数理解析研究所講究録
467巻 1982年 24-31

Seifert fibered space の geometric structure

都立大 理　小島 定吉

(Sadayoshi Kojima)

§1 序

5月末に数理研で, orbit space が S^2, exceptional fiber が3本の Seifert fibered space に Thurston の意味での geometric structure が入ることを示した。ここで geometric structure とは, local に [3] で挙げた geometric space を model とする Riemannian structure である。本稿ではその後の少々の進展を述べたい。Thurston による orbifold はその為の基本的な概念であり, 以降その定義, 基本的な性質等 [2] §13 の内容を記号も含め自由に使う。

§2 5/82

Orbifold の S^1-fibration $E \longrightarrow O$ は, Seifert fibration の自然な一般化であり, 又その現代的な表現でも

ある。実際 E が orbifold として manifold のとき，$E \to O$ は Seifert fibration に他ならず，exceptional fiber は O の elliptic point 上の fiber に対応する。orbifold O の elliptic point の order p と，この回転 action の lift を定める integer q $(0 \leq q < p)$ との pair (p, q) が，E の elliptic point 上の fiber の近傍の orbifold structure を決める。この pair は従来の Seifert fibration の立場から見れば，Dehn surgerical な index（通常の index の dual）と一致する。一言注意しておくと，$E \to O$ が Seifert fibration であることと，X_E が Seifert fibered space であることとは同値ではない。従来の Seifert fibration を orbifold としての S^1-fibration として記述することは出来るが，fibration が underlying space X_E の構造だけで決まる訳ではないからである。例えば X_E が S^3 に同相で X_O が多角形となる orbifold としての S^1-fibration $E \to O$ が存在する。この場合 Σ_E は S^3 内の link であり，従って E は manifold ではない。

ここでは E に fibration structure を利用して Thurston の意味での geometric structure を与えるのが主題であるが，その為3次元 fibered geometry の説明をしよう。まず2次元に関して，次の3つの geometric space が良く知

られている。

$$\begin{cases} \text{Spherical Geometry} & (S^2, SO(3)) \\ \text{Euclidean Geometry} & (\mathbb{E}^2, \mathrm{Isom}^+\mathbb{E}^2) \\ \text{Hyperbolic Geometry} & (\mathbb{H}^2, PSL(2,\mathbb{R})) \end{cases}$$

任意の2次元closed多様体は，そのEuler標数の正負に従い上記のいずれかのstructureを持つ。この事実はgoodな2次元orbifoldに自然に拡張される。即ち，closed good 2-orbifold O は，$\chi(O)$ の正負に従い上記3つのいずれかのstructureを持つ。さて3次元fibered geometryは，いずれかの2次元geometryへequivariantなprojection：$(X, G) \longrightarrow (P, K)$ があるgeometric space (X, G) として定められる。2次元geometryが3種類あり，それぞれについて自明なfibration及び非自明なfibrationに対応するものの2種類があるので，合計6種類のfibered geometryが得られるはず。それらは [3] p.368 で 1, 2, 4, 5, 6, 7 として述べられた。ただしspherical geometry 1 とeuclidean geometry 2 はequivariantなprojectionを得る為，変換群を制限しなければならない。制限のしかたについては [1] を参照。

ここで5月末の結果をorbifoldを用いて定式化する。

<u>定理</u>. $E \to O$ を orbifold としての Seifert fibration, $X_O \approx S^2$, $\Sigma_O = \{3$ コの elliptic points$\}$ とする。このとき E には, 次の表に従う与えられた fibration と compatible な fibered geometric structure が入る。

$e(E) \setminus \chi(O)$	>0	$=0$	<0
$=0$	$\emptyset$	2	5
$\neq 0$	1	7	6

ここで $e(E)$ は $E \to O$ の euler number, compatible とは $E = X/\Gamma$ と書いたとき projection $p:(X, G) \to (P, K)$ が induce する写像 : $E = X/\Gamma \to P/p(\Gamma)$ がもともとの $E \to O$ と一致していることを意味する。

structure の構成は, 3角形による2次元 geometric space の tiling に関する事実と, Thurston による hyperbolic Dehn surgery の他の geometry の version を用いてなされる。詳しくは [1] を見て戴きたい。

§3 8/82

上の定理は, 一般の closed fibered orbifold $E \to O$ に対し次の様に拡張されることが確かめられた。O が good な場合は, 証明も殆んど同様である。

定理I. $E \to O$ を closed fibered orbifold とする。

(A) O が good のとき, E には次の表に従う与えられた fibration に compatible な fibered geometric structure が入る。

$e(E) \backslash \chi(O)$	>0	$=0$	<0
$=0$	4	2	5
$\neq 0$	1	7	6

(B) O が bad のとき,

(i) $e(E) = 0 \iff E$ が bad

(ii) $e(E) \neq 0 \iff E$ は spherical structure を持つ。

注. (B)(ii) における E の spherical structure は X_E 上の circle action を許容し, これが fibration : $E \to O$ を定めるが, この場合 $\pi_1^{orb}(E)$ が fibered geometry の変換群からはみ出てしまうので, quotient に geometric structure を induce しない。実際 O は bad。

更に compact fibered orbifold $E \to O$ の内部 $\mathrm{int}\, E = E - \partial E$ に入る geometric structure については次が成り立つ。

<u>定理Ⅱ</u>. $E \longrightarrow O$ を compact fibered orbifold で $\partial E \neq \emptyset$ なるものとする

(A) $\chi(O) < 0$ のとき, int E には与えられた fibration に compatible な有限体積 complete 5, 6 型双方の structure が入る。

(B) $\chi(O) \geq 0$ のとき, int E には 2, 3, 5, 6, 7, 8 型の complete geometric structure が入り, かつそれらは無限体積.

<u>注</u>. (B) で現われる多様体は, solid torus, $T^2 \times I$, Klein bottle 上の twisted I-bundle であり, すべて geometric decomposition の立場から見ると, closed 多様体を分解したときの piece とはならない特殊なものである.

一般に E が fibered geometric structure を持ったとしても, それが fibration を induce するかどうかは分らないが,

<u>定理Ⅲ</u>. E が有限体積 fibered geometric structure を持てば, 定理Ⅰ(A), 定理Ⅱ(A) で述べた fibration を induce する。

spherical 及び euclidean orbifold は最近研究し尽されたらしいが（Dunber 等？），例えば E が spherical か euclidean structure を持ちかつ closed manifold であれば，定理 I (A) (B) で述べた fibration を induce すること等は古くから知られていた。

注. 双方共 manifold という仮定を落とすと，fibered structure すら持たない orbifold が存在する。

従って fibered orbifold $E \longrightarrow O$ が許容する geometric structure の variation は大体（manifold については完全に）記述されたことになる。例えば従来の Seifert fibration が殆んど unique であることから

系. Closed Seifert fibered space の許容する geometric structure の種類は unique（structure は一般に unique ではない）。

が得られる。即ち closed Seifert fibered space が属する geometry は topological invariant ということである。

最後に，Thurston は geometric structure の存在に関する定理を [3] で announce している。しかし細かいこと

については何も言ってないので，本稿の内容がどの程度関連しているか（含まれているか？）は今述べることは出来ない。

References

[1] Kojima, S.: Geometric structures on simple Seifert fibered spaces. preprint

[2] Thurston, W.: The geometry and topology of 3-manifolds. Lecture Note, Princeton University (1978)

[3] Thurston, W.: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. (New Series) Amer. Math. Soc., 6, 357–381 (1982)