

結び目によつた Dehn-surgery で得られる
3次元多様体について

津田塾大学 円山 憲子

(Noriko Maruyama)

§ 1. Introduction.

対象は、すべて smooth, oriented category で扱うこととする。

3次元多様体を与える方法は、いくつか知られている。特にどんな closed, orientable 3次元多様体も S^3 内の link によつた Dehn-surgery で得られることは、よく知られているが、link ではなく knot によつた Dehn-surgery で与えるという制限をつけた場合には、まだ決定的な結果は得られていないようである。そこで次のような一般的问题がたてられる。

問題: 所与の homology lens space が適当な homology S^3 (or S^3) 内の knot K の Dehn-surgery で与えられるかどうか判定せよ。また Dehn-surgery で与えられた時、その表現は一意的か。

また knot K による Dehn surgery には, surgery 係数と呼ばれる有理数が対応し, 得られる 3 次元多様体の位相型は, K の入っている homology 3-sphere を固定すれば, K の surgery 係数が決まることによく知られている. 特に surgery 係数が整数の時, Dehn-surgery を framed surgery と呼ぶことにすれば, 2-handle attaching を通して 3 次元多様体(同志)の同境(cobordism)問題に関連してくる.

homology cobordism group of homology 3-spheres, \mathcal{H}^3 の構造について懸案の問題は, μ -invariant, $\mu(\Sigma) = 0$ だが $[\Sigma] \neq 0$ in \mathcal{H}^3 なる homology 3-sphere Σ の発見である. Σ は \mathbb{Z} 上の homology lens space $L(\mathbb{Z})$, homology 3-sphere Σ , $\mu(\Sigma) = 0$ 由 a knot K の framed surgery で得られ, i.e. $L = \chi_{\Sigma}(K; p)$, $p \in \mathbb{Z}$, L は homology S^2 (= 4-manifold V with $H_*(V; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^2; \mathbb{Z})$, $\partial V \neq \emptyset$) の境界とならないことがあれば, Σ の homology cobordism class は \mathcal{H}^3 で non zero である. 何となれば, もし $[\Sigma] = 0$ ならば, \exists acyclic 4-manifold W s.t. $\partial W = \Sigma$. また $L = \chi_{\Sigma}(K; p)$ より $\exists C(p)$: 2-handle body s.t. $\partial C(p) = L \cup -\Sigma$. よって $V = C(p) \cup_{\Sigma} W$ における $\partial V = L$ かつ V は homology S^2 となり, L の条件に反することになるからである. よって上の性質を持つ homology

3-sphere 発見のために、まあ先の一般的問題を framed surgery に制限した形の問題、

Qf: 折々の homology lens space が 適当な homology 3-sphere (or S^3) の knot の framed surgery で得られるかどうかの判定せよ。

と、次の問題

Q: 折々の homology lens space が homology S^2 の境界となるかの判定せよ。

に答之なければならぬ。

Λ を homology lens space, Σ を homology 3-sphere, 且し $\Lambda = \chi_\Sigma (K=p)$ から $[\Sigma] = 0 \in \mathcal{H}^3$ ならば, Λ は homology S^2 の境界となることを注意しておく。

§2では, framed surgery の代数的な条件等を調べ, 特に重なる lens space について考察を進める。§3では, 素な 3次元の多様体の連結和を問題の対象とし, 次の定理を示す。

Theorem. K : non trivial, not sufficiently large knot in S^3 . 且しある $r \in \mathbb{Q} (r \neq 0)$ に対し K に r の係数 r で S^3 を Dehn surgery $LT = \pm a$ が, R 個の素な 3次元の多様体の連結和となっているならば, $\Lambda \cong \Sigma$ である。

§2. framed surgery

2.1. ここでは、一般に a homology lens space が knot a framed surgery で得られるための代数的必要条件を求める。

Λ を homology lens space with $H_1(\Lambda; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ とする。 Λ はいつでも S^3 内の link $L = \bigcup_{i=1}^{\mu} L_i$ に Dehn surgery で得られる, i.e. $\Lambda = \chi_{S^3}(L; \{r_i\})$, $r_i = p_i/q_i \in \mathbb{Q}$ ($i=1, \dots, \mu$)。 Λ の表現を μ と ν の間で固定する。 A を $(L; \{r_i\})$ の linking form, $D = \prod_{i=1}^{\mu} q_i$ と置く。 [M: lemma 2.2] より, $H_1(\Lambda; \mathbb{Z})$ の位数 $|H_1(\Lambda; \mathbb{Z})| = D \cdot \det A = p$ を得る。 さらに, Λ が homology 3-sphere Σ 内の knot K の framed surgery で得られたとすると, i.e. $\Lambda = \chi_{\Sigma}(K; p)$ 。 この時, Λ と Σ は $\Sigma \times I$ に framing p の 2-handle を attach した 4次元の複体 $\mathcal{C}(p)$ の境界と等しいことに注意しておく。 逆に Σ は $\Lambda \times I$ にある framing の 2-handle を attach して得られたとみなすこともできる。 上の Λ の L による Dehn surgery を用いて, Σ を S^3 から Dehn surgery の表現が得られる。 Σ は L と dual 2-handle の足 K^* による Dehn-surgery で得られるのである, i.e.

$\Sigma = \mathcal{X}_{S^3}(L \cup K^*; \{r_i\} \cup \{m\})$, $m \in \mathbb{Z}$.

$(L \cup K^*; \{r_i\} \cup \{m\})$ a linking form $A(m)$ is.

$$A(m) = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\mu \end{matrix} \\ \hline \lambda_1 \cdots \lambda_\mu & m \end{array} \right), \quad \lambda_i = \text{lk}_{S^3}(K^*, L_i)$$

と書ける. $\exists \tau \in H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ $| = D \cdot \det A(m) = \pm 1$

([M: lemma 2.2]) とする. $A(m)$ の形から

$\det A(m) = m \cdot \det A + C$, (C は λ_i 達と A で決まる定数) とおける. 以上より

$$D \cdot \det A(m) = m \cdot D \cdot \det A + D \cdot C = pm + DC = \pm 1,$$

従って $DC = \pm 1 \pmod{p}$ とする.

特に $p = \text{odd}$ ならば, $\Lambda = \mathcal{X}_\Sigma(K; \pm p)$ のとき, Λ は \mathbb{Z}_2 -homology 3-sphere の μ -invariant が定義される. 二つの間の代数的な関係式を求めたい. $\Lambda = M(0, K; 1, 0, \pm p, 1)$ より [G1: Theorem 2] より

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda) &= \mu(S^3) + \mu(\Sigma) + \mu(L(\pm p, 1)) + c(1) + c(K) \\ &= \mu(\Sigma) + \mu(L(\pm p, 1)) + c(K) \end{aligned}$$

(但し, $c(K)$ は K の Arf-invariant) を得る. また [HNK] より lens space $L(\pm p, 1)$ の μ -invariant は

$$\mu(L(\pm p, 1)) = \mp \mu(L(p, p-1)) = \mp \frac{p-1}{16}$$

と計算される. 二つの式を合せて

$$\mu(\Lambda) \pm (p-1)/16 = \mu(\Sigma) + c(K) \quad \text{を得る.}$$

右辺は. homology 3-sphere α μ -invariant および knot α Arf invariant が $8/16$ or $0/16 (= \mathbb{Z}_2)$ という値を取ることには注意されば.

$$16\mu(\Lambda) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8} \text{ が成り立つ.}$$

以上をまとめると,

Lemma 2.1. $\Lambda = \chi_{S^3}(L: \{r_i\})$ が homology

lens space であるならば $H_1(\Lambda; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ である.

もし $\Lambda = \chi_{S^3}(K: p)$ ならば $D \cdot C \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

さらに $p: \text{odd}$ の時, $16\mu(\Lambda) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$.

Q_f に関して, $\forall K \alpha = \pm 1$ が成り立つ.

Corollary 2.1.1 $\Lambda = \chi_{S^3}(L: \{r_i\})$ は homology lens space である. $H_1(\Lambda; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$, $D = \prod_{i=1}^M q_i$, $r_i = p_i/q_i$ である.

$\forall C \in \mathbb{Z}$ に対して $D \cdot C \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ ならば Λ は homology 3-sphere 内の knot α framed surgery であることが得られない.

さらに, $p: \text{odd}$ の時, $\mu(\Lambda) \pm (p-1) \not\equiv 0 \pmod{8}$ ならば,

Λ は homology 3-sphere 内の knot α framed surgery であることが得られない.

p が even の時は, [F] に扱われ, 詳しい展開がなされているが, 以下 $\alpha = \pm 1$ を注意しておくことにする.

ここでは、 $p = \text{even}$ に限っておく。 Λ を homology lens space with $|H_1(\Lambda; \mathbb{Z})| = p$ とする。 今 Λ が \mathbb{Z} の homology 3-sphere Σ_1, Σ_2 から framing p の 2-handle を attach して得られた 4次元多様体 $C_1(p), C_2(p)$ の境界となっているとする。 $H_1(\Lambda; \mathbb{Z})$ の生成元は dual 2-handle の attaching sphere k_1^* (resp. k_2^*) である。 $h: \Lambda \rightarrow \Lambda$ homeomorphism s.t. $h_*(k_1^*) = \pm k_2^*$ なる \pm がある。 $C_1(p) \times C_2(p)$ を張り合せて得られる 4次元多様体を C とおく。 $C = C_1(p) \cup_h C_2(p)$. 極と $\partial C = -\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ である。 $H_2(C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は Σ_1 によって得られた 2-handle h_1 と h_2 の dual 2-handles h_1^*, h_2^* から得られる $h_1^* \pm h_2^*$ で生成される。 C の intersection form は $\begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

lemma 2.2. $p = \text{even}$ の時、 C は $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ の spin cobordism を与える。 $\exists, \mu(\Sigma_1) = \mu(\Sigma_2)$ さらに p が条件 $(*) : \alpha^2 \equiv \pm 1 \pmod{p} \iff \alpha \equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たせば、 $C_1(p) \times C_2(p)$ の張り合せ方は \pm の異なる h による。 $C_1(p) \cup_h C_2(p) = C$ となる。

この lemma 2.2 から Λ が μ -invariant zero の homology 3-sphere (特に S^3) から framed surgery で得られないことと十分条件が出てくる。 $\mathcal{Q}f \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}$ $p = \text{even}$ の場合は $\mathcal{Q}f$ が成り立つ。

Corollary 2.2.1 p : even の lemma 2.2 の条件

(*) を満たす μ とする. もし Λ が $\mu(\Sigma) \neq 0$ なる
homology 3-sphere a framed surgery で得られるならば,
 Λ は μ -invariant zero (特に S^3) a homology 3-sphere
a framed surgery で得られない.

S^2 \mathbb{R}^3 の構造をさぐる概念として, $[M]$ は
bounding genus を定義しているが, 我々は上のような
homology 3-spheres 間 a spin cobordism を持つ a
bounding genus に関して $\forall R$ のような評価式を得る.

Corollary 2.2.2. p : even とき, Λ と homology 3-
spheres Σ_1, Σ_2 に上のような関係が成り立っているとすると,
 Σ_i a bounding genus $|\Sigma_i|$ ($i=1,2$) について

$$|\Sigma_j| - 1 \leq |\Sigma_i| \leq |\Sigma_j| + 1 \quad i \neq j, i, j \in \{1, 2\}.$$

特に, (i) $|\Sigma_i| = 0$ ならば $|\Sigma_j| \leq 1$,

(ii) $|\Sigma_i| \leq n$ ($n \geq 1$) が critical estimate ($[M]$)
ならば, 評価 $|\Sigma_j| \leq n-1$ は critical である.

注意: p -関する条件(*)は $p = 2 \cdot (4k+3)$ (形の素数)^m

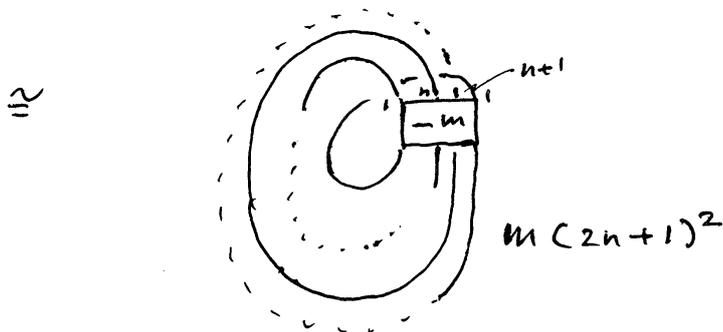
$k, m \in \mathbb{Z}^+$ と同値であることが証明できる.

2.2. lens spaces について.

lens space $L(p, q)$ (p, q は互いに素な整数) が trivial knot の p/q -Dehn surgery によって得られることはよく知られた事実である。従って lens space に対してはその表現の一意性が問題となるが, Moser [Mo] は torus knot から, Fintushel - Stern [FS] と Gordon [G2] は doubly iterated torus knot (cable of torus knot) から, さらに [FS] は torus knot である knot から, 一部の lens spaces が Dehn surgery によって得られることを示した。我々は Rolfsen-Kirby Calculus により, 次の結果を得る。

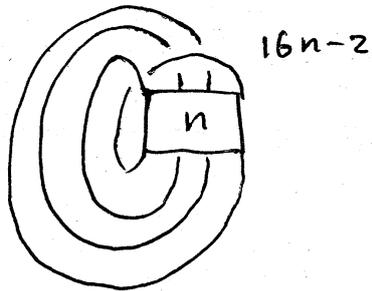
Theorem 2.3. 次の lens spaces は non-trivial knot の framed surgery から得られる。

$$(i) L(m(2n+1)^2, 2m(2n+1)+1)$$

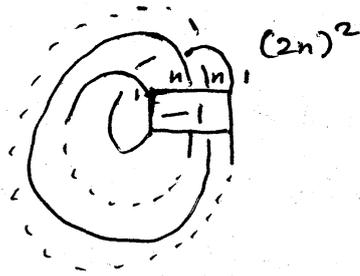


$\boxed{-m}$ は m -full left handed twists (以下同).

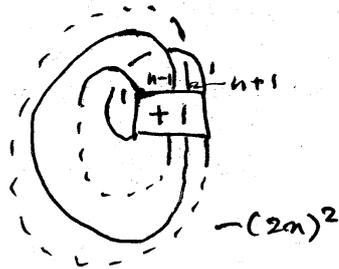
$$(ii) L(16n-2, 6n-1)$$

 \cong


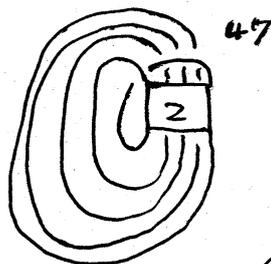
$$(iii) L((2n)^2, 2(2n)+1) \cong$$



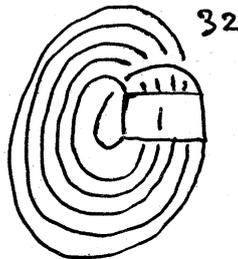
$$(iv) L((2n)^2, 2(2n)-1) \cong$$



$$(v) L(47, 18) \cong$$



$$(vi) L(32, 23) \cong$$



Proof. 主張中の lens space $\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$
 のような framed link 表示を Rolfsen-Kirby Calculus
 で変形して得られる。詳細は略す。

次に lens spaces の連結和の surgery 表現は [Mo],
 [G2] で得られている。これらはすべて torus knot 又は
 iterated torus knot の Dehn-surgery で得られる。
 Gordon [G2] は次の問題を提出している。

問題 [Gordon]: 2つの lens spaces の連結和が
 torus knot 又は iterated torus knot 以外の knot の
 Dehn-surgery で得られるか?

この問題について次節で少し言及するつもりである。
 以上は lens space 又は lens spaces の連結和が Dehn-surgery で
 得られる例であったが、以下は 2.1. の議論を lens
 spaces に適用して lens space 特有と思われる現象について
 述べてゆきたい。 lens space 又は lens spaces の連結和
 の first homology group の位数が odd と even の場合に
 分けて議論する。

p が odd の時、lemma 2.1 から次の命題を得る。

Proposition 2.4. $p = \text{odd}$ と仮定する。

(1) $L(p, q) = \chi_{\Sigma}(K: \pm p)$ ならば.

$16 \mu(L(p, q)) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ が成り立つ. さらにこれは $q \equiv \pm \text{quadratic residue } (p)$ と同値である.

(2) $\#_{i=1}^{\Delta} L(p_i, q_i) = \chi_{\Sigma}(K: \pm p)$, $\Delta \geq 2$, $p = \prod_{i=1}^{\Delta} p_i$ ならば. $D \cdot C \equiv \pm 1 \pmod{p}$, 但し $D = \prod_{i=1}^{\Delta} q_i$, C は linking form $A(n) = \left(\begin{array}{cc|c} p_1/q_1 & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{\Delta}/q_{\Delta} & \lambda_{\Delta} \\ \hline \lambda_1 & \dots & \lambda_{\Delta} \\ \hline & & n \end{array} \right)_n$ $\det A(n) = n \cdot \det \begin{pmatrix} p_1/q_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & p_{\Delta}/q_{\Delta} \end{pmatrix}$

+ C と置いた時の定数である. 本稿と同じ条件のもとで. μ -invariant は $16 \sum_{i=1}^{\Delta} \mu(p_i, q_i) \pm (\prod_{i=1}^{\Delta} p_i - 1) \equiv 0 \pmod{8}$ となる.

Remark. [HNK] は lens space の μ -invariant の計算公式を上げているが, この Theorem 8. (4) は一般に q に対しては $16 \mu(L(p, q)) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ が成り立つことを述べている.

Proof. (1) の $16 \mu(L(p, q)) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ が成り立つことは lemma 2.1 より明らか. [HNK] は互いに素な整数 p, q に対し, Jacobi symbol $(\frac{q}{p})$ が lens space $L(p, q)$ の μ -invariant と次の式で関係付けられていることを示した;

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{4\mu(L(p, q)) + \frac{p-1}{4}}$$

また, $(\frac{q}{p})$ は $L(p, q)$ の orientation preserving homotopy

type invariant であることが示した。 $q \equiv \pm$ quadratic residue (p) ならば、 $L(p, q) \cong L(p, 1)$ or $L(p, -1)$.

$L(p, q) \cong L(p, 1)$ の時、先の関係式を用いて

$$(-1)^{4\mu L(p, q) + \frac{p-1}{4}} = \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) = 1 \quad \text{if } 4\mu L(p, q) + \frac{p-1}{4} : \text{even} \quad \text{従って } 16\mu L(p, q) + (p-1) \equiv 0 \pmod{8}.$$

また、 $L(p, q) \cong L(p, -1)$ の時、同様に $\left(\frac{q}{p}\right)$ は homotopy invariant

$$\text{だから } \left(\frac{q}{p}\right) = \left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}. \quad \text{よって } \left(-\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) \left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{p-1} = 1. \quad \left(-\frac{q}{p}\right) = (-1)^{4\mu L(p, -q) + \frac{p-1}{4}} \text{ 従って、}$$

$$4\mu L(p, -q) + \frac{p-1}{4} : \text{even}, \quad \text{従って } 4\mu L(p, q) - \frac{p-1}{4} : \text{even},$$

故に $16\mu L(p, q) - (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ を得る。以上 $q \equiv \pm$ quadratic residue mod p ならば $16\mu L(p, q) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ が言えた。逆は上の証明を逆にすればよい。

(2) は、lemma 2.1 を用いて 同様に得る。 \square

Proposition 2.4 は、lens space $L(p, q)$ は S^3 の連結和が homology 3-sphere の framed surgery によって得られるための必要条件を与えている。特に $L(p, q)$ が knot の framed surgery によって得られるためには $L(p, 1)$ または $-L(p, 1)$ と homotopy 同値である必要があることを主張している。

Q_p is first homology group a 位数 odd a lens space 或いはこれら、連結和に限る。

Corollary 2.4.1 $p = \text{odd}$ とする。

(1) $\text{lb } \mu(L(p, q) \pm (p-1)) \equiv \pm 4 \pmod{8}$ ならば $L(p, q)$ は homology 3-sphere (特に S^3) a framed surgery 2) 得られない。

(2) $\#_{i=1}^n L(p_i, q_i)$, $p = \prod_{i=1}^n p_i$, $n \geq 2$ とし、 $\text{lb } \sum_{i=1}^n \mu(L(p_i, q_i)) \pm (p-1) \not\equiv \pm 4 \pmod{8}$ ならば、これは homology 3-sphere (特に S^3) a framed surgery 2) 得られない。

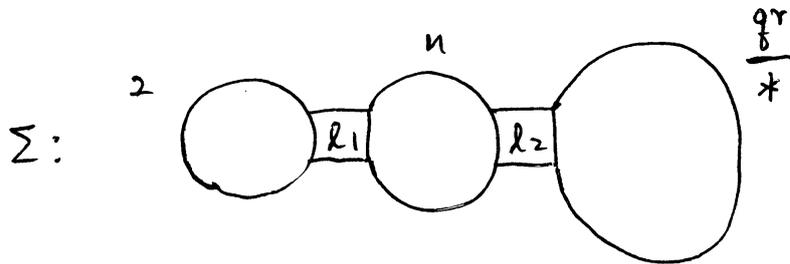
Corollary 2.4.1 2) 判定される例をいくつか上げる。

$L(24k-7, 6)$, $L(4k+3, 1) \# L(8k+7, 1)$, $L(4k-1, 1) \# L(4k+1, 1) \# L(4k+3, 1)$ は homology 3-sphere (特に S^3) a framed surgery 2) は得られない。

最後に first homology group a 位数が even a 場合に S^3 a framed surgery 2) 得られるかどうかの判定について述べる。これは Lemma 2.2 a Corollary 2.21 から判定する事ができるが、lens space $L(p, q)$, 但し $p = \text{even}$ かつ条件 (*) を満たすものについて S^3 a framed

surgery で得られない Σ の例は [F] で与えられている
 ので. Σ は lens space の Z の以上の連結和に限る. $p = \prod_{i=1}^n p_i$
 が even かつ条件 (*) を満たし, $\# L(p_i, q_i)$ の linking form
 が $L(p, 1)$ のそれと同型であるという要請のみ. Corollary 2.2.1
 は $\Delta = 2$ のとき $L(2, 1) \# L(q^r, *)$, $q: 4k+3$ の形の素数
 $r \in \mathbb{Z}^+$ の形のときのみ有効である.

$L(2, 1) \# L(q^r, *)$ は次の link に surgery を得ら
 れる homology 3-sphere Σ と 2-handle 1個のみからなる
 4次元の多様体で結びられている. Σ は homology 3-sphere
 で μ -invariant が non-zero のものを見つけられたい.



$* = 1$ の場合にいくつか見つけたので報告する.

Proposition 2.5.

- (1) $L(2, 1) \# L(8k^2 - 1, 1)$, $8k^2 - 1: \text{odd prime}$
 - (2) $L(2, 1) \# L(24k^2 + 16k + 3)$, $k: \text{odd}$, $24k^2 + 16k + 3: \text{prime}$
 - (3) $L(2, 1) \# L(24k^2 + 32k + 11)$, $k: \text{even}$, $24k^2 + 32k + 11: \text{prime}$
- は. Σ は S^3 の framed surgery で得られない.

§3. Connected sum について.

任意の closed, orientable 3-manifold M の prime 3-manifolds (irreducible except $S^1 \times S^2$) M_i の connected sum に順序を除いて $M = \#_{i=1}^{\Delta} M_i$ と一意に分解されることを Milnor に示されている。 $\Delta \geq 2$ の時、 M は non-irreducible の decomposition を定める $\mathcal{S} =$ a collection of disjoint, non-parallel incompressible 2-spheres in M , $|\mathcal{S}| = \Delta - 1$ があることに注意しておく。

この節の目的は、 closed, orientable 3-manifold $M = \#_{i=1}^{\Delta} M_i$ が knot についた Dehn-surgery で得られるかという問題と、このような M (特に $M_i =$ lens space の時) が knot についた Dehn surgery で与えられるためには、 Δ はいくつを許されるのかということとを 3次元 topology の手法を用いて考えてみることにする。

はじめに次の結果を紹介する。

Theorem 3.1. (Gordon [G2])

(i) $K =$ any knot $\Rightarrow K$ についた係数 r の S^3 surgery で得られる ($K=r$) は有限個の $r \in \mathbb{Q}$ を除いて irreducible である。

(ii) K が torus knot でないならば、有限個の $r \in \mathbb{Q}$ を除く $\pi_1(K:r)$ は infinite である。

従って特に lens spaces の連結和 (基本群は有限) を対象とする試みは殆ど無理な試みではないと思われる。
以下いくつかの補題をあげて、この節の主要定理 (Theorem 3.6) を証明する。

Lemma 3.2 K は non trivial knot とする。

$(K:r)$ が non-irreducible ならば、 K の exterior $X(K)$ 内に incompressible, ∂ -incompressible, connected planar surface F with $\partial F = \{ \text{parallel curves of slope } r = \frac{m}{n} \text{ in } \partial X(K) \}$ が存在する。

Proof. $(K:r) = X(K) \cup S^1 \times D^2$ 内の incompressible 2-sphere S を $S^1 \times D^2$ の軸と transversal にと位置を置き、 $S \cap S^1 \times D^2$ は meridian disks とできる。 $X(K)$ は irreducible 故、 $S \cap S^1 \times D^2 = \emptyset$ としようとする。 meridian disk の boundary は $\partial X(K)$ 上に slope $r = \frac{m}{n}$ の curve がある。 して $S \cap X(K)$ が incompressible かつ ∂ -incompressible である。 通常 disk argument を用い、この結果を F とする。 F が ∂ -compressible ならば F は ∂ -parallel な annulus となり、[W. (1.10) Lemma]

成分が n 。ある S が $S^1 \times D^2$ 内に push され、 B^3 を張る。従って S の incompressibility に反す。よって F は ∂ -incompressible である。

Knot exterior 内の properly embedded surface α boundary curves について、次の成り立つことを松本幸夫先生に教わっていただいた。

Lemma 3.3. (Y. Matsumoto) F を $X(K)$ 内の orientable connected (planar) surface α , ∂F は $\partial N(K)$ 上の parallel oriented loops (∂F_i は F が induce する向きを付与する) によって \pm の α を表す。これらの代数的和を $\partial[F]$ とする。

この時、 $\partial[F] = 0$ 又は $\pm K$ が $N(K)$ に成り立つ。 $\partial[F] = 0$ の時 ∂F の成分の向きは交互に変わり、 $\#\partial F$: even であり、 $\partial[F] = \pm K$ の時 ∂F の成分は longitude である。

Corollary 3.3.1. $\gamma \neq 0$ の時、 ∂F の成分の個数は偶数。

これは homology の計算で分かる。

Lemma 3.4. F を properly embedded (incompressible ∂ -incompressible) surface in $X(K)$ とし、 ∂F の成分の個数は偶数と仮定するならば F は $X(K)$ を separate する。

$X(K)$ 内の incompressible, ∂ -incompressible planar surface with slope γ ($\gamma \neq 0$) は、 $X(K) = X_1 \cup_F X_2$ と分解し、 X_i は S^3 内の link の exterior である。これは Przytycki の結果から得られる。

Lemma 3.5 (IP: Corollary 4.5D). $L: S^3$ 内の link, exterior $X(L)$ は not sufficiently large (i.e. $X(L)$ は closed, 2-sided incompressible, not boundary parallel surface とはならない) とする。 F は 2-sided, incompressible, not ∂ -parallel surface とする。 $X(L)$ を F で切り開いて得られる g 個の handle bodies と g 個の $S^1 \times D^2$ の必要十分条件は ∂F の each component of $\partial X(L)$ は γ の slope を持つことである。

Corollary 3.5.1. Knot K の exterior $X(K)$ は not sufficiently large のとき、 K は not sufficiently large (knot) の S^3 内の link である。 K は S^3 内の not sufficiently large knot である。 F は 2-sided incompressible, (∂ -incompressible) not ∂ -parallel planar surface with $\#\partial F = 2g$ である。 $X(K) - N(F) = X_1 \cup X_2$, $X_i =$ handle body of genus g である。

\Rightarrow Corollary 1-54 の Przytycki の planar surface α の slope γ は $\gamma \neq 0$ である。これは

・主定理を示すべくある。

Theorem 3.6. K を non-trivial, not sufficiently large knot とする。且し ある $r \in \mathbb{Q}$ ($r \neq 0$) に対し

$$(K; r) = \#_{i=1}^{\Delta} M_i \quad (M_i: \text{irreducible})$$

と分解できるならば Δ は 2 より小さい, $\Delta \leq 2$.

Proof $\Delta \geq 3$ とする。lemma 3.2 より, incompressible, ∂ -incompressible, non- ∂ -parallel planar surface with slope $r (\neq 0)$ (= 以上の条件を $(**)$ とおく) F が存在する。Corollary 3.3.1 より ∂F の成分の個数は偶数で $F \neq \text{disk}$ である。すなわち $\Delta \geq 3$ より $F = \text{disjoint } \partial F = \text{parallel}$ である。条件 $(**)$ を満たす disk と異なる別の planar surface F' が存在する。 $F' \subset X(K) - N(F) = X_1 \cup X_2$ である。一般性を失わず $F' \subset X_1$, $\partial F' \subset \partial X_1$ とし得る。($\partial F' \neq \text{Fox}$) F' は明らかに X_1 で incompressible である。すなわち F' が ∂ -incompressible in X_1 が分かる。 F' は handle body 内の incompressible, ∂ -incompressible surface である。したがって handle body 内の ≥ 2 の成分を持つ surface は disk であることが知られている。 $F' = \text{disk}$ である条件 $(**)$ に反する。 $\Delta \geq 3$ の時、矛盾が導かれた。

Theorem 3.6 の条件を満たす knot は torus knot または hyperbolic

is not sufficiently large knot である。今、所 hyperbolic is sufficiently large knot による連結和の成分の個数の評価式は分からない。torus knot に Dehn surgery により得られる連結和の成分の個数は、実際 2 以下であることが Mozer [Mo] により調べられている。

より簡単な結び目から複雑な結び目を作るのが satellite knot である。この satellite knot $J(K)$ に関する Dehn-surgery の結果は Gordon により調べられている [G2]。以下連結和の因子を irreducible, not sufficiently large 3-manifold とおけるような closed orientable 3-manifold を satellite knot から得る場合に問題を制限する。Gordon の次の lemma が有効である。

Lemma 3.7. [G2: Lemma 3.5/7] $(J(K):r)$ が

w -atoroidal (i.e. $(J(K):r)$ is incompressible (separating) torus T s.t. $H_1(T) \rightarrow H_1(J(K):r) \cong \mathbb{Z}_m = w\mathbb{Z}_m$ を持つ) なら、

w は J の K に対する winding 数、 $r = \frac{m}{n}$ なら、solid torus

の curve $J = \frac{1}{n}$ surgery により得られる 3-mfd $(J:r)$ は

$(J:r) \cong S^1 \times D^2 \# P$ 。 P は $(J(K):r)$ の連結和因子と

書かれる。 $(J(K):r) = (K: \frac{r}{w^2}) \# P$ から $(J(0):r) = (0: \frac{r}{w^2}) \#$

P 。 故に $w=0$ の時 $(J(K):r) = (J(0):r)$ である

K の satellite $J(K)$ (= surgery (= 結果) は K の surgery の結果と
 $J=K$ の solid torus (= surgery (= 結果) である。この場合
 (= Theorem 3.6 & Lemma 3.7 の系) の連結和の因子の個数について
 評価式が求まる。

Corollary 3.8 $(J(K), r) = \#_{i=1}^{\Delta} M_i$, M_i は irreducible
 の not sufficiently large knot である。 Δ' は $(K, r/w^2) = \#_{j=1}^{\Delta'} M'_j$
 である。

この時、 $\Delta' \leq \Delta \leq \Delta' + 1$ 。

Proof $(J(K), r) = \#_{i=1}^{\Delta} M_i = (K, r/w^2) \# P$, $\# P$
 は $(J(0), r) = (0, r/w^2) \# P$, 0 は trivial knot により決まる。
 $J(0)$ は not sufficiently large により Theorem 3.6 により、 $(J(0), r)$
 から得られる連結和の因子の個数 Δ'' は $\Delta'' \leq 2$ である。よって P
 は prime である。 P の連結和の因子の個数を Δ_P とする $0 \leq \Delta_P \leq 1$ 。
 $\Delta = \Delta' + \Delta_P$ よって $0 \leq \Delta - \Delta' \leq 1$ となり $\Delta' \leq \Delta \leq \Delta' + 1$ 。

この Corollary より $\Delta' \leq 2$ ならば $2 \leq \Delta \leq 3$, $\Delta' = 1$ ならば
 $\Delta \leq 2$ であることがわかる。

最後に予想といくつかの問題を述べて終わる。

予想. $(K: \mathbb{R}) = \#_{i=1}^n M_i$. M_i : irreducible $\Rightarrow \Delta \leq 2$

\Rightarrow 予想の根拠は、知られている例はすべて $\Delta \leq 2$ であるからだが、反例を作るのが面白いと思う。

knot + Dehn surgery \Rightarrow irreducible \Rightarrow not sufficiently large な 3-manifold の 連結和を得るためには、knot exterior 内の genus ≥ 2 の incompressible surface が surgery (の結果) により compress されるか調べる必要がある。

問題 genus ≥ 2 の closed incompressible surface の 3-manifold 内での compressible 状態はどうなっているか？

§3 の議論では、Dehn-surgery の係数は 整数 或いは 有理数 かのどちらかが殆ど問題になっている。連結和が得られる場合の 実例をみるとすべて 整数 であり、 $\frac{1}{2} = 2$,

問題 knot exterior 内の incompressible, ∂ -incompressible planar surface の slope を決定せよ。

— References —

[F] S. Fukuhara, On an invariant of homology lens spaces, preprint (first version)

[FS] R. Fintushel and R. Stern, Constructing lens

spaces by surgery on knots, Math. Z. 175
(1980), 33-51.

[G1] C. McA. Gordon, Knots, homology spheres and contractible 4-manifolds, Topology 14 (1973), 151-172.

[G2] C. McA. Gordon, Dehn surgery and satellite knots, preprint.

[HNK] F. Hirzebruch, W. D. Newmann and S. S. Koh, Differentiable manifolds and quadratic forms, Marcel Dekker, New York (1971).

[M] Y. Matsumoto, On bounding genus of homology 3-spheres, pre print

[Mo] L. Moser, Elementary surgery along a torus knot, Pacific. J. Math 38 (1971), 737-745.

[P] J. H. Przytycki, Incompressibility of surfaces after Dehn surgery, preprint.

[W] F. Waldhausen. Eine Klasse von 3-dimensional manifoldigkeiten. I, Inv. Math 3 (1967), 308-333