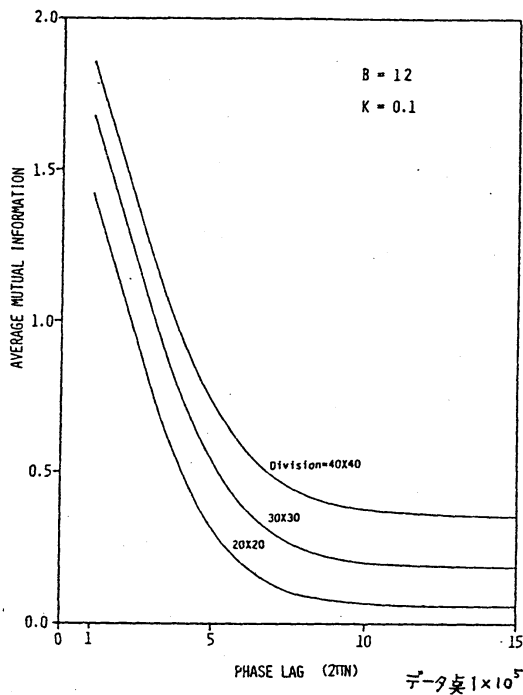


図10 平均相互情報量 - 分割数を変えた場合

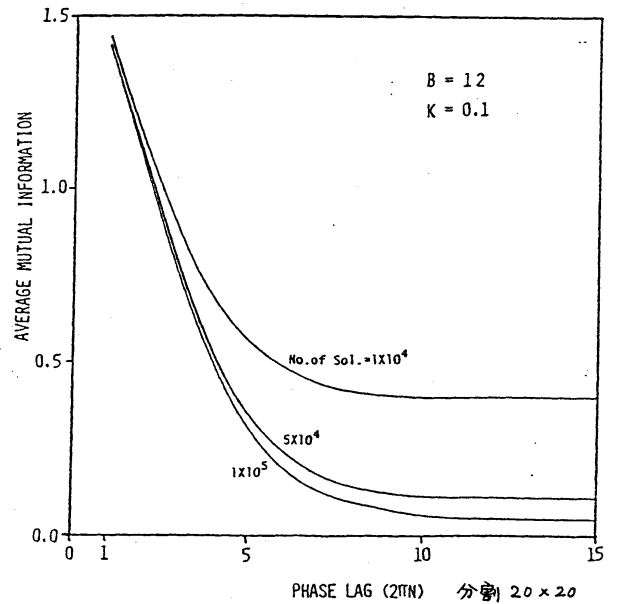


図11 平均相互情報量 - データ数を変えた場合

となる。分散は $O(1/N)$ の大きさである。(42)による最終値の評価と図10.11から得られる最終値の値の比較を次表に示す。この

桌の数	分割	図10.11の最終値	(42)による最終値
1×10^4	20×20	0.06	0.05
5×10^4	20×20	0.11	0.11
1×10^4	20×20	0.39	0.52
1×10^5	30×30	0.19	0.19
1×10^5	40×40	0.36	0.47

表1. 実験および理論評価による最終値

比較からわかるように実験による平均相互情報量の最終値は粗い理論的評価(42)によく一致する。(42)による最終値は領域 $\Delta_i \times \Delta_j$ におちる平均桌数 N/M^2 に逆比例しており、平均桌数を増せばいくらでも $I(\infty)$ を小さくできることがわかる。(24)によるMarkov性の評価も興味があるが、計算機容量の点で完全な実験は困難である。

参考文献

- 1) 上田: 非線形系に基づく確率統計現象, 電気学会論文誌, 98A, P.167-173, 1978.
- 2) Ueda: Randomly transitional phenomena in the system governed by

- Duffing equation. J. Stat. Phys. 20, P.181-196, 1979
- 3) Ueda: Steady motions exhibited by Duffing's equation - A picture book of regular and chaotic motions, in New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics, ed. Holmes, SIAM (1980)
- 4) Ueda: Explosion of strange attractors exhibited by Duffing's equation, Annals, New York Acad. Sci. 357, P.422-434, (1980)
- 5) Ogura: Spectral representation of a periodic nonstationary random process, IEEE Trans. Inf. Theory, IT-17, P.143, 1971
- 6) 小倉, 吉田: 周期定常過程の時系列解析; 信学会論文誌 J65-A, No.1, P.22-29, 1982
- 7) Ogura, Ueda, Yoshida: Periodic stationarity of a chaotic motion in a system governed by Duffing's equation, Prog. Theo. Phys. 66, P.2280, 1981
- 8) 小倉, 上田, 吉田: 力学系の理論と応用報告集, 数理研講
 究録 1981-12