数理解析研究所講究録
467巻 1982年 111-119

軌道体の一意化について

九大 理　加藤十吉

(Mitsuyoshi Kato)

問題　可分な距離づけ可能な連結空間 X と関数 $b : X \longrightarrow N$（自然数）の対 (X, b) を b-空間という。(X, b) に関するいかなる条件のもとに、連結 n 次元多様体 M 上の固有不連続変換群 (G, M) が存在し、X がその軌道空間で、X の各点 x に対し、x に属する M の点 z, i.e., $x = G \cdot z$, に対し、慣性群 G_z の位数 $\# G_z$ が $b(x)$ に等しいようにすることができるか？

実際にそうなるとき、(G, M) を (X, b) の一意化といい、(X, b) は一意化可能である、あるいは、"良い"ともいい、そうならないとき、(X, b) は"悪い"という。

$G \backslash M = (X, b)$, $X = |G \backslash M|$ と表わす。

多様体 M 上の固有不連続変換群 (G, M) とは、effective な作用をもつ G-多様体で、作用写像 $G \times M \longrightarrow M$ が固有な写像となるものである。後者の条件を云いかえれば、M の各点 z に対し、慣性群 G_z が有限群であり、z の M における小近傍 U_z が存

在し，　$g \in G_z$ に対し，　$g \cdot U_z = U_z$ ，

　　　　$g \in G - G_z$ に対し，　$g \cdot U_z \cap U_z = \emptyset$

となるときをいう。このとき，更に，各点 z で，

（G_z，U_z）が 直交変換群（G_z'，$\mathbb{R}^n$）に（位相）同型とな

るとき，（G，M）は局所可微分であるという。最初の問題を局所可微分固有不連続変換群について解答することが本稿の目的である。まず，自明な局所条件は次のようになる。

（局所一意化可能条件）　X の各点 x に対し，近傍 X_x が存在し，（X_x，$b|X_x$）は 直交変換群（G_x'，$\mathbb{R}^n$）によって一意化される。（i．e．，（X_x, $b|X_x$）$\cong G_x' \backslash \mathbb{R}^n$，　$G_x' \subset O(n)$）.

この条件を充たす b-空間を n 次元軌道体，または，局所可微分な軌道体　という。

（X，b）の *stratification* $\mathcal{S}$ とは，連結な多様体からなる X の *stratification* で，次の２条件をみたすものをいう。

(1)　b は各 *stratum* 上定値である。

(2)　$\mathcal{S}$ の異なる *strata* C，D が $C \subset \overline{D}$ をみたせば，

$b(C) > b(D)$ である。

我々の軌道体（X，b）には一意的に（X，b）の *stratification* が存在し，これを（X, b）の *stratification* という。

$\Sigma X = \{ x \in X \mid b(x) \geq 2 \}$　とおき，これを（X，b）の分岐集合という。$\dim \Sigma X \leq n-2$ であるとき，（X, b）

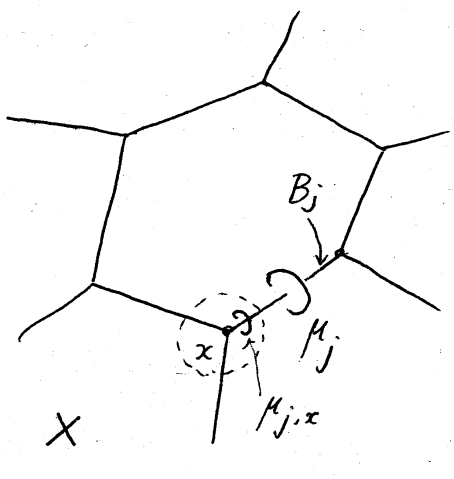
を分岐体　という。その名称の由来は，分岐体　の一意化（G，M）に対し，商写像 $q: M \longrightarrow X$ は Fox [1] の意味での分岐被覆であり，関数 b は $x \in X$ 上の分岐指数を表わすことによる。まず，n 次元分岐体　が一意化可能となる為の必要十分条件を与えよう。これは，Fox の問題（[1], p. 252, ↑3）を正則分岐被覆（但し，局所可微分）に対し解答するものである。他方では，我々の前論文 [2] で定式化され，証明された，定曲率空間における Poincaré の基本多角形に対する定理の一般化の位相化であるともみなせる。

まず，$X_0 = X - \Sigma X$，　$\pi_1(X_0) = H$ とおく。我々の条件は，ΣX の各点 x での局所基本群 $\pi_1(X_{0,x}) = H_x$ から H への（包含写像のひきおこす）準同型の核に関するものである。これを記述する為に，$\mathcal{S}$ の $n-2$ 次元 strata の全体を $\{B_j \mid j \in J\}$ とする。これは空であってもよいが，空でなければ，ΣX の最大次元の strata である。B_j の normal loop μ_j（$\subset X_0$）を指定する。ΣX の各点 x に対し，

$$X_{0,x} = X_x - \Sigma X_x \quad ,$$

$x \in \overline{B_j}$ のとき，$X_{0,x}$ の中で，B_j の normal loop $\mu_{j,x}$ を指定し，

$$J_x = \{ j \in J \mid x \in \overline{B_j} \}$$



とおく。各 B_j に対し，$b(B_j)=b_j$ とし，

$$\mu^b=\{\mu_j^{b_j}\mid j\in J\}\subset H,\quad \mu_x^b=\{\mu_{j,x}^{b_j}\mid j\in J_x\}$$

とおく。今，群 F に対し，F の部分集合 S の正規閉包を $F[S]$ と表わすことにしよう。このとき，自然な準同型

$$\eta_x:H_x\longrightarrow H\longrightarrow \hat{G}=H/H[\mu^b]$$

を考えることができる。我々の条件は次の様に定義される。

定義．　分岐体 (X,b) が局所完備であるとは，

各点 $x\in X$ に対し，$\operatorname{Ker}\eta_x=H_x[\mu_x^b]$

が成立するときをいう。

定理を記述する前に，一意化の構成法を与えておこう。

まず，H の正規部分群 $H[\mu^b]$ に関する X_0 の被覆

$p_0:M_0\rightarrow X_0$ をとる。Fox [1] によれば，spread $p_0:M_0\rightarrow X_0\subset X$ を完備化（Fox の意味での位相的完備化）して，$\hat{G}=H/H[\mu^b]$ を被覆変換群とする正則分岐被覆 $p:M\rightarrow X$ がえられる。とくに，$|\hat{G}\backslash M|=X$ は成立するが，M が多様体であるかどうか，又，関数 b をひきおこすかどうかは一般には不明である。この意味で，$(\hat{G},M)$ を (X,b) の形式的一意化と呼ぼう。

定理 1．（一意化定理）．　(X,b) を n 次元分岐体とする。(X,b) が一意化可能である為の必要十分条件は

(X , b) が局所完備となることである。

具体的には，(X , b) が局所完備であれば，(X , b) の形式的一意化 ($\hat{G}$, M) は実際に一意化であり，しかも，次の意味で (X , b) の普遍一意化となっている。つまり，

(X , b) のかってな一意化 (G, N) に対し，全射準同型 $\varphi : \hat{G} \to G$ 反び（正則）被覆写像 $f : M \to N$ が存在し，f は $\mathrm{Ker}\,\varphi$ を被覆変換群とする。

証明は次元 n に関する帰納法による。このとき，形式的一意化が普遍一意化ということ，ヌ，各点 x で，$(X_x, b|X_x) = G_x' \backslash \mathbb{R}^n$，$G_x' \subset O(n)$，となっているのであるが，このとき，$\mathbb{R}^n$ の単位球面 S^{n-1} に対し，$/G_x' \backslash S^{n-1}/$ に対応する X_x，$X_{0,x}$ の部分を $\dot{X}_x$，$\dot{X}_{0,x}$ とすれば，

$$X_x - \{x\} \cong \dot{X}_x \times \mathbb{R} \quad , \quad X_{0,x} \cong \dot{X}_{0,x} \times \mathbb{R}$$

となっていて，$\dot{X}_x$ の M への逆像の連結成分 $\dot{M}_{(z)}$ が，普遍分岐被覆，あるいは，$\hat{G}$ の $\dot{M}_{(z)}$ の stabilizer を $G_{(z)}$ とすれば，$(G_{(z)}, \dot{M}_{(z)})$ が $(\dot{X}_x, b|\dot{X}_x)$ の普遍一意化であることを局所完備条件が保証するのが本質的である。このことに注意すれば証明は定理1の定式化により簡単に与えられる。

$\dim \Sigma X = n-1$ のとき，$\mathcal{S}$ の $n-1$ 次元 strata の全体を $\{A_i \mid i \in I\}$ とする。 $\overline{\cup A_i}$ は有理ホモロジー n 次元多様体である X の境界 ∂X となっている。 b-空間 $D(X, b) = (D(X), D(b))$ を次の様に定義し，これを (X, b) の double という。

$$D(X) = X \underset{\partial X}{\cup} X \quad , \quad D(b)(x) = \begin{cases} \dfrac{b(x)}{2} & x \in \partial X \\ b(x) & x \notin \partial X \end{cases}.$$

$t : D(X) \to D(X)$ を X のコピーを入れかえる（∂X に関する）鏡映とする。次の定理により，この場合の一意化は定理1に帰着される。

定理2.（Double trick）．(X, b) を n 次元軌道体で，$\partial X \neq \emptyset$ とする。このとき，(X, b) が一意化可能である為の必要十分条件は $D(X, b)$ が一意化可能となることである。実際，$(\hat{G}^+, M)$ が $D(X, b)$ の普遍一意化であれば，鏡映 $t : D(X) \to D(X)$ は $\hat{M}$ の鏡映 $\hat{t} : \hat{M} \to \hat{M}$ にもちあげられ，$\hat{t}$ と $\hat{G}^+$ の生成する群を $\hat{G}$ とすれば，$(\hat{G}, \hat{M})$ が (X, b) の普遍一意化となっている。

十分性は定理1の内容から直ちに示される。（t が $\hat{t}$ へもちあげられることさえみればよい）。必要性を示す為には，

鏡映変換群に関する結果［　］を使用する。

ところで，Thurston は［4］で，

"悪い3次元軌道体は悪い2次元部分軌道体を含む"

と予想している。これは高次元へ一般化され，n 次元 Thurston 予想という。

$\partial X = \Sigma X$ であるような軌道体とその double に対し，n 次元 Thurston 予想は成立する

ことが示される。ところが，$n \geq 4$ に対し，次の様な反例が構成される。

2次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ 上の3つの複素直線 L_1, L_2, L_3 が一般の位置にあるとする。つまり，$L_i \cap L_j = \{p_k\}$，$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ となっている。$(\mathbb{C}^2 ; L_1, L_2, L_3)$ の一点コンパクト化 $(S^4 ; \bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3)$ $(\bar{L}_i = L_i \cup \{\infty\})$ を考える。$B_i = \bar{L}_i - \{p_j, p_k, \infty\}$ $(i = 1, 2, 3)$ とおく。定理1の内容から，B_i 上の値 b_i $(i=1, 2, 3)$ を定めると，一意化可能性は，$\{(B_i, b_i) \mid i=1, 2, 3\}$ できまってしまう。（Fuchs群の signature に相当する）今，

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} > 1$$

とすると，b_1, b_2, b_3 は $X = S^4$ 上の関数 b へ拡張され，

(X, b) が分岐体 となる。実際，$(\mathbb{C}^2, b|\mathbb{C}^2)$ の普遍一意化 $(\hat{G}, \hat{M})$ が存在し，$\hat{G} = \mathbb{Z}_{b_1} \oplus \mathbb{Z}_{b_2} \oplus \mathbb{Z}_{b_3}$ かつ $\hat{M}$ が $\mathbb{C}^3$ 内で，$z_1^{b_1} + z_2^{b_2} + z_3^{b_3} = 1$ で定義される超曲面(F^4)に同相になっている。又，$(\dot{X}_\infty, b|\dot{X}_\infty)$ の普遍一意化が存在する為の必要十分条件が，$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} > 1$ である。

$H = \pi_1(X - \Sigma X) = \pi_1(\mathbb{C}^2 - L_1 - L_2 - L_3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であり，$H[\mu^b] = b_1\mathbb{Z} \oplus b_2\mathbb{Z} \oplus b_3\mathbb{Z}$ であるから，$H[\mu^b]$ に対応する $X - \Sigma X$ の *covering* を $\dot{X}_\infty$ 上に制限すると，それは，F^4 の"境界"とみなせる *Brieskorn* 多様体

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^{b_1} + z_2^{b_2} + z_3^{b_3} = 0,\ |z_1| + |z_2| + |z_3| = 1\}$$

に同相となる。このことは，形式的一意化が多様体でないことを示している。又，もし，(X, b) が悪い部分軌道体をもてば，それは ∞ を通過しえないことがわかる。ところが，$(\mathbb{C}^2, b|\mathbb{C}^2)$ は良い軌道体であり悪い部分軌道体を含むことが矛盾をひきおこす。こうして，(X, b) は悪い(低次元)部分軌道体を含まないことが示された。

参考文献

[1] R. Fox, *Covering spaces with singularities*, Algebraic Geometry and Topology, Princeton Univ. Press (1957), 243-257.

[2] M. Kato, *On combinatorial space forms*, Scient. Papers College Gen. Ed. Univ. of Tokyo, 30 (1980), 107-146.

[3] M. Kato, 位相的鏡映変換群について，都立大学数学教室セミナー報告 (1982).

[4] W. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, Princeton Univ. (Mimeographed Notes 1978-79).