数理解析研究所講究録
467巻 1982年 4-13

Regular Coverings of Links

大阪市大 理　作間 誠
(Makoto Sakuma)

Kim-Tollefson [1] は、既約でない 3-mfd 上の involution は既約成分の involution に分解される事を示した。特に、系として、S^3 の link L で分岐する 2-fold branched covering space が irreducible であるためには、L が non-splittable かつ prime であるのが必要十分である事が示された。
ここでは、Meeks-Yau [3] の equivariant sphere theorem を用いて上の結果を一般の regular cover の場合に拡張し、その二つの応用を述べる。一つは $S^2 \times S^1$ を regular cover に持つ S^3 内の link type の決定であり、もう一つは、composite link の period に関するものである。

以下、次の記号を用いる。
S^3 内の link $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ に対して、

$E(L) = S^3 - L$: L の補空間,

$G(L) = \pi_1(E(L))$: Lの link group,

$m(K_i) \in G(L)$: K_iの meridian。

Link group $G(L)$から有限群Gへの epimorphism φが与えられた時.

$E_\varphi(L)$: $\mathrm{Ker}\,\varphi$に対応する$E(L)$の covering space,

$\Sigma_\varphi(L)$: $E_\varphi(L)$の completion として得られるS^3の branched cover。

この時、Gは$\Sigma_\varphi(L)$に効果的に作用し、$\Sigma_\varphi(L)/G \cong S^3$となる。$L$の component K_iが branch set に属する (ie $p^{-1}(K_i) \subset \mathrm{Fix}\,G$, 但し$p: \Sigma_\varphi(L) \to S^3$は projection) 事と、$\varphi(m(K_i)) \neq 1$ $(\in G)$となる事は同値である。そこで、すべてのi $(1 \leq i \leq \mu)$に対して、$\varphi(m(K_i)) \neq 1$となる時、$\Sigma_\varphi(L)$をLの regular cover と呼ぶ。又、特に、Gが abel 群の時$\Sigma_\varphi(L)$をLの abelian cover、Gが cyclic group $\mathbb{Z}_n$の時$\Sigma_\varphi(L)$を$\Sigma_n(L)$で表わし、Lの n-fold branched cyclic cover と呼ぶ。

§1. Regular cover の second homotopy group

Link Lの regular cover $\Sigma_\varphi(L)$に関して次が成り立つ。

<u>定理1</u> (a) $\pi_2(\Sigma_\varphi(L)) \neq 0$となるためには、$L$が split link 又は composite link である事が必要十分である。

(b) $\Sigma_\varphi(L)$が non-separating 2-sphere を含むためには、次の(1)又は(2)のいずれかが成り立つ事が必要十分である。

(1) L は split link $L_1 \circ L_2$

(2) L は composite link $L_1 \# L_2$ で $G_i \supsetneqq \varphi(G(L_i)) \supsetneqq \langle \varphi(m) \rangle$ $(i=1,2)$ となる。 但し、ここでは $G(L) = G(L_1) \underset{\langle m \rangle}{*} G(L_2)$ と見なしている。

更に、この時 $\Sigma_\varphi(L)$ は(少なくとも)次の個数の"独立な" non-separating 2-sphere を含む。

(1) の場合： $1 + |G| \{ 1 - 1/|G_1| - 1/|G_2| \}$

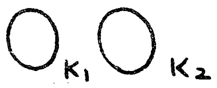
(2) の場合： $1 + [G : \langle \varphi(m) \rangle] \{ 1 - 1/[G_1 : \langle \varphi(m) \rangle] - 1/[G_2 : \langle \varphi(m) \rangle] \}$

(証明) Equivariant sphere theorem と homotopy Smith conjecture を用いる。 詳しくは [8] を見て下さい。

§2. $S^2 \times S^1$ を regular cover に持つ link

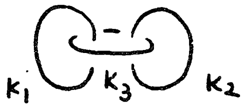
2-fold branched covering に関しては、branch line の一意性の問題はいろいろ研究されているが、一般の regular cover については、まだあまり調べられていない。 ここでは、定理1を用いて、$S^2 \times S^1$ を regular cover に持つ S^3 内の link type を決定する。

<u>定理 2</u> $\Sigma_\varphi(L)$ が homotopy $S^2 \times S^1$ であるためには、次の (1), (2) のいづれかが成立する事が必要十分である。

(1) $L \cong$ 

$G \cong D_n = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle$

$\varphi(m(K_1)) = x$, $\varphi(m(K_2)) = y$ 。

(2) $L \cong$ 

G は次の $G^{\mathrm{I}}(n,k)$, $G^{\mathrm{II}}(n,k)$ のいづれかに同型。

$$\begin{cases} G^{\mathrm{I}}(n,k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^k = [x,z] = [y,z] = (xy)^n = 1 \rangle \\ \qquad (n, k : \text{positive integers}) \\ G^{\mathrm{II}}(n,k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^k = [x,z] = [y,z] = (xy)^n z^{k'} = 1 \rangle \\ \qquad (n, k = 2k' : \text{positive integers}) \end{cases}$$

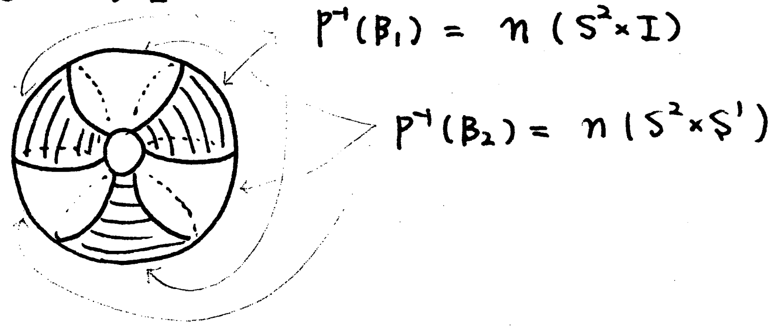
$\varphi(m(K_1)) = x$, $\varphi(m(K_2)) = y$, $\varphi(m(K_3)) = z$ 。

更に、上が成立する時、$\Sigma_\varphi(L)$ は $S^2 \times S^1$ に同相である。

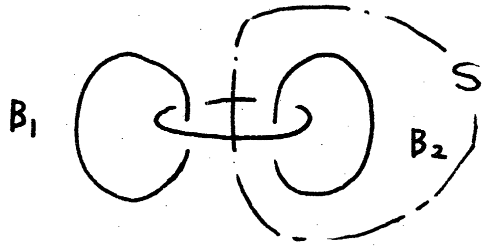
(証明) 十分性を示す。

(1)の場合。 Link を split する 2-sphere を S , K_i を含む $S^3 - S$ の component の closure を B_i とすると、$S^3 = B_1 \underset{S}{\cup} B_2$ 、よって $\Sigma_\varphi(L) = p^{-1}(B_1) \underset{p^{-1}(S)}{\cup} p^{-1}(B_2)$ となる。 ところが、$p^{-1}(B_i)$ は n コの $\Sigma_2(K_i) - \{\text{two 3-balls}\} \cong S^2 \times I$ の disjoint union である。 これより $\Sigma_\varphi(L) \cong S^2 \times S^1$ を得る。
(次図参照)

($n = 3$ の場合)



(2) の場合。 Link を decompose する 2-sphere を S, K_i を含む $S^3 - S$ の component の closure を B_i $(i = 1, 2)$ とする。



この時、$\Sigma_\varphi(L) \cong p^{-1}(B_1) \underset{p^{-1}(S)}{\cup} p^{-1}(B_2)$。 又、$p^{-1}(B_i)$ は n コの $S^3 - \{\text{two 3-balls}\} \cong S^2\times I$ の disjoint union である事がわかる。これより $\Sigma_\varphi(L) \cong S^2\times S^1$ を得る。

次に必要性の証明の概略を述べる。 $\Sigma_\varphi(L)$ が homotopy $S^2\times S^1$ であるとすると、定理 1 により、L は split link $L_1 \circ L_2$, 又は composite link $L_1 \# L_2$ である。 $\varphi_i = \varphi|G(L_i)$ とすると、$\Sigma_\varphi(L)$ は $\Sigma_{\varphi_i}(L_i) - \{\text{3-balls}\}$ $(i = 1, 2)$ の copy を張り合わせて出来る。 これより、$\Sigma_{\varphi_i}(L_i)$ は homotopy 3-sphere で、しかも、φ_i は abelian representation である事がわかる。ところが、homotopy 3-sphere を abelian cover に持つ

link は trivial knot と Hopf link に限る ([4, 7, 8])
これより (1), (2) のいづれかが成立しなくてはならない事がわかる。

<u>Remark</u> 定理 2 で与えられた branched covering は、次の様に分解される。

$$
\begin{tikzcd}
S^2 \times S^1 \arrow[dr, "\mathbb{Z}_k \text{ branched cover}"] \arrow[dddr, bend right, "G^{\mathrm{I\,a\,II}}(n,k)\ \text{branched cover}"'] & & \\
& S^2 \times S^1 \arrow[dr, "\mathbb{Z}_n \text{ unbranched cover}"] \arrow[dd, "D_n \text{ branched cover}"'] & \\
& & S^2 \times S^1 \arrow[dl, "2\text{-fold branched cover}"] \\
& S^3 &
\end{tikzcd}
$$

§3. Composite link の period

S^3 内の link L が period $n\ (>1)$ を持つとは、次の条件を満足する S^3 上の homeomorphism T が存在する事を言う。

(1) $T(L) = L$,

(2) $\mathrm{Fix}(T)$ は L と交わらない 1-sphere,

(3) T は period n の periodic map。

この章では、定理 1 を用いて、composite link は "canonical" な period しか持たない事を示す。

今、L を period n の periodic link とし、T をそれに付随した periodic map とする。この時 [10] により T は standard rotation で $S^3/T \cong S^3$ となる。p を projection $S^3 \to S^3/T$ とし、$K_0 = p(\mathrm{Fix}(T))$, $\underset{\sim}{L} = p(L)$, $\underset{\sim}{L}' = K_0 \cup \underset{\sim}{L}$ とおく。

定理 3 (a) L が split link であるためには、次の (1) 又は (2) が成立する事が必要十分である。

(1) $\underset{\sim}{L}'$: split link,

(2) $\underset{\sim}{L}'$ は composite link で、その decomposing 2-sphere は K_0 と交わる。

(b) L は non-splittable とする。この時、L が composite link であるためには、$\underset{\sim}{L}'$ が composite link で、その decomposing 2-sphere が K_0 と交わらない事が必要十分である。

(c) L が trivial knot であるためには、$\underset{\sim}{L}'$ が Hopf link である事が必要十分である。

(証明) (a), (b). L 及び $\underset{\sim}{L}'$ の適当な regular cover に対して定理 1 を適用する ([9] 参照)。

(c) については [7, 8] 参照。

上の定理より、次を得る。

<u>定理 4</u>　L を non-splittable link とし、$\#\{n_i L_i \mid 1 \leq i \leq s\}$ $(s \geq 1,\ n_i \geq 1)$ を L の prime decomposition とする。この時、もし L が period $n\ (>1)$ を持てば次の (1) 又は (2) が成立する。

(1)　n は、すべての n_i $(1 \leq i \leq s)$ を割り切る。

(2)　ある自然数 j $(1 \leq j \leq s)$ に対して次が成立する

(i)　L_j は period n を持つ，

(ii)　$n \mid n_j - 1$ ，

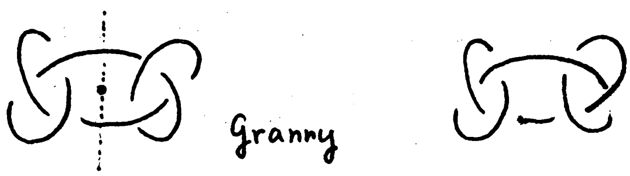
(iii)　$n \mid n_i$　$(i \neq j)$.

更に、上の条件は knot に対しては十分条件でもある。

<u>系 1</u>　(1)　K を nontrivial prime knot とすると、$K \# K$ は period 2 を持ち，しかもそれが唯一つの period である。

(2)　K_1, K_2 を相異なる nontrivial prime knot とすると、$K_1 \# K_2$ は period を持たない。

<u>例</u>　Granny knot は唯一つ period 2 を持つ。一方、square knot は period を持たない。



Granny　　square

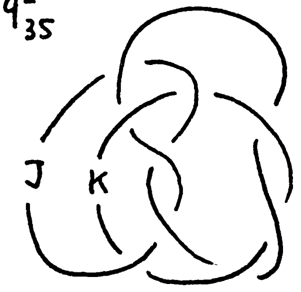
Remark　系1の(1)において、付随する involution も一意である事が証明からわかる。

系2　Non-splittable composite link は高々有限個の period しか持たない。

Remark　Trotter [11], Murasugi [5] は、fibered knot は高々有限個の period しか持たない事を示した。

最後に、定理3の応用として、すべての自然数 $n\ (>1)$ に対して、相異なる prime knots J_n, K_n でその n-fold branched cyclic cover が同相となるものを構成する。(二つの相異なる composite knots ですべての branched cyclic cover が同相となる例は既に知られている。)
$L = J \cup K$ を 9^2_{35}-link とする。この時、$lk(J, K) = 1$, J, K は共に unknotted, よって L は prime である。今、J_n $[K_n]$ を $\Sigma_n(K) \cong S^3$ $[\Sigma_n(J)]$ への J $[K]$ の lift とする。すると定理3により J_n, K_n は共に non trivial prime knot である。又、J_n, K_n の n-fold branched cyclic cover は

9^2_{35}



共に L の $\mathbb{Z}_n\oplus\mathbb{Z}_n$ branched cover であり、従って同相となる。ところが、Alexander 多項式を調べる事に依り、Jn と Kn は相異なる事がわかる。よってこれが求めていた knot である。（この例は、筆者と中西氏が構成したものであるが、中西氏は、tangle 論法の改良により、Jn, Kn の primeness の初等的証明を与えた [6]。）

References

[1] Kim, P.K., Tollefson, J.L.: Splitting involutions of nonprime 3-manifolds, Mich. Math. J. 27, 259-274

[2] Kouno, M.: The irreducibility of 2-fold branched covering spaces of 3-manifolds, 数理研講究録 417, pp.106-121 (1981)

[3] Meeks, W.H.III, Yau, S.T.: Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, Ann. of Math. 112, 441-484 (1980)

[4] Morgan, J.W.: Actions de groupes finis sur S^3, Lect. Notes in Math. 901 Springer Verlag, pp.277-289 (1981)

[5] Murasugi K.: On periodic knots, Comment. Math. Helv. 46, 162-174 (1971)

[6] Nakanishi Y.: Primeness of links, Math. Semi. Notes, Kobe Univ. 9, 415-440, (1981)

[7] Sakuma M.: Abelian coverings of links, 数理研講究録 417, pp.62-70, (1981)

[8] Sakuma M.: On regular coverings of links, to appear in Math. Ann.

[9] Sakuma M.: Periods of composite links, Math. Semi notes, Kove Univ. 9, 445-452, (1981)

[10] The proof of the Smith Conjecture, Proc. of Conference at Columbia University, New York, 1979, in preparation

[11] Trotter H.F.: Periodic automorphisms of groups and knots, Duke Math. J. 28 (1961), 553-558